M. LAVRENTIEV
ET B. CHABAT

MÉTHODES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ и Б. В. ШАБАТ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

M. LAVRENTIEV et B. CHABAT

Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

CDU 517.5=40

Traduit du russe par
HENRI DAMADIAN

Révisé par
V. Zorič

На французском языке

Copyright by les Editions Mir
U.R.S.S. 1972

Préface à l'édition française

Dans la vaste collection de livres traitant de la théorie des fonctions d'une variable complexe le nôtre tient une place spéciale. On y insiste surtout sur les méthodes utilisées par les personnes résolvant des problèmes pratiques. Abstraites à l'origine, nombre de méthodes de la théorie des fonctions trouvent par la suite des applications diverses. En adressant ce livre au lecteur français, nous tenons à souligner que plusieurs des idées développées dans cet ouvrage ont vu le jour en France. C'est ainsi que les travaux théoriques de Jacques Hadamard, Paul Montel et Jean Leray ont posé les bases des principes variationnels et autres méthodes ayant facilité la résolution de certains problèmes importants d'hydrodynamique et, notamment, ont permis de démontrer l'existence des solutions des problèmes classiques de la théorie ondulatoire (dont celle des ondes de Rayleigh), des problèmes d'écoulement du gaz autour d'un corps à des vitesses proches des vitesses du son, etc.

Tout en créant des théories remarquables, les chercheurs français se signalent également par d'importantes réalisations dans le domaine des applications. Citons à ce propos les travaux de Kravtchenko (problèmes d'hydrodynamique) et ceux de Gauthier (problèmes non linéaires de la mécanique des milieux continus).

Nous espérons donc que la traduction en français de notre livre contribuera au resserrement des liens entre les savants français et les savants soviétiques dans cette branche des mathématiques qu'est la théorie des fonctions d'une variable complexe et de ses applications.

Les auteurs

Préface à la première édition russe

Les ouvrages traitant de la théorie des fonctions d'une variable complexe nous donnent ou bien un exposé complet et s'adressent aux mathématiciens de profession ou bien des notions fondamentales de la théorie. Or, ces derniers temps on assiste en physique et en technique au développement des méthodes s'appuyant de plus en plus sur la théorie des fonctions. Les cours classiques de mathématiques sont dans ce cas d'un secours médiocre aux non-mathématiciens, quant aux cours élémentaires, ils sont manifestement inadéquats.

Les auteurs du présent ouvrage se proposent de combler cette lacune et exposent les méthodes fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'intention de ceux qui s'occupent de ses applications physiques et techniques. Le livre s'adresse aux étudiants des Facultés de mécanique et de physique, aux élèves en maîtrise des Ecoles techniques supérieures possédant des connaissances mathématiques suffisantes. Le lecteur est supposé connaître les éléments de l'analyse mathématique du niveau des deux premiers tomes du Cours de mathématiques supérieures de Vladimir Smirnov (traduit en français par les Editions Mir).

Le premier chapitre donne les notions fondamentales de la théorie des fonctions et dispense ainsi de recourir aux cours généraux. Toutefois, l'exposé de la matière y est plus succinct que dans les chapitres suivants, car une vaste bibliographie est accessible sur le sujet.

Les autres chapitres sont consacrés aux différentes méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe qui sont d'un grand intérêt pour les applications. Les exemples sont abondants. Si la méthode est bien assimilée à la suite de quelques exemples, les exemples suivants peuvent être négligés jusqu'à la référence correspondante.

Le livre contient beaucoup d'exemples d'application de la théorie des fonctions aux problèmes physiques. Ne pensez surtout pas,

cher lecteur, que les exemples relatifs à l'électrotechnique ne s'adressent qu'aux électriciens et ceux se rapportant à l'hydromécanique aux seuls mécaniciens. Car les méthodes illustrées par un problème peuvent souvent être appliquées pour résoudre un problème analogue de contenu physique différent. La connaissance des fondements de l'application de la théorie des fonctions aux divers domaines de la physique vous facilitera l'adaptation aux besoins de votre propre profession des méthodes utilisées dans d'autres branches scientifiques.

Désireux d'éviter des raisonnements trop longs qui pourraient compliquer la démonstration, les auteurs parfois sacrifient consciemment la rigueur de l'exposé à la clarté. Par contre, certaines propositions sont démontrées avec plus de rigueur qu'on ne le fait d'ordinaire et d'autres sont énoncées sans démonstration.

Mikhaïl Lavrentiev
Boris Chabat

Moscou, 1951

CHAPITRE I

Notions fondamentales

Dans ce chapitre, on introduit toutes les notions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe : les notions de fonction, de dérivée, d'intégrale et autres. Le lecteur constatera que les définitions usuelles de ces notions, données en analyse des fonctions d'une variable réelle, ne subissent presque aucune modification mais que leur contenu change essentiellement. Ainsi, l'interprétation géométrique ordinaire d'une fonction à l'aide d'une courbe du plan disparaît pour être remplacée par la notion de fonction en tant qu'application des ensembles plans (n° 4). La condition de différentiabilité d'une fonction de la variable complexe s'avère beaucoup plus restrictive que la même condition pour une fonction de la variable réelle (n° 5). Par exemple, de la condition de différentiabilité dans le domaine complexe il découle automatiquement l'existence des dérivées de tous les ordres (n° 17) et toute une série de propriétés des fonctions inconnues en analyse réelle (n^{os} 14, 15 et autres).

Déjà au XVIII^{e} siècle, dans leurs recherches, les mathématiciens avaient recours aux nombres complexes et aux fonctions d'une variable complexe. Le mérite tout particulier en revient au grand mathématicien *Leonhard Euler* (1707-1783) qui, à juste titre, doit être considéré comme l'un des créateurs de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Dans ses remarquables travaux, Euler étudia en détail les fonctions élémentaires d'une variable complexe, y compris les fonctions logarithmique, exponentielle, trigonométriques, ainsi que les fonctions trigonométriques inverses (1740-1749), donna les conditions de différentiabilité (*) (1755) et les éléments du calcul intégral des fonctions d'une variable complexe (1777). Il donna aussi de nombreuses applications des fonctions d'une variable complexe se rapportant à différents problèmes mathématiques et ouvrit l'ère de leurs applications en hydrodynamique (1755-1757) et en cartographie (1777).

Après Euler, les résultats et les méthodes découverts par lui se développèrent, se perfectionnèrent et se systématisèrent et, dans la

(*) En 1752, *Jean d'Alembert* (1717-1783), partant de considérations hydrodynamiques, aboutit aussi à ces conditions. Néanmoins, c'est notamment dans les travaux d'Euler que se précise pour la première fois le caractère général des conditions de différentiabilité.

première moitié du XIX^{e} siècle, la théorie des fonctions d'une variable complexe prend forme pour devenir un domaine important de l'analyse mathématique. Ici les principaux mérites reviennent à *Augustin Cauchy* (1789-1857) et à *Karl Weierstrass* (1815-1897) qui développèrent le calcul intégral et la théorie de la représentation des fonctions par des séries, ainsi qu'à *Bernhard Riemann* (1826-1866) qui argumenta les questions géométriques de la théorie des fonctions et leurs applications.

§ 1. NOMBRES COMPLEXES

Pour la commodité du lecteur, nous exposons ici les définitions et les propositions fondamentales se rapportant à la notion de nombres complexes, aux opérations que l'on peut effectuer avec ceux-ci et à leur interprétation géométrique (*).

1. Nombres complexes. On appelle *nombre complexe* toute expression de la forme $x + iy$, où x et y sont des nombres réels et i le symbole de l'unité imaginaire. Les nombres x et y sont appelés respectivement les parties *réelle* et *imaginaire* du nombre complexe $x + iy$ et sont notés

$$x = \operatorname{Re}(x + iy), \quad y = \operatorname{Im}(x + iy). \tag{1}$$

En particulier, si $y = 0$, on identifie alors $x + i0$ avec le nombre réel x; si $x = 0$, alors $0 + iy$ est noté iy et est appelé *imaginaire pur*.

Définissons sur l'ensemble des nombres complexes la notion d'égalité et les opérations arithmétiques. Nous disons que les nombres complexes $x_1 + iy_1$ et $x_2 + iy_2$ sont *égaux*,

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \tag{2}$$

si, et seulement si, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Notons encore que si $x_2 = x_1$ et $y_2 = -y_1$, alors le nombre complexe $x_2 + iy_2$ est dit *conjugué complexe* ou *conjugué* du nombre $x_1 + iy_1$ et est noté $\overline{x_1 + iy_1}$. Ainsi,

$$\overline{x + iy} = x - iy. \tag{3}$$

Passons à la définition des opérations avec les nombres complexes.

(*) Les nombres « imaginaires », en tant que racines carrées de nombres négatifs, furent mentionnés pour la première fois au XVI^{e} siècle (*G. Cardan*, 1545). Jusqu'au milieu du XVIII^{e} siècle, les nombres complexes n'apparurent qu'épisodiquement dans les travaux de certains mathématiciens (*I. Newton*, *N. Bernoulli*, *A. Clairaut*). Le premier exposé en langue russe de la théorie des nombres complexes appartient à *L. Euler* (« Algebra », Pétersbourg, 1763. Plus tard, ce livre fut traduit dans plusieurs langues étrangères et édité à maintes reprises) ; le symbole « i » fut introduit par Euler. L'interprétation géométrique des nombres complexes remonte à la fin du XVIII^{e} siècle et nous en sommes redevables à *Gaspard Wessel* (1799).

1) A d d i t i o n. On appelle *somme* $z_1 + z_2$ des nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ le nombre complexe

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{4}$$

Les propriétés suivantes de l'addition découlent directement de la définition :

a) *commutativité* : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

b) *associativité* : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

Si z_1 et z_2 sont des nombres réels (c'est-à-dire $y_1 = y_2 = 0$), alors la définition (4) coïncide avec la définition de l'addition des nombres réels.

L'addition admet une opération inverse : pour deux nombres complexes quelconques $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ on peut trouver un nombre z tel que $z_2 + z = z_1$. Ce nombre est appelé *différence* des nombres z_1 et z_2 et est noté $z_1 - z_2$. Il est facile de voir que

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{5}$$

2) M u l t i p l i c a t i o n. On appelle *produit* $z_1 z_2$ des nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ le nombre complexe

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{6}$$

Les propriétés suivantes de la multiplication découlent de la définition :

a) *commutativité* : $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

b) *associativité* : $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

c) *distributivité* (par rapport à l'addition) :

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Si z_1 et z_2 sont des nombres réels, alors la définition (6) coïncide avec la définition usuelle. Pour $z_1 = z_2 = i$, il découle de la définition du produit que

$$i \cdot i = -1. \tag{7}$$

Il est facile de remarquer que la formule (6) s'obtient en multipliant $x_1 + iy_1$ et $x_2 + iy_2$ suivant les règles ordinaires de l'algèbre et en remplaçant le produit $i \cdot i$ par -1. Remarquons encore que le produit d'un nombre complexe $z = x + iy$ par son conjugué complexe est toujours non négatif. En effet, il vient de l'égalité (6)

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \geqslant 0. \tag{8}$$

La multiplication admet aussi une opération inverse si au moins un des facteurs donnés n'est pas nul. Soit $z_2 \neq 0$. On peut alors trouver un nombre z tel que $z_2 z = z_1$; d'après (6), il faut donc résoudre le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} x_2 x - y_2 y &= x_1, \\ y_2 x + x_2 y &= y_1, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

qui pour $z_2 \neq 0$ est toujours résoluble de façon unique car son déterminant $x_2^2 + y_2^2 > 0$. Ce nombre z est appelé *quotient* des deux nombres z_1 et z_2 et est noté $\frac{z_1}{z_2}$. Résolvant le système (9), nous trouvons

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{10}$$

Remarquons qu'il est facile d'obtenir (10) en multipliant par $\bar{z}_2$ le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{z_1}{z_2}$.

3) Elévation à une puissance entière. Le produit de n nombres égaux z est appelé *puissance n-ème* du nombre z et est noté z^n :

$$z^n = \underbrace{z \ldots z}_{n \text{ fois}}. \tag{11}$$

L'opération inverse, l'*extraction de racine*, se définit de la façon suivante : le nombre w est appelé *racine n-ème* du nombre z si $w^n = z$ (et est noté $\sqrt[n]{z}$; pour $n = 2$, on écrit $\sqrt{z}$). Un peu plus loin, nous verrons que pour chaque $z \neq 0$ la racine $\sqrt[n]{z}$ a n déterminations distinctes.

Nous pouvons maintenant écrire l'égalité (7) sous la forme $i^2 = -1$ et, pour l'unité imaginaire i, nous avons

$$i = \sqrt{-1} \tag{12}$$

(ici $\sqrt{-1}$ désigne l'une des deux déterminations possibles).

2. Interprétation géométrique. Considérons le plan rapporté aux coordonnées cartésiennes xOy et convenons de représenter un nombre complexe $z = x + iy$ par le point de coordonnées (x, y). De plus, les nombres réels sont représentés par les points de l'axe des x (qui, dans la suite, est appelé *axe réel*), les imaginaires purs par les points de l'axe des y (appelé *axe imaginaire*). En particulier, l'image du nombre i est le point (0, 1) de l'axe imaginaire.

Il est facile de voir que, inversement, à chaque point du plan xOy de coordonnées (x, y) correspond ainsi un nombre complexe $z = x + iy$ bien défini, de sorte que la correspondance entre l'ensemble de tous les nombres complexes et l'ensemble de tous les points du plan est biunivoque. C'est pourquoi, dans la suite, nous ne ferons aucune distinction entre les notions de nombre complexe et de point du plan et, par exemple, nous dirons « le point $1 + i$ », « le triangle de sommets z_1, z_2, z_3 », etc.

Puis, à chaque point (x, y) correspond un vecteur bien défini, le rayon-vecteur de ce point, et à chaque rayon-vecteur du plan un point bien défini, son extrémité (fig. 1). C'est pour cette raison que, dans la suite, nous représenterons les nombres complexes par des rayons-vecteurs du plan.

Le sens géométrique des opérations d'addition et de soustraction des nombres complexes est clair si l'on se réfère à la figure 1 : la somme et la différence des nombres complexes z_1 et z_2 sont représentées respectivement par les vecteurs qui coïncident avec les diagonales orientées du parallélogramme construit avec les vecteurs z_1 et z_2.

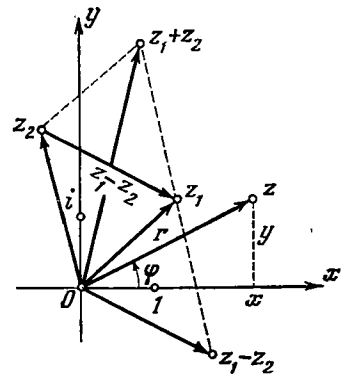

FIG. 1

Outre la représentation des nombres complexes par les coordonnées cartésiennes, il est utile, pour la suite, d'avoir aussi leur représentation par les coordonnées polaires. Pour cela, comme d'habitude, faisons coïncider l'axe polaire avec le demi-axe positif des x et le pôle avec l'origine des coordonnées ; si on désigne par r le rayon polaire et par φ l'angle polaire du point z (fig. 1), nous avons :

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \quad (1)$$

Le rayon polaire r est appelé *module* du nombre complexe z et est noté $|z|$, l'angle φ, son *argument*, est noté Arg z. Le module d'un nombre complexe est défini de façon unique :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0, \quad (2)$$

et son argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près :

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi & \text{(dans les I}^{\text{er}}\text{ et IV}^{\text{ème}}\text{ quadrants).} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + (2k+1)\pi & \text{(dans les II}^{\text{ème}}\text{ et III}^{\text{ème}}\text{ quadrants),} \end{cases} \quad (3)$$

ici arctg est la détermination principale de Arctg, c'est-à-dire la valeur supérieure à $-\frac{\pi}{2}$ et non supérieure à $\frac{\pi}{2}$, k est un nombre entier quelconque. Outre le symbole Arg qui désigne l'ensemble des déterminations de l'argument, on utilisera dans la suite le symbole arg désignant l'une quelconque des déterminations de Arg et, en cas de nécessité, on indiquera spécialement la détermination qu'on prend (cf. n° 6).

Les inégalités suivantes sont évidentes (cf. fig. 1) :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||. \quad (4)$$

On a l'égalité dans (4) si, et seulement si, Arg z_1 = Arg z_2 ou si l'un de ces nombres est nul.

De la définition (6) du n° 1il découle que pour la multiplication des nombres complexes leurs modules se multiplient et leurs argu-

ments s'ajoutent. En effet, il vient

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)\} = r_1 r_2 \{\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)\}. \quad (5)$$

Il en découle que pour la multiplication des nombres complexes z_1 et z_2 le vecteur z_1 se dilate (*) de $|z_2|$ fois et subit une rotation (dans le sens positif d'angle $\arg z_2$. En particulier, la multiplication d'un nombre complexe z par i se ramène à une rotation (sans dilatation) du vecteur z d'un angle droit dans le sens positif.

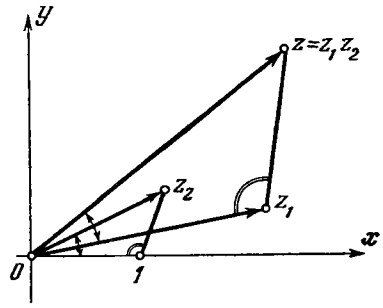

FIG. 2

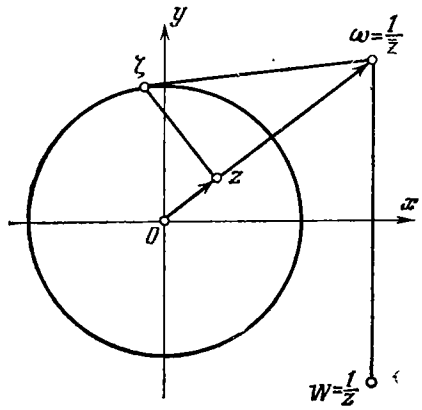

FIG. 3

On a représenté sur la figure 2 la construction du produit $z = z_1 z_2$: pour obtenir z il suffit de construire, avec le segment Oz_1 comme base, le triangle $Oz_1 z$, semblable au triangle $O1z_2$.

La division d'un nombre complexe z_1 par un nombre complexe z_2 se ramène à la multiplication de z_1 par $\frac{1}{z_2}$. C'est pourquoi on peut se limiter à l'explication du sens géométrique de l'opération $w = \frac{1}{z}$. Supposons d'abord $|z| < 1$ (fig. 3). Elevons du point z la perpendiculaire au rayon Oz et menons du point d'intersection ζ de cette perpendiculaire avec la circonférence $|z| = 1$ la tangente à cette circonférence. Il est clair que pour le point ω, intersection de la tangente construite avec le rayon Oz, nous avons

$$\operatorname{Arg} \omega = \operatorname{Arg} z,$$

(*) Si $|z_2| < 1$, alors z_1 se contracte de $\frac{1}{|z_2|}$ fois.

et de la similitude des triangles rectangles $Oz\zeta$ et $O\zeta\omega$ nous avons $\frac{|\omega|}{|\zeta|} = \frac{|\zeta|}{|z|}$, d'où

$$|\omega| = \frac{1}{|z|},$$

car $|\zeta| = 1$. Ainsi, le nombre ω est conjugué complexe de $\frac{1}{z}$, $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$, et pour obtenir le point $w = \frac{1}{z}$ il ne reste qu'à construire le point symétrique de ω par rapport à l'axe réel.

Le passage du point z au point

$$\omega = \frac{1}{\bar{z}}$$

est appelé *inversion* ou *symétrie par rapport à la circonférence unité* $|z| = 1$. Ainsi, du point de vue géométrique, l'opération $w = \frac{1}{z}$ se ramène à deux symétries successives: une inversion et une symétrie par rapport à l'axe réel.

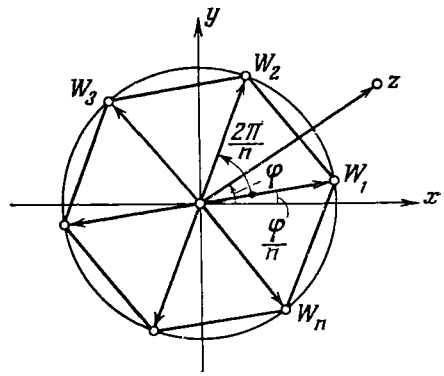

FIG. 4

Si $|z| > 1$, il faut effectuer les constructions que nous venons de décrire dans l'ordre inverse; si $|z| = 1$, le point $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$ coïncide avec z et la construction de $w = \frac{1}{z}$ se ramène à une symétrie par rapport à l'axe réel.

D après ce qui précède, le sens géométrique de l'élévation à une puissance est évident. Pour construire la racine n-ème de z, remarquons que, en vertu de la définition de la racine et de la formule (5), pour $w = \sqrt[n]{z}$ nous avons $|w|^n = |z|$, $n \arg w = \arg z$ et par suite

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg w = \frac{\arg z}{n}. \tag{6}$$

La première relation (6) montre que les modules de toutes les racines sont identiques, la deuxième que leurs arguments diffèrent d'un multiple de $\frac{2\pi}{n}$, car on peut ajouter à la valeur de $\arg z$ un multiple de 2π. Il en découle que la racine n-ème d'un nombre complexe quelconque $z \neq 0$ possède n déterminations distinctes et que ces déterminations coïncident avec les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans la circonférence $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (cf. fig. 4, où $n = 6$)

§ 2. FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notions de base de la théorie des fonctions d'une variable complexe: les notions de fonction d'une variable complexe, de limite et de dérivée d'une fonction complexe et, enfin, la notion de fonction analytique. Ici, la place centrale est occupée par le théorème du n° 5, qui établit les conditions de différentiabilité des fonctions d'une variable complexe. En général, ces conditions sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann*; toutefois, bien avant Cauchy et Riemann, elles avaient été utilisées de façon systématique par d'Alembert et Euler (cf. l'introduction de ce chapitre).

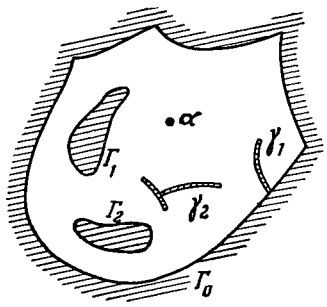

FIG. 5

3. Notions géométriques. On appelle *domaine* du plan complexe un ensemble de points D possédant les propriétés suivantes: 1) avec chaque point de D un cercle suffisamment petit de centre en ce point lui appartient (*ensemble ouvert*); 2) deux points quelconques de D peuvent être reliés par une ligne polygonale formée de points de D (*connexité*).

Les voisinages des points du plan complexe sont des exemples simples de domaine. Par *ε-voisinage* d'un point a on comprend le cercle ouvert de rayon ε et de centre en ce point, c'est-à-dire l'ensemble des points z qui vérifient l'inégalité

$$|z - a| < \varepsilon.$$

On appelle *point frontière* d'un domaine D un point qui n'appartient pas à D et tel que tout voisinage de ce point contient des points du domaine. L'ensemble des points frontières d'un domaine D est appelé *frontière* du domaine. Le domaine $\overline{D}$ avec sa frontière est noté $\overline{D}$ et est appelé *domaine fermé*.

Nous supposerons que la frontière des domaines que nous aurons à considérer est composée d'un nombre fini de courbes fermées, de coupures et de points (nous ne donnons pas la définition de ces notions; cf. fig. 5, où la frontière du domaine est composée de trois courbes fermées Γ_0, Γ_1, Γ_2, de deux coupures γ_1, γ_2 et d'un point α). Les courbes et les coupures faisant partie de la frontière seront toujours supposées *une fois continûment différentiables par morceau*, c'est-à-dire composées d'un nombre fini d'arcs une fois continûment différentiables (arcs à tangente variant continûment). Dans le cas d'un domaine borné D, le nombre des parties connexes formant sa frontière est

appelé *ordre de connexion* (*) du domaine (on représente sur la fig. 5 un domaine d'ordre de connexion 5 ; Γ_0 et γ_1 forment une partie connexe de la frontière). En particulier, si la frontière d'un domaine D est connexe (formée d'une partie connexe), alors D est appelé *domaine simplement connexe.*

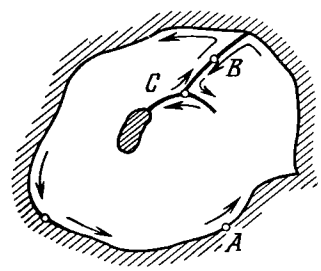

FIG. 6

Soient D un domaine simplement connexe et Γ sa frontière. Choisissons sur Γ un point quelconque et en partant de ce point décrivons Γ dans le sens positif. On appelle *sens positif de parcours* de la frontière d'un domaine un sens tel que pendant le parcours le domaine reste constamment à gauche. En outre, certains points de Γ ne seront parcourus qu'une fois (par exemple le point A sur la fig. 6), d'autres plusieurs fois (par exemple, le point B deux fois, le point C trois fois). Les points du premier type sont dits *simples*, ceux du second type *points multiples* du contour Γ, de plus le nombre de fois que le point est parcouru est l'*ordre de multiplicité* du point (B est un point double, C un point triple). La notion d'ordre de multiplicité d'un point frontière s'étend aussi aux domaines multiplement connexes.

4. Fonctions d'une variable complexe. On dit que sur un ensemble M de points du plan des z est donnée une *fonction*

$$w = f(z) \tag{1}$$

si la loi d'après laquelle chaque point z de M est mis en correspondance avec un point déterminé ou un ensemble de points w est donnée. Dans le premier cas la fonction $w = f(z)$ est dite *uniforme*, dans le second *multiforme*. L'ensemble M est appelé *ensemble de définition* de la fonction $f(z)$ et l'ensemble N de toutes les valeurs w que $f(z)$ prend sur M son *ensemble de variation.* Dans la suite, le cas où les ensembles M et N sont des domaines sera le plus important (cf. théorème de la page 20).

Si l'on pose $z = x + iy$ et $w = u + iv$, alors la donnée d'une fonction de la variable complexe $w = f(z)$ est équivalente à la donnée de deux fonctions de deux variables réelles :

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y). \tag{2}$$

Convenons de porter les valeurs z dans un plan complexe et les valeurs w dans un autre. On peut alors représenter géométriquement

(*) Voir n° 24 pour l'extension de la définition de l'ordre de connexion à un domaine non borné (le domaine D est dit *borné* s'il appartient à un cercle $|z| < R$).

une fonction de la variable complexe comme une *transformation* de l'ensemble M du plan des z sur l'ensemble N du plan des w. Si la fonction $w = f(z)$ est uniforme sur l'ensemble M et si de plus à tout couple de points distincts de M correspondent des points distincts de N, alors une telle transformation est dite *biunivoque* ou *univalente* dans M.

Soit donnée une fonction $w = f(z)$ qui transforme un ensemble M sur un ensemble N. La fonction $z = \varphi(w)$ qui fait correspondre

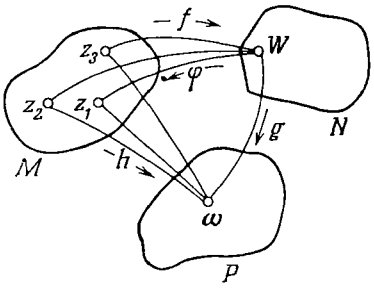

FIG. 7

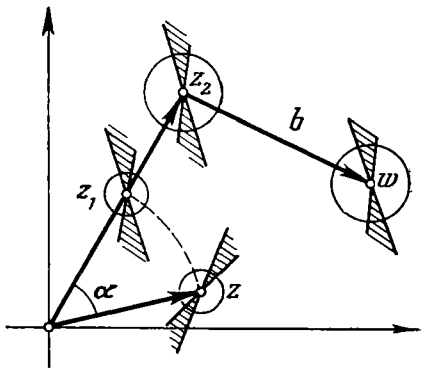

FIG. 8

à chaque point w de N l'ensemble de tous les points z que la fonction $w = f(z)$ transforme sur le point w, est appelée fonction *inverse* de $w = f(z)$ (fig. 7). Il est clair que la transformation $w = f(z)$ est biunivoque si, et seulement si, les deux fonctions f et φ sont uniformes.

Soient $w = f(z)$ une fonction qui transforme l'ensemble M sur N et $\omega = g(w)$ une fonction qui transforme l'ensemble N sur P. La fonction

$$\omega = h(z) = g[f(z)], \tag{3}$$

qui transforme M sur P, est appelée *fonction composée* de f et g et la transformation correspondante h *superposition* des transformations f et g (fig. 7). En particulier, si la transformation $w = f(z)$ est biunivoque et si la fonction $z = \varphi(w)$ est la fonction inverse de f, alors

$$\varphi[f(z)] = z. \tag{4}$$

Exemple. La *fonction linéaire* est déterminée dans tout le plan des z par la relation

$$w = az + b, \tag{5}$$

où a et b sont des constantes complexes quelconques. Posons $k = |a|$, $\alpha = \operatorname{Arg} a$, c'est-à-dire $a = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, et mettons la fonction (5) sous

la forme d'une fonction composée des fonctions :

a) $z_1 = (\cos \alpha + i \sin \alpha)\, z$;
b) $z_2 = k z_1$;
c) $w = z_2 + b$.

Tenant compte du sens géométrique de la multiplication (n° 2) nous voyons que les transformations a) et b) se ramènent respectivement à une rotation du plan des z d'angle α et à une homothétie du plan des z_1 de coefficient k. La transformation c) représente géométriquement une translation du plan des z_2 de vecteur constant b.

La transformation linéaire (5) est la superposition des transformations qui viennent d'être décrites (fig. 8). Il en découle que la transformation (5) est biunivoque dans tout le plan et qu'elle transforme les droites en droites (en outre, les angles formés par deux droites sont conservés) et les circonférences en circonférences.

5. Différentiabilité et analyticité. Soit $w = f(z)$ une fonction définie et uniforme dans un voisinage d'un point $z_0 = x_0 + iy_0$, sauf peut-être au point z_0.

Nous disons que la *limite de la fonction* $f(z)$, *lorsque* $z \to z_0$ (que l'on note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$), existe si les limites $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$ existent ; dans ce cas, nous posons

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + i v_0 = w_0. \tag{1}$$

Vu que notre définition se ramène à la définition usuelle de la limite des fonctions réelles, les propriétés fondamentales du passage à la limite sont conservées pour les fonctions d'une variable complexe. En particulier, nous avons :

$$\left.\begin{aligned} \lim (f \pm g) = \lim f \pm \lim g;\ \lim (fg) = \lim f \cdot \lim g, \\ \lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}\ (\lim g \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

La définition des limites peut encore être énoncée au moyen de la notion de voisinage : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous les points du δ-voisinage de z_0 (sauf peut-être le point z_0) les points correspondants w appartiennent au ε-voisinage de w_0, en d'autres termes, si des inégalités

$$0 < |z - z_0| < \delta \tag{3}$$

il découle que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \tag{4}$$

Soulignons que, d'après notre définition, la fonction $f(z)$ tend vers sa limite *indépendamment de la manière dont le point z tend vers* z_0. En d'autres termes, si la limite existe, alors, lorsque z tend vers z_0 suivant une loi quelconque (par exemple suivant une courbe ou une suite quelconques), $f(z)$ tend vers cette limite.

La fonction $f(z)$ est dite *continue au point* z_0 si elle est définie dans un voisinage de z_0 (y compris en z_0) et

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{5}$$

Il est clair que pour la continuité de $f(z)$ au point z_0 il faut et il suffit que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ soient continues au point (x_0, y_0).

La fonction $f(z)$ est dite *continue dans un domaine D* si elle est continue en chaque point de ce domaine. Notons sans le démontrer que, pour les fonctions continues dans les domaines fermés ainsi que sur les courbes fermées ou les arcs des courbes comprenant leurs extrémités, les propriétés usuelles des fonctions continues sur les intervalles fermés restent vraies. Notamment, chaque fonction $w=f(z)$ continue sur un ensemble fermé $\overline{A}$:

1) *est bornée sur cet ensemble*, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que pour tout z de $\overline{A}$

$$| f(z) | \leqslant M; \tag{6}$$

2) *atteint sa plus grande et sa plus petite valeur en module*, c'est-à-dire qu'il existe dans $\overline{A}$ des points z' et z'' tels que pour tout z de $\overline{A}$

$$| f(z') | \geqslant | f(z) |, \quad | f(z'') | \leqslant | f(z) |; \tag{7}$$

3) *est uniformément continue*, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ ne dépendant que de ε et tel que pour tout couple de points z_1 et z_2 de $\overline{A}$, vérifiant l'inégalité $| z_1 - z_2 | < \delta$, l'inégalité

$$| f(z_1) - f(z_2) | < \varepsilon \tag{8}$$

est vraie.

Notons encore, sans la démontrer (*), une proposition que nous utiliserons souvent dans la suite.

4) Théorème. *Si une fonction* $w = f(z)$ *est continue dans un domaine D et réalise une transformation biunivoque de ce domaine sur un ensemble* Δ *du plan des w, alors* Δ *est un domaine et la fonction inverse* $z = \varphi(w)$ *est continue dans* Δ.

Soit $f(z)$ une fonction définie dans un voisinage du point z. Nous dirons que $f(z)$ est *différentiable* au point z si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \tag{9}$$

existe. Cette limite est appelée *dérivée* de la fonction $f(z)$ au point z.

(*) La démonstration de cette proposition se fait à l'aide des méthodes topologiques.

Les conditions de différentiabilité d'une fonction $f(z)$ au moyen des fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont données par le théorème suivant :

Théorème. *Soit* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *une fonction définie dans un voisinage d'un point* z, *de plus en ce point les fonctions* $u(x, y)$ *et* $v(x, y)$ *sont différentiables. Alors, pour que la fonction de la variable complexe* $f(z)$ *soit différentiable au point* z, *il faut et il suffit que l'on ait, en ce point, les relations*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{10}$$

(conditions de *Cauchy-Riemann*) (*).

a) Nécessité. Supposons que

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe.

Tenons compte de la remarque sur l'indépendance de la limite de la manière dont la variable tend vers celle-ci. Supposons d'abord que le point $z + h$ tend vers le point z suivant une droite parallèle à l'axe réel, c'est-à-dire $h = s \to 0$, en restant réel. Nous avons alors :

$$f'(z) = \lim_{s \to 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + i \lim_{s \to 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{11}$$

Calculons maintenant la même limite en supposant que le point $z + h$ tend vers le point z suivant une droite parallèle à l'axe imaginaire, c'est-à-dire $h = it$ et $t \to 0$, en restant réel. Nous avons

$$f'(z) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + i \lim_{t \to 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{it} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{12}$$

Comparant les expressions (11) et (12) de $f'(z)$, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où découlent les relations (10) (cf. la définition de l'égalité des nombres complexes du n° 1).

(*) Les équations (10) ont été obtenues par d'Alembert (1752) et Euler (1755) en relation avec des problèmes d'hydrodynamique. En 1777 Euler a retrouvé ces équations en étudiant les intégrales de fonctions d'une variable complexe.

b) Suffisance. D'après la définition de la différentielle d'une fonction de deux variables réelles, on a les égalités

$$\left.\begin{aligned} u(x+s, y+t)-u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+\alpha|h|, \\ v(x+s, y+t)-v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t+\beta|h|, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

où α et β tendent vers 0 avec $h = s + it$. Alors l'accroissement de la fonction $f(z)$ prend la forme

$$f(z+h)-f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t\right)+\eta|h|,$$

où $\eta = \alpha + i\beta$. En utilisant les égalités (10), cet accroissement peut être écrit sous la forme

$$f(z+h)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(s+it)+\eta|h|=Ah+\eta|h|, \tag{14}$$

où $A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ est un nombre bien défini, indépendant de h, et η tend vers 0 avec h. Divisant par h la relation (14) nous voyons que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe et est égale à A. Le théorème est démontré.

Tenant compte des conditions de Cauchy-Riemann, la dérivée de la fonction $f(z)$ peut être écrite sous les formes équivalentes suivantes :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{15}$$

Puisque les propriétés ordinaires des opérations algébriques et du passage à la limite sont conservées lorsqu'on passe aux fonctions d'une variable complexe, les lois usuelles de différentiation le sont aussi ; leur établissement n'est basé que sur les propriétés mentionnées

$$\left.\begin{aligned} &(f+g)'=f'+g', \quad (fg)'=f'g+g'f, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}, \\ &\{f[g(z)]\}'=f'[g(z)]\,g'(z), \qquad f'(z)=\frac{1}{\varphi'(w)} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(dans la dernière formule f et φ désignent des fonctions inverses, de plus on suppose qu'elles réalisent des transformations univalentes respectivement des voisinages des points z et w).

Une fonction $f(z)$ différentiable en chaque point d'un domaine D est dite *analytique* (ou encore *régulière*, *monogène*) dans ce domaine. Soulignons que notre définition d'une fonction analytique suppose que cette fonction est *uniforme* dans le domaine D, car les notions de limite et de dérivée n'ont été définies que pour les fonctions uniformes.

Nous généraliserons la notion d'analyticité (n° 25) en l'étendant aux fonctions multiformes, mais pour le moment par fonctions analytiques nous entendons toujours des fonctions uniformes.

Pour terminer donnons une généralisation des conditions de Cauchy-Riemann. Soit donnée une fonction $f(z)$ analytique au point z; donnons-nous des directions arbitraires caractérisées par les vecteurs unités s^0 et n^0 (c'est-à-dire des nombres complexes de module unité) telles que l'on passe de s^0 à n^0 par une rotation d'angle droit dans le sens positif (c'est-à-dire $n^0 = is^0$). Tenant compte de ce que le calcul de la dérivée est indépendant de la direction, nous obtenons

$$f'(z) = \frac{1}{s^0}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + i\frac{\partial v}{\partial s}\right) = \frac{1}{n^0}\left(\frac{\partial u}{\partial n} + i\frac{\partial v}{\partial n}\right), \tag{17}$$

en prenant une première fois la dérivée dans la direction s^0 et une deuxième fois dans la direction n^0 ($\frac{\partial u}{\partial s}$, . . ., $\frac{\partial v}{\partial n}$ sont les dérivées de fonctions de deux variables réelles suivant les directions correspondantes); l'établissement des égalités (17) est analogue à celui des formules (11) et (12). Substituant $n^0 = is^0$ et comparant dans les relations (17) les parties réelles et imaginaires, nous obtenons:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{18}$$

Ces équations sont précisément les conditions généralisées de Cauchy-Riemann que nous voulions établir. Faisant en particulier $s^0 = 1$, $n^0 = i$. nous retrouvons les conditions (10).

Donnons encore les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires (r, φ). Soient s^0 le vecteur unité de la tangente à la circonférence $|z| = r$ orienté dans le sens positif et n^0 le vecteur de la normale intérieure à la circonférence; alors

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{r\,\partial\varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r},$$

et les conditions (18) s'écrivent sous la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \tag{19}$$

§ 3. FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Ce paragraphe est consacré aux fonctions élémentaires d'une variable complexe ainsi qu'à leur interprétation géométrique ou transformations qu'elles réalisent. Ces fonctions sont un prolongement naturel des fonctions élémentaires usuelles en analyse au domaine complexe. Certes, par un tel prolongement ces fonctions s'enrichissent parfois de nouvelles propriétés, par exemple la fonction exponentielle d'une variable complexe e^z devient périodique, les fonctions

sin z et cos z cessent d'être bornées, le logarithme des nombres négatifs (et, en général, de tout nombre complexe non nul) prend un sens, etc.

L'étude des fonctions multiformes dans le domaine complexe est d'un intérêt particulier car seule une telle étude permet d'expliquer la nature de leur multiformité. Ici nous nous limiterons à certains exemples de fonctions multiformes et sur ces exemples nous montrerons la possibilité de dégager des branches uniformes qui s'avèrent des fonctions analytiques. Ce n'est que plus tard (n° 25) que nous introduirons la notion générale de fonction analytique multiforme et alors nous pourrons considérer non seulement les branches mais aussi ces fonctions comme analytiques.

La théorie des fonctions élémentaires d'une variable complexe fut pour l'essentiel créée par *Leonhard Euler* dans les années 40 du XVIII^{e} siècle. Il est à noter que par ses travaux Euler a de beaucoup devancé son époque ; par exemple sa théorie des logarithmes ne fut reconnue qu'avec beaucoup de difficultés et non d'emblée.

Au numéro 7 nous accorderons une attention particulière à la fonction rationnelle $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, vu son rôle important dans les problèmes pratiques (cf. les deux chapitres suivants). L'application heureuse de cette fonction est associée au nom de *Nikolaï Joukovski* (1847-1921), et c'est pour cette raison que nous l'appelons *fonction de Joukovski*.

6. Les fonctions $w = z^n$ et $w = \sqrt[n]{z}$, où n est un entier positif quelconque, ont déjà été définies (n° 1) pour tous les z complexes. La fonction

$$w = z^n \tag{1}$$

est uniforme. Si on introduit dans les plans des z et des w les coordonnées polaires, en posant $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors la relation (1) peut s'écrire sous la forme des deux égalités :

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi \tag{2}$$

reliant des quantités réelles.

On voit de (2) que la transformation réalisée par la fonction $w = z^n$ revient à faire subir à chaque vecteur $z \neq 0$ une rotation d'angle $(n - 1)\arg z$ et une dilatation de $|z|^{n-1}$ fois. Il est clair ensuite que les points z_1 et z_2 de modules égaux et d'arguments différant d'un multiple entier de $\frac{2\pi}{n}$, et seulement de tels points, deviennent un point par la transformation (1). Par conséquent, pour que la transformation $w = z^n$ soit univalente dans un domaine D, il faut et il suffit que D ne contienne aucun couple de points z_1 et z_2 liés entre

eux par les relations

$$|z_1| = |z_2|; \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \neq 0, \text{ entier}). \tag{3}$$

Par exemple les secteurs

$$k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

qui par la transformation $w = z^n$ se transforment sur le plan des w duquel on a retranché le demi-axe positif satisfont à cette condition.

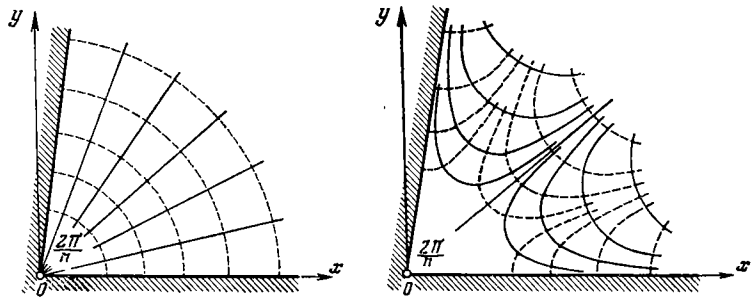

FIG. 9

De plus, tous les rayons issus du point $z = 0$ se transforment en des rayons issus du point $w = 0$ (n'ayant subi qu'une rotation) et tous les arcs de circonférence de centre $z = 0$ en des arcs de circonférence de centre $w = 0$ (en général de rayons différents). Sur la fig. 9*a*, on a représenté dans un de ces secteurs du plan des z l'image réciproque du réseau de coordonnées polaires du plan des w.

De la formule

$$w = u + iv = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \tag{5}$$

équivalente à (1), il découle qu'aux droites $u = u_0$ et $v = v_0$ du plan des z correspondent les courbes d'équations polaires

$$r = \sqrt[n]{\frac{u_0}{\cos n\varphi}}; \quad r = \sqrt[n]{\frac{v_0}{\sin n\varphi}}.$$

Elles sont représentées sur la fig. 9*b* (les premières en pointillé, les deuxièmes en trait continu) ; pour $n = 2$ ce sont des hyperboles ordinaires.

Notons enfin que la fonction $w = z^n$ est analytique dans tout le plan, car pour tout z la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{nz^{n-1}h + h^2(\ldots)}{h} = nz^{n-1} \tag{6}$$

existe.

La fonction

$$w = \sqrt[n]{z}, \tag{7}$$

inverse de la fonction $z = w^n$, est à n déterminations pour $z \neq 0$. Comme il découle du n° 2, une détermination quelconque de la racine $\sqrt[n]{z}$ se définit par la détermination de l'argument choisie au point z. Désignons par $\arg z_0$ l'une des déterminations de l'argument au point $z_0 \neq 0$ et supposons que le point z décrive, à partir de z_0, une

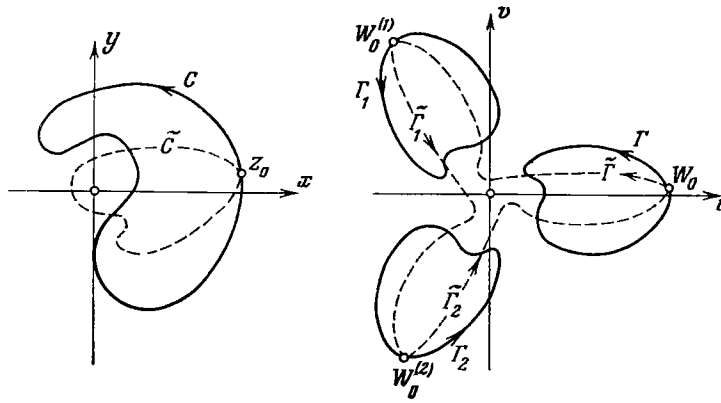

FIG. 10

courbe continue C qui ne passe pas par l'origine des coordonnées. Par $\arg z$ nous désignons la détermination de l'argument qui varie alors d'une façon continue à partir de la détermination $\arg z_0$ (*). En vertu de la continuité de $\arg z$ et $|z|$, la valeur de $w = \sqrt[n]{z}$, qui est entièrement définie par le choix de l'argument, varie aussi d'une façon continue.

Supposons que la courbe C soit fermée et ne contienne pas à son intérieur le point $z = 0$. Alors, lorsque le point z décrit C en entier, le point $w = \sqrt[n]{z}$, où $\sqrt[n]{z}$ est la détermination de la racine choisie par nous, décrit une courbe fermée Γ, en revenant à sa position initiale puisque $\arg z$ reprend sa détermination initiale $\arg z_0$. Les déterminations de la racine définies par d'autres choix de la détermination initiale $\arg z_0$ (se distinguant de la précédente par un multiple entier de 2π), lorsqu'on décrit C en entier, évidemment décrivent aussi des courbes fermées Γ_k ne se distinguant de la courbe Γ que par une rotation d'angle $\frac{2\pi k}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ (fig. 10, courbes en trait plein).

(*) Pour z_0, C et $\arg z_0$ fixes il est clair que cette détermination est définie d'une manière unique.

Soit à présent $\widetilde{C}$ une courbe fermée sans point multiple contenant le point $z = 0$ à son intérieur et soit z_0 un point de la courbe $\widetilde{C}$. Alors lorsqu'on décrit $\widetilde{C}$ en entier à partir de z_0 dans le sens positif, le point correspondant $w = \sqrt[n]{z}$ (la détermination de la racine se définit de la même façon que ci-dessus) ne revient pas à sa position initiale et occupe une nouvelle position $w_0^{(1)}$, où $w_0^{(1)} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + \right.$ $\left. + i \sin \frac{2\pi}{n}\right) w_0$ est une détermination $\sqrt[n]{z_0}$ différente de w_0. En effet, arg z obtient un accroissement de 2π lorsqu'on décrit la courbe $\widetilde{C}$. Le point $w = \sqrt[n]{z}$ ne revient à sa position initiale qu'après avoir décrit n fois la courbe $\widetilde{C}$ (cf. fig. 10, courbe en pointillé).

Il en découle que, dans tout domaine D ne contenant aucune courbe fermée enveloppant le point $z = 0$, on peut définir n fonctions *continues* et *uniformes* dont chacune coïncide avec une détermination $\sqrt[n]{z}$. Ces n fonctions sont les *branches* de la fonction multiforme $w = \sqrt[n]{z}$; leurs déterminations en chaque point fixe se distinguent les unes des autres par le facteur $\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$. Chacune de ces branches réalise évidemment une transformation univalente du domaine D et, pour cette raison, en chaque point de ce domaine le théorème de la dérivée d'une fonction inverse (n° 5) est applicable, d'après lequel la dérivée

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{z}}{z}$$

est bien définie, et, si on convient d'écrire $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$,

$$(z^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}. \tag{8}$$

Donc, une branche quelconque ainsi construite est une fonction analytique dans le domaine D.

Dans un domaine D du type considéré la fonction à une infinité de déterminations Arg z se compose d'un ensemble infini de branches continues et uniformes. Chacune de ces branches sera notée arg z et on indiquera chaque fois comment on choisit cette branche.

Si le domaine D contient au moins une courbe fermée décrite autour du point $z = 0$, alors dans un pareil domaine on ne peut séparer les branches de la fonction $\sqrt[n]{z}$. Notamment, si au voisinage d'un point $z \neq 0$ de D nous choisissons une branche quelconque (pour un voisinage suffisamment petit du point $z \neq 0$ ceci est possible), alors en se déplaçant sur la courbe décrite autour de $z = 0$ nous aboutissons à une autre branche. Par conséquent, dans un pareil domaine D nous ne pouvons pas comme précédemment considérer la fonction

$\sqrt[n]{z}$ comme un ensemble de différentes fonctions analytiques (uniformes). Le point $z = 0$, dans tout voisinage duquel on ne peut séparer n branches distinctes de la fonction $\sqrt[n]{z}$ (les branches de $\sqrt[n]{z}$ semblent s'unir en ce point) est appelé, pour cette fonction, un *point de branchement* ou *de ramification*, ou encore un *point critique algébrique*.

En tant qu'exemple de domaine D du premier type on peut considérer le plan des z coupé suivant une courbe L issue du point $z = 0$ et s'éloignant à l'infini. Si L coïncide avec le demi-axe positif, alors les branches de la fonction $w = \sqrt[n]{z}$ transforment le domaine D dans les secteurs

$$k\frac{2\pi}{n} < \arg w < (k+1)\frac{2\pi}{n}.$$

Ces transformations sont les inverses de la transformation ci-dessus réalisée par la fonction $w = z^n$.

Le domaine D est forcément un domaine du second type s'il contient à son intérieur le point $z = 0$.

7. La fonction de Joukovski $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est définie et uniforme pour tous les $z \neq 0$; elle est évidemment analytique pour ces mêmes z. Trouvons les domaines d'univalence de la transformation

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Pour cela supposons que z_1 et z_2 se transforment en un même point w; nous avons alors $z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$, d'où $(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$ et, par conséquent,

$$z_1 = z_2 \text{ et } z_1 z_2 = 1. \tag{2}$$

Ainsi, pour que la transformation (1) soit univalente dans un domaine D, il faut et il suffit que D ne contienne aucun couple de points z_1 et z_2 vérifiant la relation $z_1 z_2 = 1$.

Par exemple, l'intérieur du cercle unité $|z| < 1$ ou son extérieur $|z| > 1$ vérifient cette condition. Pour étudier la transformation (1) posons $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = u + iv$ et séparons les parties réelles et imaginaires. La transformation (1) s'écrit alors sous la forme

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi, \tag{3}$$

et nous voyons que chaque circonférence $|z| = r_0 < 1$ se transforme en la courbe

$$u = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos\varphi, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right)\sin\varphi, \tag{4}$$

c'est-à-dire en une ellipse de demi-axes $a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right)$ décrite dans le sens négatif (*). Pour $r_0 \to 1$ cette ellipse se contracte pour coïncider avec le segment $[-1, 1]$ de l'axe des u ; pour $r_0 \to 0$ cette ellipse s'éloigne à l'infini. Par conséquent, la fonction (1) transforme l'intérieur du cercle $|z| < 1$ dans l'extérieur du segment $[-1, +1]$ (fig. 11). Tous les points intérieurs de ce

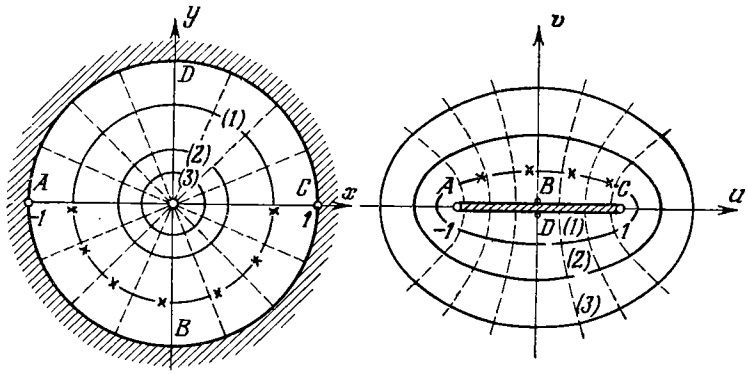

FIG. 11

segment sont des points doubles (n° 3) et on peut le considérer comme composé de deux bords : la fonction (1) transforme la demi-circonférence supérieure sur le bord inférieur et la demi-circonférence inférieure sur le bord supérieur.

Notons encore que les rayons $\arg z = \varphi_0$, $0 < r < 1$, ont pour images, par la transformation (1), les branches des hyperboles

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1 \tag{5}$$

(fig. 11). Les foyers de ces hyperboles ainsi que des ellipses (4) coïncident avec les extrémités du segment $[-1, +1]$.

Il découle aussi des relations (3) que les circonférences $|z| = r_0 > 1$ se transforment en les ellipses de demi-axes $a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$. Ces ellipses coïncident avec les ellipses images des circonférences $|z| = r_0 < 1$, mais elles sont décrites dans le sens positif. Par conséquent, (1) transforme aussi l'extérieur du cercle $|z| > 1$ sur l'extérieur du segment $[-1, +1]$ de l'axe des u, de plus la demi-circonférence supérieure a pour image le bord supérieur et la demi-circonférence inférieure le bord inférieur.

(*) On l'indique par le signe moins dans la deuxième équation (4).

La fonction inverse de (1)

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \tag{6}$$

est à deux déterminations, à chaque point w elle associe deux points z_1 et z_2 vérifiant la condition $z_1 z_2 = 1$ (cf. formule (2)). Cette multiformité est conditionnée par la présence de la racine carrée dans la formule (6). Si l'on pose $z_1 = w + \sqrt{w^2 - 1}$, alors l'autre détermination de z correspondant à w est $z_2 = w - \sqrt{w^2 - 1}$ et on voit directement que $z_1 z_2 = 1$.

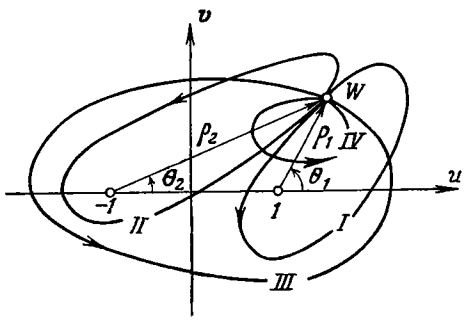

FIG. 12

Désignons par ρ_1, θ_1 et respectivement par ρ_2, θ_2 les modules et les arguments des nombres complexes $w - 1$ et $w + 1$ (fig. 12). Alors le module et l'argument de la racine dans la formule (6) sont égaux à $\sqrt{\rho_1 \rho_2}$ et $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ (cf. n° 2, règle d'extraction d'une racine). Il en découle que lorsque le point w décrit une courbe fermée du type I ou II (fig. 12) autour de l'un des points $+1$ ou -1, la racine change de signe. En effet, pour un tel parcours θ_1 (ou θ_2) varie de 2π et θ_2 (ou θ_1) ne varie pas ; par conséquent, l'argument de la racine varie de π, tandis que le module de la racine pour un tel parcours suivant un contour fermé quelconque reprend sa valeur initiale.

Si maintenant le point w décrit une courbe fermée du type III (fig. 12) contenant à son intérieur les deux points ± 1, alors la racine ne change pas de signe puisque dans ce cas aussi bien θ_1 que θ_2 varient de 2π et, par conséquent, l'argument de la racine $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ varie de 2π. La racine ne change pas de signe non plus dans le cas où w décrit une courbe fermée du type IV (fig. 12) ne contenant à son intérieur aucun des points ± 1 puisque dans ce cas aussi bien θ_1 que θ_2 ne subissent pas de variation.

Ainsi, pour tout domaine Δ dans lequel on ne peut tracer une courbe fermée autour de l'un des points $+1$ ou -1, la fonction (6) permet de séparer deux *branches* uniformes. Ces branches, en chaque point w fixe, diffèrent par le signe de la racine dans la formule (6) et conduisent à deux valeurs de z vérifiant la condition $z_1 z_2 = 1$. Chacune de ces deux branches réalise une transformation univalente et, d'après le théorème de la dérivée d'une fonction inverse, est analytique.

Si dans un domaine Δ on peut décrire un contour fermé autour du point $+1$ (sans tourner autour du point -1) ou -1 (sans tourner autour du point $+1$), par exemple, si Δ contient à son intérieur au moins l'un de ces points, alors dans un tel domaine les branches de la fonction (6) ne peuvent être séparées. Les points $w = \pm 1$, en lesquels les deux branches de la fonction (6) semblent s'unir, sont appelés *points de branchement* ou *de ramification* de cette fonction.

Comme exemple de domaine Δ du premier type on peut considérer le plan des w coupé suivant une courbe Λ réunissant les points -1 et $+1$. Si Λ est le segment $[-1, 1]$ de l'axe réel, alors les deux branches de la fonction (6) transforment Δ respectivement dans l'intérieur et l'extérieur du cercle unité. Ces transformations sont les inverses de celles considérées plus haut (fig. 11).

8. **Fonctions exponentielle et logarithmique.** Pour tout $z = x + iy$ complexe nous définissons (*) la *fonction exponentielle* e^z par

(*) Nous recommandons au lecteur qui trouvera notre définition de la fonction exponentielle trop formelle de la définir, par analogie avec la même fonction de la variable réelle, à l'aide de la relation

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \qquad (*)$$

Il est alors nécessaire de démontrer l'existence de la limite de la suite des nombres complexes $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ pour tout z et de calculer cette limite. Le procédé le plus facile est le suivant: d'après les règles d'élévation à une puissance on a

$$|z_n| = \left|1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right|^n = \left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right\}^{\frac{n}{2}}$$

et $\arg z_n = n \operatorname{arctg} \dfrac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$; en négligeant dans la première expression l'infiniment petit d'ordre supérieur $\frac{x^2+y^2}{n^2}$ et en remplaçant dans la seconde le petit angle par sa tangente $\dfrac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$, nous voyons que les limites

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e^x$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = y$$

existent. Mais de l'existence de ces limites découle l'existence de la limite (*); en outre nous avons $|e^z| = e^x$ et $\arg e^z = y$, ce qui coïncide avec la formule (1).

la relation

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{1}$$

Démontrons que: 1) pour les $z = x$ réels notre définition coïncide avec la définition ordinaire ; 2) la fonction que nous venons de définir est partout analytique; 3) la formule connue de dérivation est conservée:

$$(e^z)' = e^z; \tag{2}$$

4) la propriété fondamentale de la fonction exponentielle (*théorème d'addition*) est conservée:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \tag{3}$$

La première propriété découle immédiatement de la formule (1) si l'on fait $y = 0$, la deuxième du théorème du n° 5 puisqu'en chaque point du plan les conditions de Cauchy-Riemann

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) &= \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y); \\ \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) &= -\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) \end{aligned}\right\}$$

sont vérifiées. Pour la démonstration de la propriété 3), tenant compte de l'indépendance de la dérivée de la direction, calculons e^z suivant la direction de l'axe des x. Il vient

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x} e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z,$$

ce qui donne bien la formule (2).

Enfin pour démontrer la propriété 4) posons $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$; alors

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)\, e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) =$$
$$= e^{x_1 + x_2} \{ \cos (y_1 + y_2) + i \sin (y_1 + y_2)\} = e^{z_1 + z_2},$$

ce qu'il fallait démontrer (en plus de la définition (1) nous avons utilisé la règle de la multiplication des nombres complexes et les formules connues de trigonométrie).

Remarquons que la fonction exponentielle ne s'annule pour aucune valeur complexe $z = x + iy$. En effet, $|e^z| = e^x > 0$.

Faisant, en particulier, dans la relation (1) $x = 0$, $y = \varphi$ nous retrouvons la *formule* classique *d'Euler* (*)

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \tag{4}$$

(*) Euler l'a donnée dans son «Introduction à l'analyse des infiniment petits» (1748) ; des formules équivalentes à (4) firent leur apparition dans ses travaux à partir de 1740.

A l'aide de la formule d'Euler, tout nombre complexe z de module r et d'argument φ peut être mis sous la *forme exponentielle* suivante:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \tag{5}$$

En plus des propriétés 1) —4) vraies dans les domaines réel et complexe, la fonction exponentielle d'une variable complexe possède aussi une propriété spécifique: elle est *périodique* de période fondamentale purement imaginaire $2\pi i$. En effet, pour tout nombre entier k on a

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z, \tag{6}$$

puisque d'après la formule d'Euler $e^{2k\pi i} = 1$.

D'autre part, si $e^{z_1} = e^{z_2}$ et $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, alors de la définition (1) nous avons $e^{x_1} = e^{x_2}$, $\cos y_1 = \cos y_2$, $\sin y_1 = \sin y_2$, d'où il découle que $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + 2k\pi$, soit

$$z_2 - z_1 = 2k\pi i, \tag{7}$$

où k est un nombre entier.

En vertu de la périodicité, l'étude de la fonction e^z dans tout le plan se ramène à son étude dans la bande $0 \leqslant y < 2\pi$. De l'analyse qui vient d'être donnée on voit que la transformation (1) est univalente dans cette bande: la relation (7) découle de l'égalité $e^{z_1} = e^{z_2}$ et la bande $0 \leqslant y < 2\pi$ ne contient aucun couple de points vérifiant cette relation.

Introduisons dans le plan des w les coordonnées polaires en posant $w = \rho e^{i\theta}$; alors (1) s'écrit sous la forme de deux égalités

$$\rho = e^x, \quad \theta = y; \tag{8}$$

par conséquent, la transformation (1) transforme les droites $y = y_0$ en les rayons $\theta = y_0$ et les segments $x = x_0$, $0 \leqslant y < 2\pi$, en les circonférences $\rho = e^{x_0}$. La bande $0 < y < 2\pi$ se transforme dans le plan des w coupé suivant le demi-axe positif, la moitié de cette bande $0 < y < \pi$ dans le demi-plan supérieur. D'une manière générale la fonction exponentielle transforme la bande $0 < \operatorname{Im} z < h$ dans l'angle $0 < \arg w < h$ (fig. 13).

La *fonction logarithmique* se définit comme la fonction inverse de la fonction exponentielle. Le nombre w est le logarithme du nombre z si $e^w = z$ et on le note

$$w = \ln z. \tag{9}$$

La propriété fondamentale des logarithmes découle de la définition: si $w_1 = \ln z_1$ et $w_2 = \ln z_2$, alors $\ln z_1 + \ln z_2$ est le logarithme du nombre $z = z_1 z_2$:

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1 z_2). \tag{10}$$

En effet, on a $z_1 = e^{w_1}$, $z_2 = e^{w_2}$; par conséquent, $z_1 z_2 = e^{w_1 + w_2}$.

En particulier, faisant dans (10) $z_1 = |z|$, $z_2 = e^{i \arg z}$, il vient

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \tag{11}$$

Dans la formule (11) le symbole arg z désigne une détermination arbitraire de l'argument de z; donc *chaque nombre complexe* $z \neq 0$ *possède un ensemble infini de logarithmes.* En d'autres termes, le logarithme est une fonction à une infinité de déterminations: sa partie réelle est définie d'une manière unique, sa partie imaginaire à un

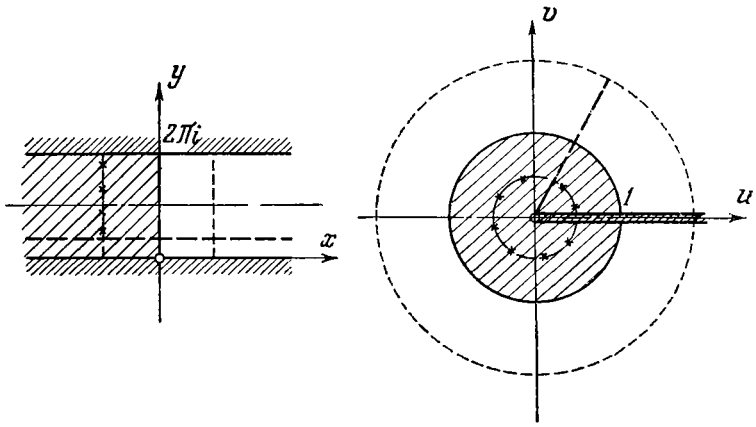

FIG. 13

terme additif multiple de 2π près (*). Pour être plus explicite nous désignerons cette fonction multiforme par le symbole spécial Ln z, de manière que

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi). \tag{12}$$

Par le symbole ln z nous désignerons une des déterminations de Ln z, et en cas de nécessité nous indiquerons la détermination choisie; de ce fait on n'a pas besoin de changer les notations dans toutes les formules précédentes contenant le symbole ln.

Considérons en détail la question de choix des déterminations de Ln z. De la même manière que pour les fonctions multiformes considérées précédemment, la détermination de Ln z est définie par la détermination de l'argument que l'on se donne au point z. Supposons que le point z, à partir du point $z_0 \neq 0$, décrive la courbe C évitant l'origine des coordonnées. Comme plus haut, par arg z nous désignons la branche uniforme et continue sur C de la fonction Arg z,

(*) C'est Euler qui est arrivé le premier à cette conception de logarithme ; il exposa ses idées dans un travail datant de 1749 intitulé « De la controverse entre Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires ».

définie par une détermination initiale fixe quelconque $\arg z_0$. Par $\ln z$ nous désignons la détermination de $\operatorname{Ln} z$ définie par l'égalité (11) pour la détermination $\arg z$ choisie ; il est évident que la fonction $\ln z$ est uniforme et continue sur C.

Supposons que la courbe C soit fermée et qu'elle ne contienne pas le point $z = 0$ à son intérieur. Lorsque z décrit C, le point $w = \ln z$

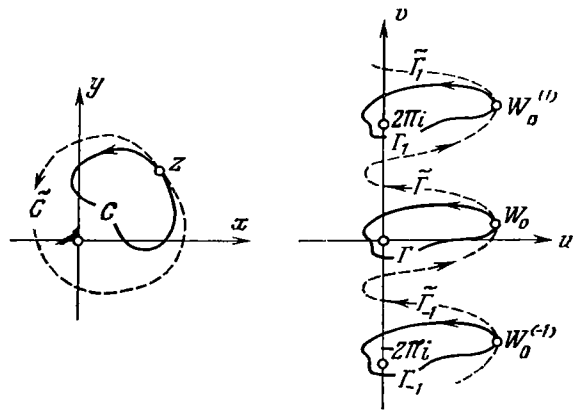

FIG. 14

décrit une courbe fermée Γ ; les autres déterminations du logarithme définies par d'autres déterminations initiales $\arg z_0$ décrivent les courbes Γ_k qui se distinguent de Γ par une translation de vecteur $2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (fig. 14, courbes en trait continu). Si à présent $\tilde{C}$ est une courbe fermée sans point multiple contenant $z = 0$ à son intérieur, alors lorsque le point z la décrit en entier dans le sens positif, le point $w = \ln z$ ne revient pas à sa position initiale et occupe une nouvelle position $w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i$ (fig. 14, courbes en pointillé).

Il en découle que, dans tout domaine D qui ne contient pas de courbes fermées entourant le point $z = 0$, on peut choisir un ensemble infini de *branches* continues et uniformes de la fonction multiforme $w = \operatorname{Ln} z$, dont les déterminations en chaque point fixe diffèrent par $2k\pi i$. Chaque branche $\ln z$ réalise une transformation biunivoque du domaine D et, par conséquent, d'après le théorème de la dérivée des fonctions inverses, elle possède une dérivée

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{13}$$

(Remarquons que la dérivée est la même pour toutes les branches.) Ainsi, toutes les branches de $\operatorname{Ln} z$ sont des fonctions analytiques.

Si un domaine D contient au moins une courbe fermée décrite autour du point $z = 0$ (par exemple si elle contient ce point à son

intérieur), alors, dans un tel domaine, on ne peut séparer les branches de la fonction Ln z. Le point $z = 0$, en lequel toutes les branches de Ln z semblent s'unir, est appelé *point de branchement* de cette fonction.

9. Les fonctions trigonométriques et hyperboliques dans le domaine complexe s'expriment simplement à l'aide de la fonction exponentielle. Pour la variable réelle x, la formule d'Euler (4) du n° 8 donne :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

d'où

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Tenant compte de ceci, pour tout z complexe, on prend *par définition*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{1}$$

Les fonctions ainsi définies : 1) pour $z = x$ réel coïncident respectivement avec le sinus et le cosinus ordinaires ; 2) sont partout analytiques ; 3) vérifient les formules ordinaires de dérivation :

$$(\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z ;$$

4) sont périodiques de période réelle 2π ; 5) $\sin z$ est une fonction impaire, $\cos z$ une fonction paire ; 6) vérifient les relations trigonométriques ordinaires :

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z, \text{ etc.}$$

Toutes ces propositions découlent de la définition (1) ; le lecteur peut s'en convaincre en faisant les calculs correspondants.

Etudions la transformation réalisée par la première de ces fonctions. Posant

$$iz = z_1, \quad e^{z_1} = z_2, \quad z_3 = -iz_2 = \frac{e^{iz}}{i}, \tag{2}$$

nous avons

$$w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right) = \sin z. \tag{3}$$

Nous voyons que notre transformation peut être considérée comme la superposition de transformations déjà étudiées. Trouvons d'abord la condition d'univalence. Supposons que le domaine D est représenté successivement par les transformations (2) sur D_1, D_2 et D_3. La première et la troisième des transformations (2) sont partout univalentes ; pour l'univalence de la deuxième il faut et il suffit que D_1 ne contienne aucun couple de points z_1' et z_1'' pour lesquels

$$z_1' - z_1'' = 2k\pi i,$$

où $k \neq 0$ est un nombre entier (cf. condition (7) du n° 8). Pour l'univalence de la transformation (3) il faut et il suffit que D_3 ne contienne aucun couple de points z_3' et z_3'' pour lesquels

$$z_3' z_3'' = 1$$

(cf. condition (2) du n° 7). Passant dans le plan des z à l'aide des formules (2) nous trouvons que pour l'univalence de la transformation $w = \sin z$ dans le domaine D il faut et il suffit que D ne contienne aucun couple de points z' et z'' pour lesquels on ait, d'une part,

$$z' - z'' = 2k\pi \quad (k \neq 0, \text{ entier}) \tag{4}$$

et, d'autre part, $e^{i(z'+z'')} = -1$ ou

$$z' + z'' = (2k+1)\pi \quad (k \text{ entier}). \tag{5}$$

Ces conditions sont vérifiées par exemple pour la demi-bande $-\pi < x < \pi$, $y > 0$. Les étapes successives de sa transformation

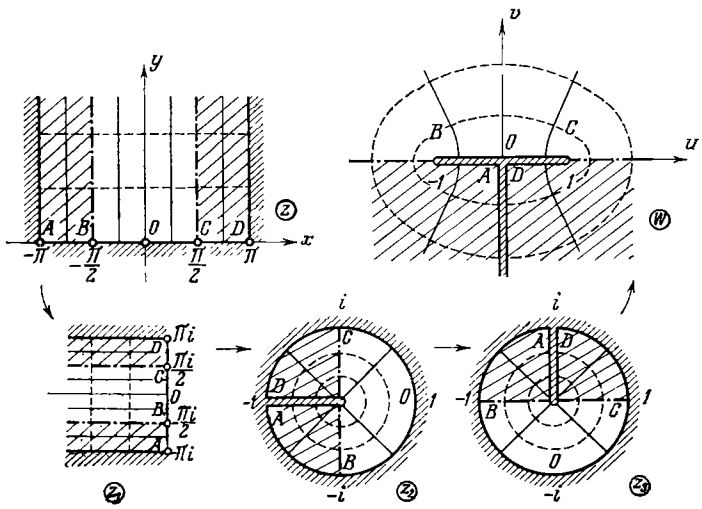

FIG. 15

sont données sur la figure 15. Les familles des rayons $x = x_0$ et des segments $y = y_0$ se transforment respectivement en les familles des hyperboles et des ellipses homofocales ; la bande deux fois plus étroite $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$, se transforme dans le demi-plan supérieur.

Nous voyons que dans le domaine complexe sin z *n'est pas borné* ; par exemple, sur les rayons $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $y > 0$, elle prend des valeurs

réelles supérieures en module à l'unité et, en général, aussi grandes que l'on veut.

Notons encore que dans la demi-bande (fermée) $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $y \geqslant 0$, la fonction $\sin z$ ne prend la valeur 0 qu'aux points $z = 0$

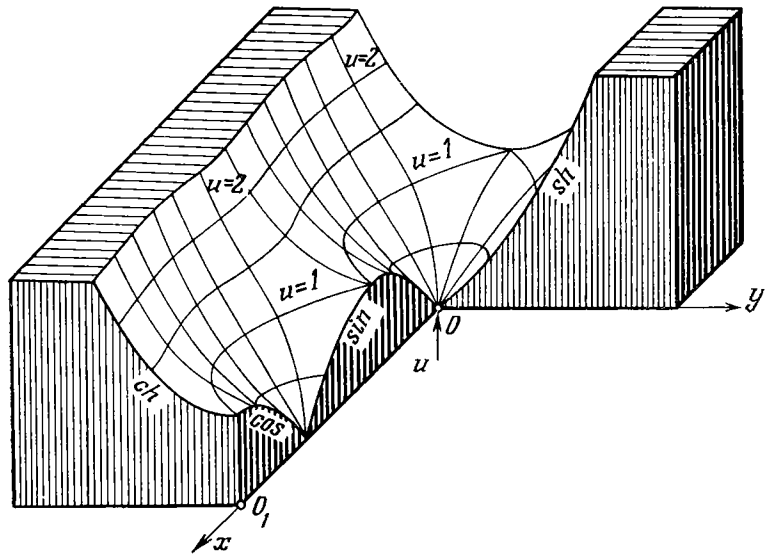

FIG. 16

et $z = \pm \pi$; vu que cette fonction est impaire et périodique, on peut en déduire qu'elle ne s'annule que sur l'axe réel aux points

$$z = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Pour être complets, nous donnons sur la fig. 16 la *surface du module* ou le « *relief* » de la fonction $\sin z$, c'est-à-dire la surface d'équation $u = |\sin z|$ dans l'espace (x, y, u) ; cette surface est périodique, de période réelle π. On y a tracé deux systèmes de courbes : ce sont les lignes de niveau de $|\sin z|$ et de $\arg \sin z$. La section de la surface suivant un plan vertical passant par l'axe des x donne le graphe de $|\sin x|$ (*). A mesure que l'on s'éloigne de cet axe, la surface se régu-

(*) Les sections de la surface suivant les plans $x = k\pi$ et $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ donnent respectivement le graphe des fonctions hyperboliques $|\mathrm{sh}\, y|$ et $|\mathrm{ch}\, y|$ que nous étudierons bientôt. Sur la fig. 16 sont représentées des parties de ces sections avec $x = 0$ et $x = \frac{3\pi}{2}$; on peut supposer que l'on a deux origines des coordonnées sur cette figure — les graphes de sin et sh se rapportent à l'origine O, ceux de cos et ch à l'origine O_1.

larise et les cotes de ses points croissent rapidement : la surface s'approche du cylindre $u = \frac{1}{2} e^{|v|}$.

En vertu de la relation

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

la transformation réalisée par fonction cos z ne diffère de celle qui vient d'être étudiée que par une translation.

Les fonctions tg z et ctg z sont *définies* par les formules

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \tag{6}$$

La fonction tg z est partout analytique, excepté aux points en lesquels cos z s'annule, c'est-à-dire, comme on le voit de l'étude précédente, partout sauf aux points $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); lorsqu'on tend vers ces points, tg z croît indéfiniment. Il en est de même de la fonction ctg z et des points $z_k = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Il découle des formules (6) que ces fonctions sont périodiques, de période π. En effet, par exemple

$$\operatorname{tg}(z+\pi) = -i\,\frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}} = -i\,\frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{-e^{iz} - e^{-iz}} = \operatorname{tg} z.$$

La transformation réalisée par la fonction $w = \operatorname{tg} z$ sera considérée plus loin (n° 33). Nous ne donnons ici que la surface du module de la fonction tangente, c'est-à-dire la surface d'équation $u = |\operatorname{tg} z|$ (fig. 17) ; cette surface est périodique, de période réelle $\frac{\pi}{2}$. Elle a des pics prononcés au-dessus des points $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ; sa section suivant un plan vertical passant par l'axe des x donne le graphe de $|\operatorname{tg} x|$ (*). A mesure que l'on s'éloigne de cet axe, la surface devient de plus en plus plane et tend vers le plan $u = 1$. On a tracé sur la surface les lignes de niveau de $|\operatorname{tg} z|$ et $\operatorname{argtg} z$.

Les *fonctions hyperboliques* dans le plan complexe sont *définies* par les égalités

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{7}$$

et

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \tag{8}$$

(*) Les sections de la surface suivant les plans $x = k\pi$ et $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) donnent respectivement les graphes des fonctions hyperboliques $|\operatorname{th} y|$ et $|\operatorname{cth} y|$ (cf. plus bas).

Elles s'expriment très simplement à l'aide des fonctions trigonométriques

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sh} z = -i \sin iz, & \operatorname{ch} z = \cos iz, \\ \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, & \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz \end{array}\right\} \tag{9}$$

et n'en diffèrent que très peu. Sur les fig. 16 et 17 sont indiquées les sections des surfaces des modules de $\sin z$ et $\operatorname{tg} z$, qui donnent les graphes des fonctions hyperboliques.

Les fonctions trigonométriques et hyperboliques s'expriment, comme nous l'avons vu, à l'aide de la fonction exponentielle, et pour

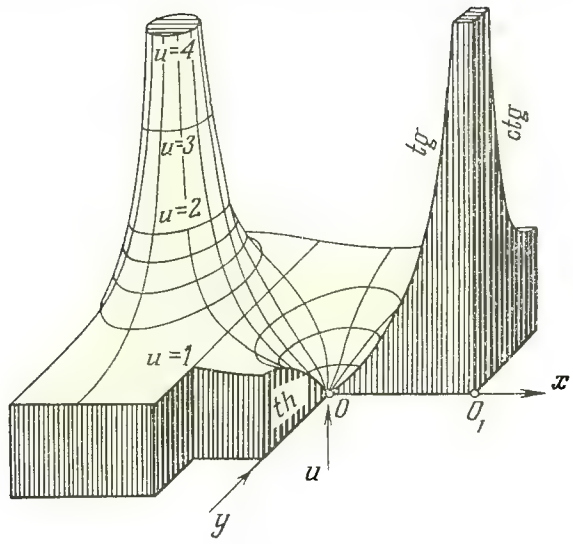

FIG. 17

cette raison les fonctions inverses, trigonométriques et hyperboliques, peuvent être exprimées à l'aide des logarithmes. Trouvons par exemple cette expression pour $w = \arccos z$. Par définition on a

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2},$$

d'où $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$; résolvant l'équation du second degré (par rapport à e^{iw}), il vient $e^{iw} = z + \sqrt{e^2 - 1}$ et

$$w = \arccos z = -i \ln (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

(on peut omettre les signes $\pm$ dans la formule qui donne la solution de l'équation du second degré si l'on comprend la racine comme une fonction à deux déterminations). Vu la relation $(z + \sqrt{z^2 - 1})(z - \sqrt{z^2 - 1}) = 1$, le changement de signe devant la racine se ramène

au changement de signe devant le logarithme et, par suite, le signe moins dans la dernière formule peut être omis :

$$w = \arccos z = i \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}) \tag{10}$$

(d'après notre hypothèse la racine a de toute façon deux signes).

On peut donner des formules analogues pour les autres fonctions :

$$\left.\begin{aligned} &\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z = \frac{\pi}{2} - i \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ &\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}, \\ &\operatorname{arsh} z = \ln (z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{arch} z = \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ &\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}, \qquad \operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z + 1}{z - 1}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Toutes ces fonctions sont multiformes puisque la fonction ln dans le second membre des formules (10) et (11) désigne une détermination quelconque du logarithme. Les procédés qui permettent de séparer leurs branches uniformes sont analogues à ceux considérés plus haut ; toutes ces branches sont des fonctions analytiques.

10. La fonction puissance générale $w = z^a$, où $a = \alpha + i\beta$ est un nombre complexe quelconque, est *définie* par la relation

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}. \tag{1}$$

Posant ici $z = re^{i\varphi}$ nous avons $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ et, par conséquent,

$$z^a = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} e^{i[\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r]}, \tag{2}$$

où k est un nombre entier quelconque. On voit donc que pour $\beta \neq 0$ la fonction z^a possède toujours une infinité de déterminations portées (pour z et a fixes) par les circonférences $|w| = \rho_k$ de rayons

$$\rho_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} e^{-2k\pi\beta} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

qui forment une progression géométrique infinie dans les deux sens, de raison $e^{-2\pi\beta}$. Les arguments de ces déterminations

$$\theta_k = \alpha\varphi + \beta \ln r + 2k\pi\alpha \tag{4}$$

forment également une progression arithmétique infinie dans les deux sens, de raison $2\pi\alpha$.

Pour $\beta = 0$, c'est-à-dire pour les a réels, les déterminations de z^a sont portées par la circonférence $|w| = e^{a \ln r} = r^a$, et leurs arguments sont

$$\theta_k = a\varphi + 2k\pi a. \tag{5}$$

Si $a = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel (on suppose que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible), alors toutes les valeurs θ_k diffèrent d'un multiple

entier de 2π de q de ces valeurs (par exemple de $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{q-1}$). Par conséquent, dans ce cas la fonction $w = z^a$ est à un nombre fini de déterminations et coïncide avec la fonction $\sqrt[q]{z^p}$:

$$z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}. \tag{6}$$

Si a est un nombre réel irrationnel, alors parmi les valeurs θ_k dans la formule (5) il n'y a pas de valeurs qui diffèrent d'un multiple entier de 2π et, par conséquent, la fonction $z^a = e^{a\mathrm{Ln}z}$ est à un nombre infini de déterminations.

La multiformité de la fonction puissance générale tout comme des fonctions élémentaires que nous avons considérées plus haut est conditionnée par la multiformité de l'argument. Les procédés qui permettent de séparer les branches uniformes sont ceux donnés précédemment; le point de branchement est $z = 0$.

De même que la fonction puissance générale (1) on peut considérer l'*exponentielle générale*

$$a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a} = e^{z\ln|a|} \cdot e^{iz\,\mathrm{Arg}\,a}. \tag{7}$$

Contrairement à la fonction (1) la fonction (7) est constituée d'un ensemble de fonctions uniformes qui diffèrent les unes des autres par les facteurs $e^{2k\pi iz}$, où k est un nombre entier.

§ 4. INTÉGRATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Nous allons donner dans ce paragraphe la notion d'intégrale des fonctions d'une variable complexe et les propriétés les plus importantes des fonctions analytiques, attachées à la notion d'intégrale ou bien s'appuyant sur cette dernière. En particulier, nous établirons l'équivalence entre les notions de fonction analytique comme fonction dérivable en chaque point d'un domaine de définition et comme fonction dont l'intégrale ne dépend pas du chemin d'intégration (cf. théorème 1 du n° 12 et théorème 3 du n° 17). Ceci donne une nouvelle conception dans l'élaboration de la théorie des fonctions analytiques. Les applications de la notion d'intégrale et des théorèmes qui sont basés sur cette dernière seront considérées dans les chapitres suivants.

11. Intégrale d'une fonction d'une variable complexe. Soient données une courbe orientée C et une fonction d'une variable complexe $f(z)$ définie sur cette courbe. *Par définition, l'intégrale* de $f(z)$ prise le long de C est

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \int_C f(z)\,dz, \tag{1}$$

où $z_0 = a$, z_1, . . ., $z_{n+1} = b$ est une suite de points divisant C en n arcs, a et b étant les extrémités de C, ζ_k un point arbitraire appartenant à l'arc $[z_k, z_{k+1}]$ de la courbe C, et la limite est prise en supposant que $\max |z_{k+1} - z_k| \to 0$.

Si C est une courbe une fois continûment différentiable par morceau et $f(z)$ une fonction bornée continue par morceau, alors l'intégrale (1) existe toujours. La démonstration se ramène à un théorème d'existence des intégrales curvilignes des fonctions d'une variable réelle (*), théorème connu d'analyse. En effet, posant

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \\ z_k = x_k + iy_k,\ x_{k+1} - x_k = \Delta x_k,\ y_{k+1} - y_k = \Delta y_k, \\ \zeta_k = \xi_k + i\eta_k,\ u(\xi_k, \eta_k) = u_k,\ v(\xi_k, \eta_k) = v_k, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \{u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k\} + i \sum_{k=0}^{n-1} \{u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k\}. \qquad (3)$$

Les sommes du second membre de la formule (3) sont les sommes intégrales des intégrales curvilignes correspondantes. Dans nos conditions ces intégrales existent et, par conséquent, l'intégrale

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C u\, dx - v\, dy + i \int_C u\, dy + v\, dx \qquad (4)$$

existe. A l'aide de la formule (4) le calcul de l'intégrale d'une fonction d'une variable complexe se ramène au calcul d'intégrales réelles.

Appliquant les définitions introduites, on voit facilement que la dérivée et l'intégrale d'une fonction complexe d'une variable *réelle* $w(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ sont données par les combinaisons linéaires suivantes :

$$w'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t), \qquad (5)$$

$$\int_\alpha^\beta w(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, dt + i \int_\alpha^\beta \psi(t)\, dt. \qquad (6)$$

Supposons que $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ soit une représentation paramétrique de la courbe C, avec $z(\alpha) = a$, $z(\beta) = b$; utilisant alors la formule (4) nous ramenons le calcul de l'intégrale d'une fonction $f(z)$ prise le long de C au calcul de l'intégrale d'une fonction

(*) Cf. *Fikhtengoltz*, Cours du calcul différentiel et intégral, Gostekhizdat, 1947-1949, tome III, p. 27 (éd. russe) ou *Smirnov*, Cours de mathématiques supérieures, Ed. de Moscou, t. II, p. 220 et les suivantes.

complexe d'une variable réelle :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt. \tag{7}$$

Il découle aussi de la formule (4) que les propriétés ordinaires des intégrales curvilignes s'étendent aux intégrales des fonctions d'une variable complexe :

$$\int_C \{af(z)+bg(z)\}\,dz = a\int_C f(z)\,dz + b\int_C g(z)\,dz, \tag{8}$$

$$\int_{C_1\cup C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} fz\,(dz), \tag{9}$$

$$\int_C f(z)\,dz = -\int_{C^-} f(z)\,dz \tag{10}$$

(a et b sont des constantes complexes ; $C_1 \cup C_2$ désigne la courbe constituée des courbes C_1 et C_2, C^- la courbe coïncidant avec C mais parcourue dans le sens inverse).

Démontrons encore une propriété de l'intégrale :

Soient $M = \max |f(z)|$ *sur la courbe* C *et* l *la longueur de* C. *Alors*

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,|dz| \leqslant Ml. \tag{11}$$

La démonstration découle directement de la définition de l'intégrale. En effet, nous avons :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\,\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k| \leqslant M\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|,$$

où $\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|$ est la longueur de la ligne polygonale $z_0 z_1 \ldots z_n$ inscrite dans la courbe C, et à la limite, lorsque $\max |\Delta z_k| \to 0$, nous obtenons (11).

12. Théorème de Cauchy. Dans le cas général $\int_C f(z)\,dz$ dépend aussi bien de la fonction à intégrer $f(z)$ que de la courbe C. Cependant, si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe contenant une courbe C, son intégrale est alors complètement définie par la position des extrémités de C et ne dépend pas de la forme de cette courbe. En d'autres termes nous avons le théorème suivant.

Théorème 1 (A. Cauchy, 1825). *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe D, alors, pour toutes les courbes C appartenant à ce domaine et ayant des extrémités communes, l'intégrale $\int_C f(z)\,dz$ a une même valeur.*

Nous démontrerons ce théorème avec *l'hypothèse supplémentaire* (*) de la continuité de la dérivée $f'(z)$ (la définition de l'analyticité, donnée au n° 5, n'exige que l'*existence* de cette dérivée).

Soit comme toujours $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; en vertu de la relation

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C u\,dy + v\,dx \tag{1}$$

(cf. la formule (4) du numéro précédent) la question d'indépendance d'une intégrale $\int_C f(z)\,dz$ du chemin d'intégration se ramène à la même question pour les intégrales curvilignes

$$\int_C u\,dx - v\,dy, \quad \int_C u\,dy + v\,dx. \tag{2}$$

Comme on le sait du cours d'analyse (**), pour que, dans un domaine simplement connexe, l'intégrale curviligne $\int_C P\,dx + Q\,dy$, où P et Q sont des fonctions possédant des dérivées partielles continues, soit indépendante du chemin d'intégration, il faut et il suffit que l'expression sous le signe d'intégration soit une différentielle totale, c'est-à-dire qu'en chaque point du domaine D on ait la relation $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Pour les intégrales (2), cette relation est de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3}$$

La continuité des dérivées partielles découle de l'hypothèse suivant laquelle $f'(z)$ est continue. Les équations (3) coïncident avec les conditions de Cauchy-Riemann et sont vérifiées puisque $f(z)$ est une fonction analytique. Le théorème est démontré.

En vertu de ce théorème, pour les fonctions analytiques dans les domaines simplement connexes, au lieu de $\int_C f(z)\,dz$ on peut écrire $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, où z_0 et z sont les extrémités de la courbe C.

(*) On trouvera une démonstration complète dans [3], pp. 137-143, 154-162.
(**) Voir *Fikhtengoltz*, t. III, p. 68 ou *Smirnov*, t. II, p. 246.

En se basant sur le théorème 1, on peut démontrer plusieurs propositions analogues aux propositions ordinaires du calcul intégral. Avant tout on a le théorème suivant :

Théorème 2. *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe D, alors l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = F(z), \tag{4}$$

comme fonction de sa limite supérieure, est aussi une fonction analytique dans D, de plus

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = f(z). \tag{5}$$

En effet, d'après la définition de la dérivée et les propriétés (9) et (10) de l'intégrale données plus haut (n° 11), il vient

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta - \right.$$

$$\left. - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \right\} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{6}$$

En vertu de la continuité (*) de $f(z)$ au point z on peut écrire

$$f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta),$$

où $\eta(\zeta) \to 0$ lorsque $\zeta \to z$; en substituant dans (6), nous avons

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} f(z)\, d\zeta + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} \eta(\zeta)\, d\zeta. \tag{7}$$

Vu que $f(z)$ est une quantité constante pour l'intégration sur ζ, on a

$$\int_{z}^{z+h} f(z)\, d\zeta = f(z) \int_{z}^{z+h} d\zeta = f(z) \cdot h,$$

car de la définition il découle directement que $\int_{z}^{z+h} d\zeta = h$. Il résulte ensuite de l'inégalité (11) du n° 11:

$$\left| \int_{z}^{z+h} \eta(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant \max |\eta(\zeta)| \cdot |h|$$

(*) La continuité de $f(z)$ est une conséquence de son analyticité.

(d'après le théorème 1 on peut supposer que le chemin d'intégration allant du point z au point $z + h$ est rectiligne et c'est pourquoi sa longueur est égale à $|h|$). Ainsi, dans (7), la première limite est égale à $f(z)$ et la seconde est nulle, c'est-à-dire $F'(z) = f(z)$, ce qu'il fallait démontrer.

Une fonction dont la dérivée est égale à une fonction donnée $f(z)$ est appelée *primitive* de cette fonction. D'après le théorème démontré, l'intégrale de $f(z)$, considérée comme fonction de sa limite supérieure, est l'une des primitives de la fonction $f(z)$.

Théorème 3. *Deux primitives quelconques d'une fonction diffèrent l'une de l'autre au plus par une constante.*

Soient $F_1(z)$ et $F_2(z)$ ces primitives et

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que la fonction $\Phi(z)$ est constante.

D'après la formule de la dérivée (cf. (15), n° 5) nous avons

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

car par hypothèse $\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$. Il en découle que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, par conséquent, $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont constantes. Le théorème est démontré.

Le théorème suivant permet de calculer les intégrales à l'aide des primitives.

Théorème 4. *Si $F(z)$ est une primitive quelconque d'une fonction analytique $f(z)$, alors*

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = F(z) - F(z_0). \tag{8}$$

En effet, d'après le théorème 2, la fonction

$$F_1(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

est une des primitives de $f(z)$, par hypothèse la fonction $F(z)$ est aussi une primitive, donc d'après le théorème 3

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = F(z) + C,$$

où C est une constante. Faisant dans cette égalité $z = z_0$, il vient : $F(z_0) + C = 0$, d'où $C = -F(z_0)$, ce qui nous donne la formule (8) que nous voulions établir.

Remarquons encore que le théorème de Cauchy démontré au début de ce numéro peut être énoncé sous la forme suivante :

Théorème. *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe D, alors son intégrale prise le long de tout contour fermé C appartenant à D est nulle*:

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \tag{9}$$

La démonstration se base sur le fait qu'un contour fermé C peut être décomposé en deux contours C_1 et C_2 d'origines et d'extrémités communes (fig. 18). D'après les propriétés des intégrales

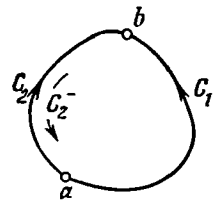

FIG. 18

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz;$$

par conséquent, le fait que l'intégrale prise le long de C est nulle est équivalent à l'égalité des intégrales prises le long de C_1 et de C_2.

Pour terminer, démontrons une généralisation du théorème de Cauchy utile pour la suite. Dans le dernier énoncé du théorème de Cauchy il est notamment question d'intégrale prise le long d'un contour complètement intérieur au domaine d'analyticité de la fonction ; or, on est parfois amené à considérer des intégrales prises le long de courbes sur lesquelles la fonction, tout en restant continue, cesse d'être analytique. Le théorème de Cauchy est vrai dans ce cas aussi.

Théorème 5. *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe D et continue sur le domaine fermé $\overline{D}$, alors l'intégrale de $f(z)$ prise le long de la frontière C de ce domaine est nulle* :

$$\int_C f(z)\,nz = 0. \tag{9}$$

Nous supposons d'abord que C est un contour « étoilé », c'est-à-dire qu'il existe un point z_0 tel que tout rayon issu de ce point ne coupe C qu'en un point. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $z_0 = 0$ (on y arrive par une translation dans le plan des z), alors la courbe C peut être donnée par une équation de la forme $z = r(\varphi)\,e^{i\varphi}$, où $r(\varphi)$ est une fonction uniforme. Par C_λ nous désignons le contour défini par l'équation $\zeta = \lambda z = \lambda r(\varphi)\,e^{i\varphi}$, $0 < \lambda < 1$ (fig. 19). Puisque C_λ est intérieur à D, d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{C_\lambda} f(\zeta)\,d\zeta = 0. \tag{10}$$

Mais lorsque le point ζ décrit C_λ, le point $z=\frac{1}{\lambda}\zeta$ décrit C, donc on peut écrire l'égalité (10) sous la forme

$$\int_C f(\lambda z)\, d(\lambda z) = \lambda \int_C f(\lambda z)\, dz = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C \{f(z) - f(\lambda z)\}\, dz. \tag{11}$$

Vu que la fonction $f(z)$ est uniformément continue sur $\overline{D}$ (cf. n° 5), pour

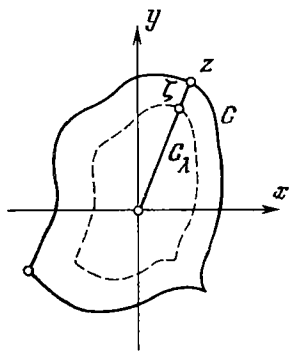

FIG. 19

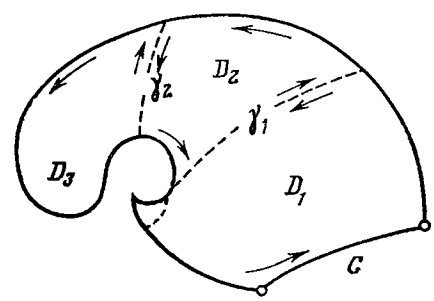

FIG. 20

tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $\delta > 0$ tel que pour tout couple de points z, ζ, vérifiant l'inégalité $|z - \zeta| < \delta$, on ait

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Soit l la longueur du contour C et $R = \max r(\varphi)$; prenons $\lambda > 1 - \frac{\delta}{R}$, alors pour tout couple de points z et $\zeta = \lambda z$ nous avons $|z - \zeta| = (1 - \lambda)\,|z| \leqslant \frac{\delta}{R}|z| \leqslant \delta$, par conséquent (12) est satisfait et nous obtenons de (11) :

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| < l\varepsilon.$$

Etant donné que ε est aussi petit que l'on veut et que l'intégrale ne dépend pas de ε, il en découle que cette intégrale est nulle. Ainsi, le théorème est démontré pour les contours étoilés.

Soit maintenant C une courbe quelconque une fois continûment différentiable par morceau. Si C possède des points de rebroussement, on retire alors du domaine D des cercles de petit rayon ε et de centre en ces points de façon que la frontière du domaine D_ε ainsi obtenu ne possède plus de tels points (fig. 20). Menant dans D_ε un nombre fini de courbes γ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), on peut d'une manière évidente partager ce domaine en sous-domaines D_k

limités par des courbes étoilées C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) (*). D'après ce qui a été démontré précédemment, l'intégrale prise le long de toute courbe C_k est nulle :

$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Supposons que les courbes C_k soient parcourues, par exemple, dans le sens positif et additionnons toutes les équations (13). Puisque chaque courbe γ_k est parcourue deux fois, et cela dans des sens contraires, toutes les intégrales prises le long de γ_k se détruisent (cf. (9) et (10) du n° 11). Les autres parties de la frontière C_k constituent la frontière C_ε du domaine D_ε et, par conséquent, l'intégrale prise le long de cette frontière est nulle :

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

Il nous reste à démontrer que l'intégrale prise le long de la frontière C du domaine D est nulle ; ceci découle immédiatement de ce que C et C_ε ne se distinguent l'une de l'autre que par un nombre fini de petits arcs, et comme la fonction $f(z)$ est bornée, son intégrale prise le long de ces arcs est aussi petite. Ainsi l'intégrale le long de C diffère aussi peu qu'on le veut de l'intégrale le long de C_ε qui est nulle et, par conséquent, elle est nulle aussi. Le théorème est complètement démontré.

13. Extension aux domaines multiplement connexes. Pour les domaines multiplement connexes le théorème de Cauchy n'est en général pas vrai. En effet, la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique partout dans la couronne $\frac{1}{2} < |z| < 2$, toutefois les intégrales de -1 à $+1$ prises le long des demi-circonférences supérieure et inférieure de $|z| = 1$ ne sont pas égales. En effet, le long de la demi-circonférence supérieure C_1, où $z = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, nous avons :

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}\,d\varphi = -i\pi,$$

et le long de la demi-circonférence inférieure C_2, où $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$:

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\pi.$$

C'est pourquoi, pour désigner l'intégrale de a à b prise le long d'un chemin C appartenant au domaine multiplement connexe nous

(*) Il est facile de voir qu'un arc de courbe une fois continûment différentiable par morceau dans un voisinage suffisamment petit d'un de ses points, qui n'est pas un point de rebroussement, représente une courbe étoilée. Dans le voisinage d'un point de rebroussement, la courbe peut ne pas être étoilée (par exemple, la courbe constituée par les branches de paraboles $y = x^2$ et $y = 2x^2$ pour $x \geqslant 0$ au voisinage du point $z = 0$).

utiliserons parfois le symbole

$$\int_a^b f(z)\,dz. \qquad (1)$$

Cependant si dans un domaine multiplement connexe les courbes C_1 et C_2 d'extrémités communes sont tracées de manière qu'elles limitent un domaine simplement connexe appartenant à D, alors les intégrales prises le long de telles courbes sont évidemment égales.

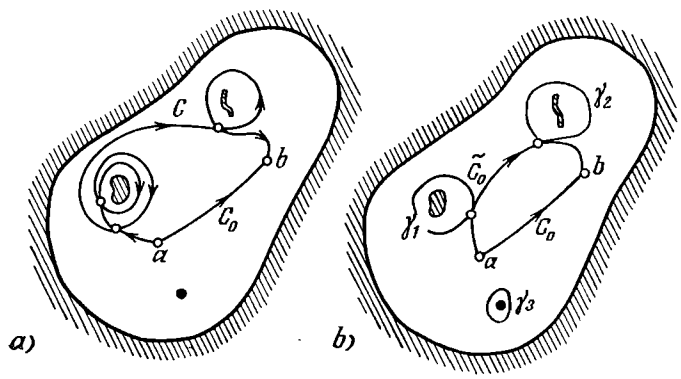

FIG. 21

Il en découle que *la valeur de l'intégrale d'une fonction analytique dans un domaine multiplement connexe D ne change pas si l'on déforme continûment le contour d'intégration de manière que ses extrémités soient immobiles et qu'il reste intérieur à D.*

Soient donnés dans un domaine multiplement connexe D des points a et b et une courbe simple (*) C_0 réunissant ces deux points. Soit C une autre courbe quelconque réunissant ces points (fig. 21*a*). Conformément à la remarque qui vient d'être faite, on peut sans changer la valeur de l'intégrale déformer la courbe C de façon qu'elle coïncide avec une autre courbe $\widetilde{C}$ appartenant au domaine D et composée 1) de la courbe $\widetilde{C}_0$ qui avec C_0 limite un domaine simplement connexe appartenant à D ; 2) de l'ensemble des courbes fermées simples γ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) dont chacune contient à son intérieur une partie connexe de la frontière du domaine D (fig. 21*b*). En outre les courbes γ_k peuvent être parcourues plusieurs fois et dans différents sens (sur la fig. 21*b*, la courbe γ_1 est décrite trois fois dans le sens négatif et γ_2 une fois dans le sens positif). Pour plus de commodité nous convenons de désigner par γ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) les courbes

(*) C'est-à-dire sans points multiples.

décrites dans le sens positif; de plus, nous introduisons les courbes γ_k ($k = m + 1, \ldots, n$) limitant les parties connexes de la frontière du domaine D et n'entrant pas dans la composition de $\widetilde{C}$ (par exemple γ_3 sur la fig. 21*b*).

Introduisant les notations

$$\Gamma_k = \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

pour une déformation continue de γ_k, pendant laquelle ces courbes restent dans D, les intégrales (2) conservent leur valeur; par conséquent, les quantités Γ_k ne sont définies que par la fonction $f(z)$ et le domaine D. Soient N_k des nombres entiers indiquant combien de fois et dans quel sens les γ_k de la composition de la courbe $\widetilde{C}$ ont été décrites; ces nombres peuvent être positifs, négatifs et nuls (par exemple, sur la fig. 21, $N_1 = -3$, $N_2 = 1$, $N_3 = 0$). D'après ce qui précède et d'après les propriétés (9) et (10) des intégrales données au n° 11, nous avons:

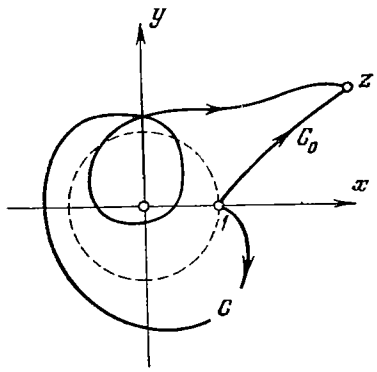

FIG. 22

$$\int_a^b {}_C f(z)\,dz = \int_a^b {}_{\widetilde{C}} f(z)\,dz =$$

$$= \int_a^b {}_{C_0} f(z)\,dz + N_1\Gamma_1 + \ldots + N_n\Gamma_n. \tag{3}$$

Les quantités Γ_k sont appelées *périodes de l'intégrale* de la fonction $f(z)$ dans le domaine multiplement connexe D ou *constantes cycliques*.

Exemple. Soient $f(z) = \dfrac{1}{z}$ et D la couronne $0 < |z| < R$, où R est aussi grand qu'on le veut. Tout chemin C réunissant les points 1 et z peut, comme précédemment, être déformé en un chemin $\widetilde{C}$ composé de la circonférence unité $|z| = 1$, parcourue plusieurs fois, et de la courbe simple C_0 réunissant les points 1 et z (fig. 22). L'intégrale prise le long de la circonférence parcourue dans le sens positif, quand $z = e^{i\varphi}$ et que φ croît de 0 à 2π, est égale à

$$\Gamma = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} i\,d\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i. \tag{4}$$

D'après la formule (3)

$$\int_1^z {}_C \frac{dz}{z} = \int_1^z {}_{C_0} \frac{dz}{z} + 2k\pi i, \tag{5}$$

où k est un nombre entier indiquant combien de fois et dans quel sens est parcourue la circonférence $|z| = 1$ entrant dans la composition de C (sur la fig. 22, $k = -2$). D'après le théorème 4 du n° 12

$$\int_1^z{}_{C_0} \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{z=1}^{z} = \ln z, \tag{6}$$

où ln désigne la détermination du logarithme qui prend la valeur zéro au point $z = 1$ et qui varie d'une manière continue sur C_0.

Supposant que C soit un contour arbitraire et désignant la détermination de l'intégrale de $\frac{1}{z}$, le long de ce contour, par Ln z, nous avons de (5) :

$$\operatorname{Ln} z = \int_1^z{}_{C} \frac{dz}{z} = \ln z + 2k\pi i. \tag{7}$$

Ainsi, nous retrouvons la fonction multiforme Ln z et nous venons d'étudier sa multiformité d'un nouveau point de vue.

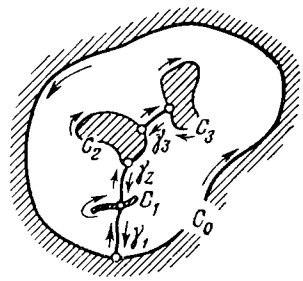

FIG. 23

Pour terminer, remarquons que l'on peut donner un sens un peu différent au théorème de Cauchy du n° 12, afin qu'il soit valable pour les domaines multiplement connexes. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine multiplement connexe D, limité par les courbes $C_0, C_1, \ldots, C_n$ (fig. 23), et continue sur $\bar{D}$. Menons les coupures $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de manière que D devienne un domaine simplement connexe D^* et désignons par C^* la frontière de ce domaine, qui est une courbe composée de portions des courbes C_k et de courbes γ_k, en outre ces dernières sont parcourues deux fois dans des sens opposés (flèches sur la fig. 23).

La fonction $f(z)$ est analytique dans le domaine simplement connexe D^* et continue sur le domaine $\bar{D}^*$; donc d'après le théorème 5 du n° 12 et les propriétés (9) et (10) des intégrales (n° 11), on a

$$\int_{C^*} f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz = 0 \tag{8}$$

(les intégrales prises le long des γ_k se détruisent et la partie restante de C^* coïncide avec $\sum_{k=0}^{n} C_k$). En outre, nous devons supposer que les courbes C_0 et $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont parcourues de manière que le domaine D reste constamment d'un même côté (par exemple à gauche sur la fig. 23). Ainsi, pour les domaines d'ordre de connexion quelconque le théorème de Cauchy est vrai dans l'énoncé suivant.

Théorème. *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine D et continue sur $\bar{D}$, alors son intégrale, prise le long de la frontière de ce domaine, parcourue de manière que le domaine D se trouve constamment d'un même côté, est nulle.*

14. Formule de Cauchy et théorème de la moyenne. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D d'ordre de connexion n et continue sur $\bar{D}$. Montrons que pour tout point intérieur z de ce domaine on a ce qu'il est convenu d'appeler la *formule de Cauchy* (1831):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{1}$$

où C est la frontière du domaine D parcourue de manière que le domaine D se trouve constamment à gauche.

Remarquons que seules les valeurs de $f(z)$ sur la frontière C du domaine D participent dans le second membre de la formule de Cauchy. Ainsi, dans les conditions considérées, la valeur d'une fonction analytique à l'intérieur d'un domaine est complètement définie par ses valeurs sur la frontière: la formule de Cauchy permet de calculer la valeur d'une fonction analytique en un point quelconque d'un domaine dès que l'on connaît les valeurs frontières de cette fonction.

Pour établir la formule de Cauchy nous supprimons du domaine D un cercle de rayon r et de centre au point z et nous remarquons que dans le domaine D^* d'ordre de connexion $(n+1)$, le numérateur et le dénominateur de la fonction à intégrer sont analytiques par rapport à la variable ζ, de plus le dénominateur ne s'annule pas. Par conséquent, la fonction à intégrer est analytique en ζ dans D^*; étant donné qu'elle est continue sur $\bar{D}^*$, on a d'après le théorème de Cauchy du n° 13 (formule (8)):

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\int_{\gamma_r^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,$$

où la circonférence γ_r^- est parcourue dans le sens negatif. Il en découle que

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{2}$$

où γ_r est parcourue dans le sens positif. Sur la circonférence γ_r nous avons $\zeta - z = re^{i\varphi}$; en sortant de sous le signe d'intégration le facteur constant $f(z)$ par rapport à ζ, nous trouvons:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)\,dz}{\zeta-z}=\frac{f(z)}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}\,d\varphi=f(z). \tag{3}$$

D'après les formules (2) et (3) nous avons:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{4}$$

Estimons cette différence. D'après l'inégalité (11) du n° 11

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_r}|f(\zeta)-f(z)|\,\frac{2\pi r}{r} =$$

$$= \max_{\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)|,$$

d'où l'on voit que notre différence peut être aussi petite que l'on veut lorsque r diminue. D'autre part, comme on le voit du premier membre de (4), cette différence est indépendante de r. Donc, la différence considérée est nulle et la formule de Cauchy est démontrée.

En particulier, si la courbe C est la circonférence $|\zeta - z| = R$, posant $\zeta - z = Re^{i\varphi}$, nous obtenons alors de la formule de Cauchy que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{5}$$

Cette dernière formule exprime ce qu'il est convenu d'appeler le *théorème de la moyenne* pour les fonctions analytiques:

Théorème. *Si une fonction $f(z)$ est continue sur un cercle fermé et analytique dans ce cercle, alors sa valeur au centre du cercle est égale à la moyenne arithmétique de ses valeurs sur la circonférence.*

15. Principe du maximum et lemme de Schwarz. Démontrons d'abord un lemme simple.

Lemme. *Si dans un domaine D: 1) la partie réelle d'une fonction analytique $f(z)$ est constante ou 2) son module est constant, alors cette fonction est constante.*

D'après la condition 1), notre proposition découle directement des équations de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, par conséquent, d'après ces équations on a aussi $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$. On en conclut que v, et par suite la fonction $f(z)$, est constante dans le domaine D.

Passons à la démonstration du lemme si l'on suppose que la condition 2) a lieu. Soit $|f(z)| \equiv M$, où M est une constante; pour $M = 0$, le lemme est évident. Si $M \neq 0$, nous considérons alors la fonction $\ln f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z)$ qui, dans ce cas, est analytique. Sa partie réelle est constante ($= \ln M$); par conséquent, d'après ce qui a été démontré, la fonction $\ln f(z)$ est constante et par suite $f(z)$ aussi. Le lemme est démontré.

Démontrons maintenant le *principe du module maximum* pour les fonctions analytiques.

T h é o r è m e. *Si une fonction $f(z)$ non identiquement constante est analytique dans un domaine D et continue sur $\overline{D}$, son module ne peut alors atteindre sa plus grande valeur en un point intérieur du domaine D.*

En vertu des propriétés des fonctions continues (cf. n° 5), $|f(z)|$ atteint son maximum M à l'intérieur ou sur la frontière de D (fig. 24).

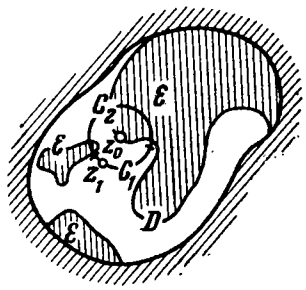

FIG. 24

Supposons que $|f(z)|$ atteint sa plus grande valeur M à l'intérieur de D et désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les points de D pour lesquels $|f(z)| = M$. Si $\mathcal{E} = \overline{D}$, alors partout dans D nous avons $|f(z)| = M$, c'est-à-dire $|f(z)|$ est constant. D'où, d'après le lemme, il découle que $f(z)$ est aussi constante dans D, ce qui est en contradiction avec les conditions du théorème.

Si $\mathcal{E}$ ne coïncide pas avec D, il existe alors un point frontière (*) z_0 de cet ensemble qui est un point intérieur de D. En vertu de la continuité de $f(z)$ nous avons $|f(z_0)| = M$, puisqu'il y a des points de $\mathcal{E}$ dans un voisinage quelconque de z_0. Construisons une circonférence $C: |z - z_0| = r$, appartenant au domaine D, de manière qu'elle contienne au moins un point z_1 n'appartenant pas à l'ensemble $\mathcal{E}$ (ceci est toujours possible car z_0 est un point frontière de $\mathcal{E}$). Alors $|f(z_1)| < M$ et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, vu la continuité de $f(z)$, on peut toujours trouver une portion C_1 de la circonférence C contenant le point z_1 sur laquelle on a

$$|f(z)| < M - \varepsilon. \tag{1}$$

Désignons par C_2 l'autre portion de la circonférence; il est clair que l'on a sur elle

$$|f(z)| \leqslant M. \tag{2}$$

Nous avons d'après le théorème de la moyenne:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi r}\left\{\int_{C_1} f(z)\,ds + \int_{C_2} f(z)\,ds\right\}, \tag{3}$$

où $ds = r\,d\varphi$ est l'élément de la circonférence C.

(*) Les points frontières et intérieurs d'un ensemble sont définis de la même manière que pour un domaine (cf. n° 3).

En prenant les modules dans la relation (3) et d'après les inégalités (1) et (2) nous obtenons :

$$M = |f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi r}\{(M-\varepsilon)\, l_1 + M l_2\} = M - \varepsilon \frac{l_1}{2\pi r},$$

où l_1 et l_2 sont respectivement les longueurs de C_1 et C_2 ($l_1 + l_2 = 2\pi r$). Mais cette dernière inégalité est impossible. Ce qui achève la démonstration du principe du maximum.

Remarque. *Si une fonction $f(z)$ non constante est analytique dans D, continue sur $\overline{D}$ et, de plus, ne s'annule pas, alors le minimum de $|f(z)|$ ne peut être atteint à l'intérieur de D.* Pour le démontrer, il suffit d'appliquer le principe du maximum à la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.

La proposition suivante, qui nous sera utile ultérieurement, découle du principe du maximum.

Lemme (H. Schwarz). *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans le cercle $|z| < 1$, continue sur le cercle fermé, avec $f(0) = 0$, et si partout dans le cercle $|f(z)| \leqslant 1$, alors dans ce même cercle*

$$|f(z)| \leqslant |z|. \tag{4}$$

De plus, si au moins en un point intérieur du cercle $|f(z)| = |z|$, alors cette dernière égalité a lieu partout dans le cercle et

$$f(z) = e^{i\alpha} z, \tag{5}$$

où α est une constante réelle.

Pour démontrer ce lemme considérons la fonction

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{pour } z \neq 0, \\ f'(0), & \text{pour } z = 0. \end{cases}$$

Il découle des conditions du lemme que la fonction $\varphi(z)$ est analytique dans la couronne $0 < |z| < 1$ et continue sur le cercle fermé $|z| \leqslant 1$ (la continuité au point $z = 0$ découle de ce que $\lim\limits_{z\to 0} \varphi(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = f'(0)$). Nous démontrerons au n° 22 que l'analyticité de $\varphi(z)$ au point $z = 0$ découle de ce qui vient d'être dit ; ainsi, on peut appliquer à $\varphi(z)$ le principe du module maximum. Puisque sur la circonférence $|z| = 1$, nous avons $|\varphi(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1$, d'après ce principe, partout dans le cercle $|\varphi(z)| \leqslant 1$, c'est-à-dire $|f(z)| \leqslant |z|$. La première partie du lemme est démontrée.

Si l'on a $|f(z_0)| = |z_0|$ en un point intérieur quelconque, alors en ce point $|\varphi(z_0)| = 1$, donc, d'après le principe du maximum, $|\varphi(z)| \equiv 1$ pour tous les points du cercle et, d'après le lemme du début de ce numéro, $\varphi(z)$ est constante. Puisque $|\varphi(z)| \equiv 1$, cette

constante peut être mise sous la forme $e^{i\alpha}$, où α est un nombre réel, donc $f(z) = e^{i\alpha}z$. Le lemme de Schwarz est démontré.

La signification géométrique du lemme de Schwarz est la suivante : pour toute transformation du cercle unité sur un domaine Δ, intérieur au cercle unité, à l'aide d'une fonction analytique $w = f(z)$, $f(0) = 0$, l'image d'un point quelconque z se trouve plus près de l'origine des coordonnées que le point z lui-même (fig. 25) ; si l'image d'au moins un point z se trouve à la même distance que ce point, alors Δ coïncide avec le cercle unité et la transformation se réduit à une rotation.

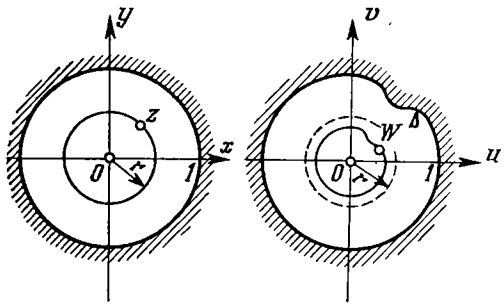

FIG. 25

16. Convergence uniforme. Ce numéro est d'un caractère auxiliaire. Nous y considérerons des questions, importantes pour la suite, se rapportant à la convergence uniforme des suites et séries de fonctions analytiques.

On dit qu'une suite de fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... *converge uniformément* vers une fonction $f(z)$ dans un domaine D (ou sur une courbe C) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre n_0 ne dépendant que de ε, tel que pour $n \geqslant n_0$, pour tous les z de D (ou sur C), on a l'inégalité

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Démontrons deux théorèmes analogues aux théorèmes correspondants de l'analyse.

Théorème 1. *La limite $f(z)$ d'une suite de fonctions continues $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ... uniformément convergente dans un domaine D (ou sur une courbe C) est une fonction continue.*

Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$ et désignons par z_0 un point quelconque du domaine D (ou de C). En vertu de la convergence uniforme, il existe un numéro n tel que pour tous les z de D (ou sur C), on a

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

D'après la continuité de $f_n(z)$ au point z_0, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tous les z de D (ou sur C) vérifiant l'inégalité $|z - z_0| < \delta$ on a

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Pour ces z et pour le n choisi, il découle des inégalités (2) et (3):

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant|f(z)-f_n(z)|+|f_n(z)-$$
$$-f_n(z_0)|+|f_n(z_0)-f(z_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

ce qui signifie que $f(z)$ est continue.

Théorème 2. *Si une suite de fonctions continues* $f_1(z), f_2(z), \ldots$ $\ldots, f_n(z), \ldots$ *converge uniformément vers* $f(z)$ *sur une courbe* C, *alors on a la relation limite*

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C\lim_{n\to\infty}f_n(z)\,dz. \tag{4}$$

Donnons-nous un nombre $\varepsilon>0$. En vertu de la convergence uniforme, il existe un n_0 tel que pour tous les $n\geqslant n_0$ et pour tous les z de C on a

$$|f_n(z)-f(z)|\leqslant\frac{\varepsilon}{l},$$

où l est la longueur de C. Pour ces n

$$\left|\int_C f(z)\,dz-\int_C f_n(z)\,dz\right|=\left|\int_C\{f(z)-f_n(z)\}\,dz\right|<\frac{\varepsilon}{l}\,l=\varepsilon,$$

ce qui signifie que la relation (4) est vraie.

Le théorème qui vient d'être démontré donne la possibilité de passer à la limite sous le signe d'intégration dans le cas d'une suite de fonctions uniformément convergente.

La notion d'une suite de fonctions uniformément convergente est intimement liée à la notion de série uniformément convergente. Une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ est dite *uniformément convergente* dans un domaine D (ou sur une courbe C) si la suite de ses sommes partielles

$$s_0(z)=f_0(z),\ s_1(z)=f_0(z)+f_1(z),\ \ldots,\ s_n(z)=f_0(z)+$$
$$+f_1(z)+\ldots+f_n(z),\ \ldots$$

converge uniformément dans ce domaine (ou sur cette courbe).

On démontre, de la même manière qu'en analyse, un critère suffisant de convergence uniforme des séries de fonctions, commode pour les applications.

Théorème 3. *Si une série de fonctions* $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ *est majorée dans un domaine* D *par une série numérique* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *convergente, c'est-à-di-*

re si pour tout point z de D

$$| f_n (z) | \leqslant a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

alors la série de fonctions donnée converge uniformément dans D.

En effet, d'après un théorème connu de comparaison, la série donnée converge en tout point z de D. Désignons par $s(z)$ sa somme. Pour tout n, le reste $r_n(z) = s(z) - s_n(z)$ de cette série, en vertu de la relation (5), satisfait à l'inégalité

$$| r_n (z) | \leqslant | f_{n+1} (z) | + | f_{n+2} (z) | + \ldots \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \tag{6}$$

A droite dans (6) figure le reste r_n d'une série numérique convergente, qui tend vers zéro pour $n \to \infty$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un numéro n_0, ne dépendant que de ε, à partir duquel $r_n < \varepsilon$ et alors, d'après (6) et pour tout z de D et $n \geqslant n_0$, on a l'inégalité

$$| s (z) - s_n (z) | < \varepsilon.$$

Ceci signifie que la série donnée converge uniformément.

Il découle des théorèmes 1 et 2 que la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente est continue et qu'une telle série peut être intégrée terme à terme, c'est-à-dire que l'on a la relation limite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n (z)\, dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z)\, dz. \tag{7}$$

La question de la possibilité de dériver terme à terme une série de fonctions sera considérée au n° 19 (théorème de Weierstrass).

Considérons maintenant une famille de fonctions $f(z, \alpha)$ dépendant d'un paramètre α (réel ou complexe). On dit que $f(z, \alpha)$ tend, lorsque $\alpha \to \alpha_0$, vers la fonction $f(z)$ *uniformément par rapport à z* dans un domaine D (ou sur une courbe C) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour $| \alpha - \alpha_0 | < \delta$ et pour tous les z de D (ou sur C) on a l'inégalité

$$| f (z, \alpha) - f (z) | < \varepsilon. \tag{8}$$

De même que pour les suites on peut démontrer que la limite d'une famille de fonctions continues uniformément convergente est une fonction continue et que pour de telles familles on a la relation limite

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_C f(z, \alpha)\, dz = \int_C \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(z, \alpha)\, dz. \tag{9}$$

Dans la suite nous aurons à considérer des intégrales, dites *intégrales impropres*, prises le long de courbes infinies. En outre, nous

ne considérerons que des courbes C dont les portions appartenant à un cercle arbitraire seront une fois continûment différentiables par morceau. Les fonctions $f(z)$ données sur C seront continues par morceau et bornées.

Définissons maintenant l'intégrale d'une fonction $f(z)$ prise le long d'une courbe infinie C. Supposons d'abord que C ne soit pas bornée d'un côté et soit a son extrémité qui se trouve à distance finie. Nous désignons alors par C_l la portion de C d'extrémité a et de longueur l. Posons par définition

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{l\to\infty} \int_{C_l} f(z)\,dz, \tag{10}$$

et si cette limite existe, nous dirons que l'intégrale (impropre) (10) *converge*. Si C n'est pas bornée dans les deux sens, nous définissons alors l'intégrale comme la somme des intégrales prises le long des deux portions de C d'extrémité commune a, point arbitraire.

Soit $f(z, \zeta)$ une fonction définie pour tous les z d'un domaine D et pour tous les ζ d'une courbe C. Nous dirons que l'intégrale

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta)\,d\zeta$$

converge uniformément dans le domaine D si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre l_0 tel que pour tous les z de D et pour l arbitraire, avec $l > l_0$, on a

$$\left| \int_C f(z, \zeta)\,d\zeta - \int_{C_l} f(z, \zeta)\,d\zeta \right| < \varepsilon \tag{11}$$

(nous supposons que C n'est infinie que d'un côté ; on étend au cas général de la même manière que précédemment).

Théorème 4. *Si une fonction $f(z, \zeta)$ est analytique en z pour tous les ζ fixes sur une courbe C et continue par morceau en ζ pour tous les z dans un domaine simplement connexe D avec les points de discontinuité ne dépendant pas de z et si l'intégrale*

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta)\,d\zeta \tag{12}$$

converge uniformément dans le domaine D, elle est alors une fonction analytique dans ce domaine (*).

Pour démontrer ce théorème nous aurons recours à un théorème réciproque du théorème de Cauchy, d'après lequel la fonction $F(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe D si elle est

(*) Comparer avec le théorème 1 du n° 19.

continue dans ce domaine et si son intégrale prise le long de toute courbe fermée, appartenant à ce domaine, est nulle (la démonstration de ce théorème sera donnée au n° 17).

Les conditions du théorème à démontrer permettent d'établir la continuité de la fonction $F(z)$ de façon ordinaire (comme le théorème 2 ou la relation (9)). Il nous reste à démontrer que l'intégrale de $F(z)$ prise le long d'un contour fermé Γ arbitraire, appartenant à un domaine D, est nulle. On a

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz = \int_{\Gamma} \left\{ \int_{C} f(z,\ \zeta)\,d\zeta \right\} dz. \tag{13}$$

En vertu de la convergence uniforme de l'intégrale (12) et d'après un théorème connu d'analyse (*) on peut intervertir l'ordre d'intégration dans le second membre et on a

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz = \int_{C} \left\{ \int_{\Gamma} f(z,\ \zeta)\,dz \right\} d\zeta = 0,$$

puisque l'intégrale entre accolades est nulle d'après le théorème de Cauchy. Le théorème 4 est démontré.

Remarquons que dans le cas d'une courbe bornée C des suppositions supplémentaires sur la convergence de l'intégrale (12) ne sont pas nécessaires pour l'analyticité de la fonction $F(z)$. Ceci découle de la possibilité d'intervertir l'ordre d'intégration dans la relation (13) sans avoir besoin d'hypothèse supplémentaire.

17. Dérivées d'ordres supérieurs. Par définition, une fonction analytique est une fonction d'une variable complexe possédant une dérivée en chaque point d'un domaine D (cf. n° 5). Montrons qu'il découle immédiatement de l'analyticité d'une fonction l'existence et l'analyticité des dérivées de tous les ordres.

Théorème 1. (A. Cauchy, 1842). *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine D et continue sur $\overline{D}$, elle possède alors en chaque point de D des dérivées de tous les ordres, de plus la dérivée d'ordre n est donnée par la formule*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \tag{1}$$

où C est la frontière du domaine D.

Soit z un point intérieur quelconque du domaine D. D'après la définition de la dérivée et la formule de Cauchy du n° 14 que nous

(*) Cf. *Fikhtengoltz*, t. II, p. 733 ; il s'agit là-bas des intégrales définies réelles, mais après avoir introduit un paramètre et séparé les parties réelles et imaginaires, les intégrales (13) se ramènent à de telles intégrales.

appliquons aux points z et $z+h$, nous avons:

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_C f(\zeta)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\zeta-z-h}-\frac{1}{\zeta-z}\right\}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}d\zeta.$$

Mais pour $h\to 0$, il est clair que la fonction $\frac{1}{\zeta-z-h}$ tend uniformément vers $\frac{1}{\zeta-z}$ pour tous les ζ appartenant à C et, par conséquent, d'après le théorème 2 du n° 16 (dans le cas d'une famille de fonctions dépendant du paramètre h) la limite existe. On a de plus

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta. \tag{2}$$

Pour $n=1$, le théorème est démontré. S'il est vrai pour $n-1$, il l'est également pour n, ce qui démontre le théorème dans le cas général.

Remarque 1. Comme on le voit de la démonstration, le théorème peut encore être énoncé comme suit: *si une fonction* $\varphi(\zeta)$ *est continue sur la frontière* C *d'un domaine* D, *alors la fonction*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{3}$$

représentée par la formule de Cauchy, est analytique dans ce domaine.

Remarque 2. La formule (1) pour les dérivées s'obtient en dérivant la formule de Cauchy formellement par rapport à z; le théorème qui vient d'être démontré confirme que cette dérivation est légitime.

Les importantes *inégalités de Cauchy* découlent de la formule (1). Notons M le maximum du module d'une fonction $f(z)$ dans un domaine D, R la distance du point z à la frontière de D et l la longueur de cette frontière. Nous avons de (1):

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\left|\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|\leqslant\frac{n!Ml}{2\pi R^{n+1}}. \tag{4}$$

Si en particulier $f(z)$ est analytique dans un cercle $|z-z_0|<R$, alors, en prenant pour D ce cercle, nous avons

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\leqslant\frac{Mn!}{R^n},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Ce sont les inégalités de Cauchy que nous voulions démontrer.

Nous utiliserons les résultats obtenus pour démontrer deux théorèmes importants de la théorie des fonctions analytiques.

Théorème 2 (*A.* Cauchy, J. Liouville) (*). *Si une fonction* $f(z)$ *est analytique et bornée dans le plan entier, elle est alors constante.*

Supposons que partout $|f(z)| \leqslant M$. Pour tout point z du plan et pour tout R, l'inégalité (5) pour $n = 1$ donne

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

Vu que le premier membre est indépendant de R et que le second membre, pour R croissant, est aussi petit que l'on veut, on a $|f'(z)| = 0$. Ainsi $f'(z) \equiv 0$ dans tout le plan. On en conclut d'après le théorème 4 du n° 12 que

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz \equiv 0,$$

c'est-à-dire que la fonction $f(z)$ est constante. Le théorème est démontré.

Remarque. Le théorème 2 se généralise de la manière suivante.

Si une fonction $f(z)$ est analytique dans tout le plan et si son module ne croît pas plus rapidement que $M|z|^n$, c'est-à-dire $|f(z)| \leqslant M|z|^n$, où n est un entier et M une constante, alors cette fonction est un polynôme de degré non supérieur à n (**).

La démonstration est analogue à la démonstration précédente: soit z_0 un point arbitraire du plan. Pour chaque z appartenant au cercle $|z - z_0| < R$ nous avons $|z| \leqslant |z_0| + R$. Puisque $|f(z)| \leqslant M|z|^n \leqslant M(|z_0| + R)^n$, l'inégalité (5) donne:

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leqslant \frac{M(|z_0|+R)^n}{R^{n+1}}(n+1)!$$

et en passant à la limite, lorsque $R \to \infty$, on obtient $f^{(n+1)}(z_0) = 0$. Or, comme z_0 est un point arbitraire du plan, on a donc $f^{(n+1)}(z) \equiv 0$, d'où par la même méthode que précédemment, on déduit le résultat que nous cherchions.

Le théorème suivant est la réciproque du théorème de Cauchy du n° 12.

Théorème 3. [H. Morera, (1886)]. *Si une fonction* $f(z)$ *est continue dans un domaine simplement connexe* D *et si l'intégrale* $\int_C f(z)\,dz$ *le long de tout contour fermé appartenant à* D *est nulle, alors la fonction* $f(z)$ *est analytique dans ce domaine.*

Il découle des conditions du théorème que dans le domaine D l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ ne dépend pas du chemin d'intégration, c'est-à-

(*) Le théorème a été démontré pour la première fois par Cauchy (1844) mais il a été surtout utilisé dans les travaux de Liouville (1809-1882.)

(**) Pour $n = 0$, nous retrouvons, en particulier, le théorème 2.

dire que pour z_0 fixe elle définit une fonction de z

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz.$$

Répétant mot à mot la démonstration du théorème 2 du n° 12 nous voyons que cette fonction possède une dérivée $F'(z) = f(z)$, c'est-à-dire qu'elle est analytique (dans le théorème cité nous n'utilisons que la continuité de $f(z)$ et l'indépendance de l'intégrale du chemin d'intégration). Mais alors, en vertu du théorème 1 du n° 17, $f(z)$, en tant que la dérivée d'une fonction analytique, est à son tour une fonction analytique. Le théorème de Morera est démontré.

§ 5. REPRÉSENTATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES PAR DES SÉRIES

Nous considérons dans ce paragraphe le problème de la représentation des fonctions analytiques à l'aide de séries entières et de leur généralisation, les séries suivant les puissances positives et négatives de $z - a$. Le développement des fonctions en séries présente non seulement un intérêt théorique mais aussi pratique. Indiquons par exemple qu'à l'aide des séries on peut calculer approximativement la valeur des fonctions, que dans de nombreux problèmes pratiques (résolution des équations différentielles et autres) la solution est donnée sous forme de séries, etc.

Ici nous nous limitons aux fondements théoriques des développements des fonctions en séries ; la plupart d'entre eux jouent un rôle très important dans l'exposé ultérieur (cf. en particulier le chapitre V et les suivants). Notamment nous établissons l'équivalence entre les notions de fonction analytique (au sens du § 2) en tant que fonction dérivable en chaque point du domaine de définition et en tant que fonction qui peut être représentée au voisinage de chaque point par la somme d'une série entière (cf. le théorème de Taylor du n° 18 et le théorème 3 du n° 19) ; ceci donne une conception de plus dans l'élaboration de la théorie des fonctions analytiques. Nous généralisons au n° 25 la notion d'analyticité en l'étendant aux fonctions multiformes.

18. Séries de Taylor. Nous commençons par la généralisation de la formule de Taylor connue d'analyse aux fonctions d'une variable complexe et nous démontrons que chaque fonction analytique en un point peut être représentée au voisinage de ce point par la somme d'une série entière.

Nous utilisons la formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, en

l'écrivant sous la forme

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} \tag{1}$$

(la formule est vraie aussi pour les q complexes). Fixons un point a du domaine d'analyticité D de la fonction $f(z)$ et, ayant recours à la formule (1), écrivons

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta-a}\left\{1 + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}\right\}.$$

Multiplions maintenant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ et intégrons par rapport à ζ le long d'un contour fermé C appartenant à D et contenant les points z et a. D'après la formule de Cauchy (n° 14) et les formules donnant les dérivées d'ordres supérieurs (n° 17) nous obtenons la *formule* classique *de Taylor* (*)

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + R_n, \tag{2}$$

où le reste est de la forme

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{3}$$

Une question se pose: dans quelles conditions $R_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ ou, ce qui revient au même, dans quelles conditions la fonction $f(z)$ peut être représentée par sa *série de Taylor* de centre au point a, c'est-à-dire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \tag{4}$$

La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant:

T h é o r è m e (A. Cauchy, 1831). *Une fonction $f(z)$ peut être représentée par sa série de Taylor* (4) *dans tout cercle ouvert de centre au point a dans lequel elle est analytique. Dans tout domaine fermé appartenant à ce cercle la série de Taylor converge uniformément.*

Désignons par R le rayon du cercle d'analyticité de la fonction $f(z)$ (de centre au point a) et considérons un nombre arbitraire R',

(*) Pour la première fois on a rencontré des développements de cette forme (pour les z réels) dans les travaux de *Brook Taylor* (1685-1731) remontant à 1715 mais leurs applications systématiques datent de 1742 et sont dues à *Colin Maclaurin* (1698-1746).

$0 < R' < R$, et le cercle $|z - a| \leqslant kR'$, où $0 < k < 1$ est un nombre positif quelconque. Soient z un point arbitraire de ce cercle et C la circonférence $|\zeta - a| = R'$. Nous avons $|z - a| \leqslant kR'$, $|\zeta - a| = R'$. Par conséquent,

$$|\zeta - z| \geqslant |\zeta - a| - |z - a| \geqslant R' - kR' = (1 - k)R',$$

et la formule (3) donne

$$|R_n| = \left| \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k^{n+1}R'^{n+1}}{2\pi} \cdot \frac{M 2\pi R'}{(1-k)R'^{n+2}} = \frac{Mk^{n+1}}{1-k},$$

où M est le maximum du module de $f(z)$ dans le cercle $|z - a| \leqslant R'$ (la fonction $f(z)$ étant analytique dans ce cercle, elle y est, par conséquent, bornée). Puisque $k < 1$, on voit que $R_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, en outre l'estimation de R_n est indépendante de z. Ainsi, dans tout cercle $|z - a| < kR'$, avec $0 < k < 1$, la série de Taylor converge uniformément.

Un domaine fermé arbitraire appartenant au cercle d'analyticité de $f(z)$ peut être plongé dans un cercle de la forme $|z - a| < kR'$, où $0 < k < 1$, $0 < R' < R$, et, par conséquent, dans ce domaine la série converge uniformément. Le théorème est démontré.

Ainsi, toute fonction analytique dans un cercle peut y être représentée par une série entière. On se demande si, inversement, la somme d'une série entière convergente quelconque est une fonction analytique. Pour répondre à cette question il faut considérer d'abord certaines propriétés des séries entières. C'est ce que nous allons faire dans le numéro suivant. Donnons maintenant le développement taylorien de certaines fonctions élémentaires:

$$\left.\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots; \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots; \\ \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots, \quad \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(convergent pour z quelconque),

$$\left.\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots; \\ (1+z)^a &= 1 + az + \frac{a(a-1)}{2} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} z^3 + \ldots \text{ (*)} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(*) Dans cette formule a est un nombre complexe quelconque ; dans le cas particulier de $a = n$ naturel, la série s'arrête au n-ième terme et, par conséquent, converge dans tout le plan.

(convergent pour $|z| < 1$; les deux derniers développements sont écrits pour les branches uniformes qui sont respectivement égales à 0 et à 1 pour $z = 0$). Les procédés d'obtention de ces développements sont identiques à ceux donnés en analyse, et pour cette raison nous ne nous y arrêterons pas.

19. Séries entières. Commençons par donner deux théorèmes généraux concernant la convergence uniforme des séries de fonctions analytiques ; pour la première fois ces théorèmes ont été démontrés par Karl Weierstrass en 1859. Le premier établit qu'un passage uniforme à la limite conserve la propriété d'analyticité :

Théorème 1. *Si une série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

de fonctions analytiques dans un domaine simplement connexe D converge uniformément dans ce domaine, alors sa somme est une fonction analytique dans D.

En effet, d'après le n° 16, la somme $s(z)$ de la série (1) est continue dans D. Soit C un contour fermé arbitraire appartenant à D ; en vertu de la convergence uniforme, la série (1) peut être intégrée terme à terme le long de C et nous avons

$$\int_C s(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)\,dz = 0,$$

puisque, d'après le théorème de Cauchy du n° 12, l'intégrale des fonctions analytiques $f_n(z)$ le long des contours fermés appartenant à un domaine simplement connexe est nulle. Nous pouvons maintenant, à l'aide du théorème de Morera (n° 17), affirmer que la fonction $s(z)$ est analytique dans le domaine D. Le théorème est démontré.

Le deuxième théorème établit que, pour les fonctions analytiques, le problème de la possibilité de la dérivation terme à terme des séries se résout plus simplement qu'en analyse :

Théorème 2. *Toute série* (1) *de fonctions analytiques dans un domaine D et continues sur $\overline{D}$, uniformément convergente sur $\overline{D}$, peut être dérivée terme à terme un nombre de fois arbitraire dans D.*

Soient ζ un point arbitraire de la frontière C du domaine D et z un point intérieur à ce domaine. Puisque la différence $\zeta - z$, pour z fixe, est bornée inférieurement en module par un nombre positif, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}$, où k est un nombre entier arbitraire, converge uniformément par rapport à ζ sur C. Par conséquent, on peut l'intégrer

terme à terme le long de C et, par suite, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad (2)$$

converge (pour chaque terme de la série nous utilisons la formule de Cauchy pour les dérivées du n° 17). Il reste à démontrer que la somme de la série (2) est la dérivée d'ordre k de la somme $s(z)$ de la série (1). Mais en vertu de la convergence uniforme, le premier membre de la formule (2) peut être écrit sous la forme

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{s(z)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = s^{(k)}(z)$$

(nous utilisons de nouveau la formule de Cauchy), ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 1. Pour établir qu'une série de fonctions analytiques converge uniformément sur un domaine fermé $\overline{D}$, il suffit d'exiger sa convergence uniforme sur la frontière de ce domaine. Ceci découle directement du principe du maximum du n° 15, d'après lequel

$$\max_{(\overline{D})} |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots| = \max_{(C)} |f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \ldots|.$$

Remarque 2. Un exemple simple montre que l'on ne peut établir la convergence de la série de dérivées dans le théorème 2 que dans le domaine D est non sur $\overline{D}$. En effet, il est clair que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformément dans le cercle fermé $|z| \leqslant 1$, car elle est majorée par la série numérique convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Néanmoins la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ (convergente d'après le théorème 2 pour $|z| < 1$) diverge au point $z = 1$ de la frontière de ce cercle.

Dans la suite, les séries entières joueront un rôle fondamental. Le caractère de leur convergence est donné par le théorème suivant :

Théorème 3 (N. Abel 1826) (*). *Si une série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ *converge au point* z_0, *elle converge alors en tout point* z *plus près du centre* a *que* z_0, *de plus dans tout cercle* $|z - a| \leqslant k|z_0 - a|$, *où* $0 < k < 1$, *la série converge uniformément.*

Supposons que z soit un point arbitraire de ce dernier cercle et mettons le n-ième terme de la série sous la forme

$$c_n (z - a)^n = c_n (z_0 - a)^n \left(\frac{z - a}{z_0 - a}\right)^n.$$

(*) Niels Henrik Abel (1802-1829).

En vertu de la convergence de la série au point z_0, son terme général tend vers zéro et, par conséquent, est borné en ce point, c'est-à-dire $| c_n (z_0 - a)^n | \leqslant M$ pour tous les n. En outre, par hypothèse $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| \leqslant k$; par conséquent pour tous les n

$$|c_n (z - a)^n | \leqslant Mk^n, \quad 0 < k < 1. \tag{3}$$

D'où la convergence uniforme de la série dans le cercle $| z - a | \leqslant \leqslant k | z_0 - a |$. Puisque le nombre k peut être pris aussi voisin que l'on veut de l'unité, la convergence uniforme en tout point du cercle $| z - a | < | z_0 - a |$ est démontrée. La démonstration du théorème d'Abel est donc terminée.

Il découle du théorème d'Abel que le domaine de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ est un cercle ouvert de centre au point a (qui peut aussi dégénérer en un point ou coïncider avec le plan entier) auquel on peut éventuellement ajouter certains points de la frontière du cercle. Le rayon de ce cercle est appelé *rayon de convergence* de la série entière.

Etablissons la formule qui donne le rayon de convergence R:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{| c_n |}, \tag{4}$$

où $\overline{\lim}$ est le symbole de la limite supérieure (*). Cette formule a été trouvée par *A. Cauchy* en 1821 et elle a été utilisée d'une manière systématique par *J. Hadamard*. Elle est appelée *formule de Cauchy-Hadamard*.

Pour l'établir il faut montrer que pour z arbitraire mais tel que $| z - a | \leqslant \leqslant kR$, $0 < k < 1$, la série entière converge et pour z arbitraire vérifiant $| z - a | > R$ elle diverge. En vertu de la définition de la limite supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, nous avons

$$\sqrt[n]{| c_n |} < \frac{1}{R} + \varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ de manière que

$$\frac{1}{R} + \varepsilon < \frac{1}{R\frac{k+1}{2}},$$

alors pour $n \geqslant n_0$ et $| z - a | \leqslant kR$ nous avons:

$$| c_n (z-a)^n | < \frac{k^n R^n}{R^n \left(\frac{k+1}{2}\right)^n} = \left(\frac{2k}{k+1}\right)^n.$$

Or $\frac{2k}{k+1} < 1$, alors, d'après le théorème connu de comparaison, la série dont les termes sont les premiers membres converge.

(*) Cf. *Fikhtengoltz*, t. I, p. 107.

D'après la définition de la limite supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite infinie $n = n_k$ telle que $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon$, c'est-à-dire

$$|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| > \left\{\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)|z-a|\right\}^{n_k}.$$

Mais pour $|z-a| > R$, on peut toujours choisir ε de manière que l'on ait $\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)|z-a| > 1$, alors, pour notre suite $n = n_k$, correspondant à ε, le terme $c_{n_k}(z-a)^{n_k}$ croît indéfiniment et, par conséquent, la série entière diverge (son terme général ne tend pas vers zéro).

Les théorèmes de Weierstrass et d'Abel donnent une réponse affirmative à la question posée au n° 18.

Théorème 4. *La somme de toute série entière dans son cercle de convergence est une fonction analytique.*

En effet, soit $|z-a| < R$ le cercle de convergence de notre série entière. Dans tout cercle $|z-a| \leqslant kR$, où $0 < k < 1$, d'après le théorème d'Abel, la convergence est uniforme, et comme les termes $c_n(z-a)^n$ de la série sont des fonctions analytiques, d'après le théorème de Weierstrass, sa somme est une fonction analytique dans ce cercle. Mais comme tout point intérieur z du cercle de convergence peut être plongé dans un certain cercle $|z-a| < kR$, où $0 < k < 1$, l'analyticité de la somme de la série dans tout le cercle de convergence est démontrée.

Démontrons enfin que le théorème suivant est vrai.

Théorème 5. *Toute série entière est la série de Taylor de sa somme.*

En effet, supposons que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{5}$$

dans un cercle.

Faisant $z = a$, il vient $f(a) = c_0$. Dérivant terme à terme la série (5), puis y faisant $z = a$, il vient $f'(a) = c_1$. Dérivant successivement la série (5), puis y faisant $z = a$, nous trouvons:

$$f''(a) = 2c_2, \quad f'''(a) = 3!c_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = n!c_n.$$

Ainsi

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \tag{6}$$

et la série (5) est réellement la série de Taylor de la fonction $f(z)$.

Le théorème (5) est appelé *théorème d'unicité* du développement en série de Taylor, car il en découle que le développement d'une fonction analytique $f(z)$ en série entière, trouvé par un procédé quelconque, est le développement taylorien de cette fonction.

On peut en outre conclure à l'aide de ce théorème et du théorème du n° 18 que le rayon de convergence d'une série entière (5) coïncide avec la distance du centre a au point le plus proche en lequel la somme $f(z)$ de cette série n'est plus analytique. Par exemple le rayon de convergence des séries (6) du n° 18 est égal à l'unité, car au point $z = -1$ leurs sommes ne sont plus analytiques (dans la seconde série nous considérons évidemment a non entier).

20. Théorème d'unicité. Nous avons vu au numéro 14 qu'une fonction analytique est entièrement définie par ses valeurs sur la frontière de son domaine d'analyticité. Ici, comme complément de ce que nous venons d'énoncer, nous allons établir qu'une fonction analytique est entièrement définie par ses valeurs sur une suite de points arbitraires convergeant vers un point intérieur du domaine d'analyticité.

Commençons par un théorème relatif aux zéros des fonctions analytiques. On appelle *zéro* d'une fonction $f(z)$ tout point $z = a$ en lequel $f(z)$ prend la valeur nulle : $f(a) = 0$. Si une fonction analytique n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de son zéro a, alors tous les coefficients de sa série de Taylor de centre a ne peuvent être nuls (sinon la somme de la série serait identiquement nulle). Le plus petit numéro du coefficient non nul dans ce développement est appelé *ordre* du zéro a. Ainsi, au voisinage d'un zéro d'ordre n, le développement taylorien d'une fonction est de la forme

$$f(z) = c_n (z - a)^n + c_{n+1}(z - a)^{n+1} + \ldots, \qquad (1)$$

où $c_n \neq 0$ et $n \geqslant 1$.

Evidemment *l'ordre d'un zéro a peut aussi être défini comme le plus petit ordre de la dérivée* $f^{(n)}(a)$ *non nulle.*

Il est clair aussi que la fonction analytique $f(z)$ admet dans un voisinage d'un zéro d'ordre n la représentation suivante

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z), \qquad (2)$$

où la fonction

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z - a) + \ldots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0 \qquad (3)$$

est analytique dans un voisinage du point a (puisqu'elle est représentée par une série entière convergente).

En vertu de la continuité de $\varphi(z)$, cette fonction est différente de zéro partout dans un certain voisinage du point a. D'où il découle le théorème suivant :

T h é o r è m e 1. *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un voisinage d'un zéro a et non identiquement nulle dans aucun de ses voisinages. Il existe alors un voisinage du point a dans lequel $f(z)$ n'a pas de zéros autres que a.*

Le *théorème d'unicité* de la théorie des fonctions analytiques, dont il a été question au début de ce numéro, découle du théorème que l'on vient de démontrer.

Théorème 2. *Si des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont analytiques dans un domaine D et si leurs valeurs coïncident sur une suite de points a_n convergeant vers a, un point intérieur du domaine D, alors nous avons partout dans D*

$$f_1(z) \equiv f_2(z).$$

Pour démontrer ce théorème considérons la fonction

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

Elle est analytique dans D, les points a_n sont ses zéros et par suite le point a aussi, car, en vertu de la continuité, $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$. Il en découle que $f(z)$ est identiquement nulle dans un certain voisinage de a, car dans le cas contraire le théorème 1 qui vient d'être démontré cesserait d'être vrai. Ainsi, l'ensemble de tous les zéros d'une fonction $f(z)$ possède au moins un point intérieur.

Désignons par $\mathfrak{E}$ l'ensemble de tous les points intérieurs de l'ensemble des zéros de la fonction $f(z)$. Si $\mathfrak{E}$ coïncide avec D, le théorème est démontré. Si $\mathfrak{E}$ est un sous-domaine de D, nous pouvons alors trouver un point frontière b de l'ensemble $\mathfrak{E}$ qui soit un point intérieur de D. Il existe une suite de points b_n de l'ensemble $\mathfrak{E}$ qui converge vers b; en vertu de la continuité de $f(z)$, le point b est un zéro de $f(z)$. D'autre part, $f(z)$ n'est identiquement nulle dans aucun voisinage du point b, car alors b serait un point intérieur et non un point frontière de l'ensemble $\mathfrak{E}$. D'après le théorème 1 il en découle que dans un certain voisinage du point b il n'y a aucun zéro de $f(z)$, mais ceci est en contradiction avec le fait que b est un point frontière de $\mathfrak{E}$. La contradiction ainsi obtenue démontre le théorème d'unicité.

Il découle du théorème d'unicité qu'une fonction $f(z)$ analytique dans un domaine et non identiquement nulle ne peut s'annuler dans aucun sous-domaine de D, sur aucun arc de courbe appartenant à D et même sur aucune suite de points de D convergeant vers un point intérieur à D.

Toutefois, il est facile de donner un exemple dans lequel la suite infinie des zéros de la fonction converge vers un point frontière de son domaine d'analyticité: la fonction $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ s'annule pour les points de la suite $z_n = \frac{1}{\pi n} (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ qui converge vers le point $z = 0$.

21. Séries de Laurent. La série de Taylor est un instrument commode pour représenter les fonctions analytiques dans les domai-

nes circulaires. Néanmoins, il est très important de pouvoir les représenter dans des domaines d'une autre forme. Par exemple, pour l'étude des fonctions analytiques dans un voisinage d'un point a, excepté le point a, on a besoin de considérer des domaines qui ont la forme de couronnes telles que $0 < |z-a| < R$. Il s'avère que pour les fonctions analytiques dans les couronnes telles que $r < |z-a| < R$, où $r \geqslant 0$, $R \leqslant \infty$, on peut construire un développement, suivant les puissances positives et négatives de $(z-a)$, de la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

qui est une généralisation du développement taylorien. Nous allons considérer maintenant de tels développements.

Ainsi, soit $f(z)$ une fonction analytique dans une couronne $K: r < |z-a| < R$ où $r \geqslant 0$, $R \leqslant \infty$. Choisissons des nombres r' et R' de manière que $r < r' < R' < R$, ainsi qu'un nombre k, $0 < k < 1$, et considérons la couronne $\frac{r'}{k} < |z-a| < kR'$. Nous pouvons représenter $f(z)$ en un point intérieur arbitraire z de cette couronne à l'aide de la formule de Cauchy (n° 14) qui dans notre cas prend la forme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{2}$$

où les deux circonférences, $C: |\zeta - a| = R'$ et $c: |\zeta - a| = r'$, sont parcourues dans le sens positif.

Pour la première intégrale nous avons $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < k\frac{R'}{R'} = k < 1$, par conséquent, la fraction qui y figure peut être développée en progression géométrique convergeant uniformément sur C par rapport à ζ

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta-a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} + \ldots$$

Multipliant ce développement par $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ et intégrant terme à terme par rapport à ζ (ce qui est possible en vertu de la convergence uniforme), nous obtenons le développement en série entière de la première intégrale dans la formule (2):

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3}$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Remarquons que l'expression (4) ne peut être représentée, comme dans le numéro 18, sous la forme $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ puisque $f(z)$ n'est en général pas analytique au point a.

Pour la deuxième intégrale nous avons:

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < \frac{kr'}{r'} = k < 1,$$

par conséquent, la progression

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} =$$

$$= -\frac{1}{z - a} - \frac{\zeta - a}{(z - a)^2} - \frac{(\zeta - a)^2}{(z - a)^3} - \ldots - \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z - a)^n} - \ldots$$

converge uniformément.

Comme plus haut, nous trouvons le développement de la seconde intégrale de la formule (2) sous la forme d'une série, mais, cette fois-ci, suivant les puissances négatives de $(z - a)$:

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n}, \tag{5}$$

où

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Remplaçons dans les formules (5) et (6) l'indice $-n$, où n prend les valeurs 1, 2, . . ., par l'indice n qui parcourt les valeurs -1, -2, . . . ; en réunissant les deux développements (3) et (5) nous trouvons:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \tag{7}$$

D'après le numéro 13, on peut remplacer dans les formules (4) et (6) les circonférences C et c par une circonférence quelconque $\gamma: |\zeta - a| = \rho$, où $r' < \rho < R'$. Pour cette dernière raison, les formules (4) et (6) peuvent être réunies:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8}$$

Le développement (7) que l'on vient d'obtenir pour la fonction $f(z)$, suivant les puissances positives et négatives de $(z - a)$, avec des coefficients définis par les formules (8), est appelé *développement de Laurent* de la fonction $f(z)$, de centre au point a; la série (3) est appelée *partie régulière*, la série (5) *partie principale* de ce développement.

Puisque, dans notre raisonnement, r' et R' peuvent être pris aussi voisins que l'on veut de r et R et que k peut différer aussi peu qu'on le veut de l'unité, le développement (7) peut être considéré établi pour tous les points z de la couronne d'analyticité de la fonction $f(z)$.

D'après le théorème d'Abel, la partie régulière de la série de Laurent converge partout dans le cercle $|z - a| < R$, de plus dans tout cercle $|z - a| < kR$ $(0 < k < 1)$ elle converge uniformément. La partie principale est une série entière par rapport à la variable $Z = \frac{1}{z-a}$; par conséquent, d'après ce même théorème elle converge pour $|Z| < \frac{1}{r}$, c'est-à-dire partout à l'extérieur du cercle $|z - a| > r$; de plus pour $|z - a| > \frac{r}{k}$, $0 < k < 1$, la convergence est également uniforme.

Ainsi on a démontré le théorème suivant:

Théorème 1. (P. Laurent, 1843 (*)). *Dans toute couronne* K: $r < |z - a| < R$, *une fonction* $f(z)$ *qui y est analytique peut être représentée par sa série de Laurent* (7) *uniformément convergente sur tout domaine fermé appartenant à la couronne* K.

Exactement comme au numéro 17, nous obtenons, à l'aide de la formule (8), pour les coefficients de la série de Laurent les *inégalités* suivantes *de Cauchy*: si une fonction $f(z)$ est bornée sur la circonférence $|z - a| = \rho$, soit $|f(z)| \leqslant M$, alors

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{9}$$

Remarquons enfin que le domaine de convergence de toute série de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

(*) Simultanément à Pierre Laurent (1813-1854), ce théorème a été obtenu en 1841 par K. Weierstrass qui ne le publia néanmoins qu'en 1894. On rencontre des séries de la forme (7) dans un article de *L. Euler* (1748).

est toujours une couronne circulaire (*) de la forme $r < |z-a| < R$, où $0 \leqslant r \leqslant \infty$, $0 \leqslant R \leqslant \infty$.

On peut s'en convaincre facilement à l'aide du théorème d'Abel en considérant dans cette série ses parties régulière et principale. Dans le cas $r < R$, le théorème suivant est vrai :

Théorème 2. *Si une série*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{10}$$

converge dans une couronne $r < |z-a| < R$, *alors sa somme* $f(z)$ *est analytique dans cette couronne et le développement* (10) *est la série de Laurent de la fonction* $f(z)$.

En effet, l'analyticité de $f(z)$ se démontre à l'aide des théorèmes d'Abel et de Weierstrass de la même manière que dans le théorème 4 du numéro précédent. Sur toute circonférence γ : $|z-a| = \rho$, où $r < \rho < R$, la série (10) converge uniformément et elle reste convergente après l'avoir multipliée par $(z-a)^{-n+1}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Si on intègre le développement

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n-1}$$

sur la circonférence γ et si on utilise les relations

$$\int_{\gamma} (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1, \end{cases} \tag{11}$$

facilement démontrables pour tout entier n (comparer avec l'établissement de la formule (4) du n° 13), on obtient alors les expressions des coefficients de la série (10) :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz,$$

qui coïncident avec les expressions (8). Par conséquent, la série (10) est la série de Laurent de la fonction $f(z)$ et le théorème 2 est démontré.

Le théorème 2 est un théorème d'unicité du développement en série de Laurent, car il en découle que le développement d'une fonction analytique en série suivant les puissances positives et négatives de $(z-a)$, obtenu par un procédé quelconque, est le développement de Laurent de cette fonction.

(*) Il peut se faire que cette couronne soit vide si $r \geqslant R$ et dans le cas $r = R$ l'ensemble de convergence peut coïncider avec un ensemble de points de la circonférence $|z-a| = r$.

22. Points singuliers. L'appareil de développement en série de Laurent exposé plus haut (n° 21) nous permet d'étudier complètement le comportement des fonctions analytiques dans un voisinage de points des types les plus simples en lesquels ces fonctions ne sont plus analytiques. De tels points sont appelés des points singuliers isolés. Le point a est dit *point singulier isolé* d'une fonction $f(z)$ s'il existe un voisinage $0 < |z - a| < R$ de ce point (excepté le point a) dans lequel $f(z)$ est analytique. Soulignons qu'il s'agit des points du voisinage en lesquels la fonction est *uniforme* (la condition d'uniformité est incluse dans celle d'analyticité, cf. n° 5). Il sera question au n° 25 des points singuliers de caractère multiforme.

On distingue trois types de points singuliers isolés selon le comportement de la fonction $f(z)$ au voisinage de ceux-ci.

1) On dit que le point a est un *point singulier éliminable* si la limite $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ existe et est finie,

2) on dit que le point a est un *pôle* si $f(z)$ est infiniment grand lorsqu'on tend vers a, c'est-à-dire si la limite $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ (ceci signifie que $|f(z)|$ croît indéfiniment lorsque $z \to a$) et, enfin,

3) le point a est dit *point singulier essentiel* si la limite $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ n'existe pas.

Exposons les propriétés fondamentales des fonctions en rapport avec leurs points singuliers. Si a est un point singulier isolé d'une fonction $f(z)$, alors, d'après le théorème 1 du n° 21, cette fonction peut être développée en série de Laurent dans la couronne d'analyticité $0 < |z - a| < R$:

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \qquad (1)$$

Ce développement varie en fonction du caractère du point singulier. Donnons ici trois théorèmes correspondants.

Théorème 1. *Pour qu'un point a soit un point singulier éliminable de la fonction $f(z)$, il faut et il suffit que le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage du point a ne contienne pas de partie principale.*

Il est évident que si le développement en série de Laurent de $f(z)$ ne contient pas de partie principale, c'est-à-dire si $f(z)$ est représentée par la série entière

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots, \qquad (2)$$

alors la limite $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$ (*) existe et a est un point singulier éliminable.

(*) D'après le théorème 4 du n° 19 le second membre de (2) est analytique au point $z = a$ et, par conséquent, il est continu et sa limite, lorsque $z \to a$, est égale à la somme de la série au point a, c'est-à-dire à c_0.

Supposons inversement que a soit un point singulier éliminable de la fonction $f(z)$. Alors, en vertu de ce que $\lim_{z\to a} f(z)$ existe et est finie, la fonction $f(z)$ est bornée dans un voisinage de a; supposons que $|f(z)| \leqslant M$.

Utilisons les inégalités de Cauchy du n° 21

$$|c_n| \leqslant M\rho^{-n};$$

puisque le nombre ρ peut être choisi aussi petit que l'on veut, il est évident que tous les coefficients c_n correspondant aux indices négatifs sont nuls et le développement en série de Laurent de $f(z)$ ne contient pas de partie principale. Le théorème est démontré.

Remarque. En fait, nous avons démontré une proposition beaucoup plus forte : *si une fonction $f(z)$ est bornée dans un voisinage d'un point singulier isolé a, alors a est un point singulier éliminable de cette fonction.*

On voit donc que le terme « point singulier éliminable » est justifié : en effet, un tel point singulier peut être « éliminé » en posant $f(a) = \lim_{z\to a} f(z) = c_0$; après quoi la fonction $f(z)$ devient aussi analytique au point a, car dans tout le cercle $|z - a| < R$ elle est représentée par une série entière convergente (2) (cf. le théorème 4 du n° 19).

Passons au cas des pôles. Il découle de la définition du pôle a que $f(z)$ est différente de zéro dans un certain voisinage de ce pôle : $0 < |z - a| < R'$, où $R' \leqslant R$. Dans ce voisinage la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ est analytique et il est clair que l'on a $\lim_{z\to a} g(z) = 0$. Par conséquent, d'après le théorème précédent, a est un point singulier éliminable de $g(z)$ et, en posant $g(a) = 0$, nous voyons que a est un zéro de la fonction $g(z)$. Inversement, si $g(z)$ a un zéro au point a (et n'est pas identiquement nulle), alors la fonction $f(z) = \frac{1}{g(z)}$, d'après le théorème 1 du n° 20, est analytique dans un certain voisinage $0 < |z - a| < R$ du point a ; il est clair que $f(z)$ a un pôle au point a.

Ainsi, les zéros et les pôles des fonctions analytiques sont liés entre eux d'une manière très simple. Convenons d'appeler *ordre d'un pôle a* de la fonction $f(z)$ l'ordre du zéro a de la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Théorème 2. *Pour qu'un point a soit un pôle d'une fonction $f(z)$, il faut et il suffit que la partie principale du développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de a ne contienne qu'un nombre fini de termes :*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k. \qquad (3)$$

De plus, le plus grand indice négatif du développement coïncide avec l'ordre du pôle.

Supposons que a soit un pôle d'ordre n de la fonction $f(z)$. Alors la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, $g(a) = 0$, a un zéro d'ordre n au point a et, conformément au n° 20, dans le voisinage du point a elle peut être représentée sous la forme

$$g(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est analytique et $\varphi(a) \neq 0$. Dans ce voisinage

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}. \tag{4}$$

Mais la fonction $\frac{1}{\varphi(z)}$ est analytique dans un voisinage $|z-a| < R$ du point a, elle y est donc développable en série de Taylor

$$\frac{1}{\varphi(z)} = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \ldots + c_0(z-a)^n + \ldots,$$

où $c_{-n} = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0$. Substituant ce développement dans la formule (4), nous trouvons le développement cherché (3) valable dans le voisinage $0 < |z-a| < R$.

Inversement, supposons maintenant que dans un voisinage $0 < |z-a| < R$ du point a, on a le développement (3), de plus $c_{-n} \neq 0$. Alors la fonction $\psi(z) = (z-a)^n f(z)$, $\psi(a) = c_{-n}$, est représentée par la série de Taylor dans le cercle $|z-a| < R$

$$\psi(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \ldots, \tag{5}$$

c'est-à-dire qu'elle est analytique. Puisque $\lim\limits_{z \to a} \psi(z) = c_{-n} \neq 0$, on a

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{\psi(z)}{(z-a)^n} = \infty,$$

et le point a est un pôle de la fonction $f(z)$. Il est clair que la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^n}{\psi(z)}$ a au point a un zéro d'ordre n, par conséquent, l'ordre du pôle a est n. Le théorème est démontré.

Le théorème suivant découle immédiatement des théorèmes qui viennent d'être démontrés.

T h é o r è m e 3. *Un point a est un point singulier essentiel d'une fonction $f(z)$ si, et seulement si, la partie principale du développement en série de Laurent de cette fonction dans un voisinage du point a contient une infinité de termes.*

Le comportement d'une fonction dans un voisinage d'un point singulier essentiel est donné par le théorème suivant.

Théorème 4. (J. Sokhotski (*), 1868). *Si a est un point singulier essentiel d'une fonction $f(z)$, alors, pour tout nombre complexe A, il existe une suite de points $z_k \to a$ telle que* $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = A$.

Il existe avant tout une suite $z_k \to a$ pour laquelle $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = \infty$, car dans le cas contraire $f(z)$ serait bornée dans un voisinage de a et le point a un point singulier éliminable (cf. la remarque du théorème 1). Supposons qu'on se donne maintenant un nombre complexe quelconque A. L'un des deux cas suivants a lieu : 1) il existe, dans tout voisinage du point a, un point z pour lequel $f(z) = A$. Alors le théorème de Sokhotski est démontré, car on peut construire avec de tels points une suite $z_k \to a$ de sorte que $f(z_k) = A$, ce qui signifie que $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = A$ et 2) dans un voisinage du point a la fonction $f(z)$ ne prend pas la valeur A.

Dans le second cas la fonction $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-A}$ est analytique dans le voisinage mentionné. Le point a ne peut être ni un pôle, ni un point singulier éliminable de cette fonction, car dans ces cas la limite $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a}\left(A + \dfrac{1}{g(z)}\right)$ serait finie ou infinie. Par conséquent, a est un point singulier essentiel de la fonction $g(z)$ et, en vertu de ce qui vient d'être démontré, il existe une suite $z_k \to a$ pour laquelle $\lim\limits_{k\to\infty} g(z_k) = \infty$. Il est clair que pour cette suite

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty}\left(A + \frac{1}{g(z_k)}\right) = A,$$

et le théorème de Sokhotski est démontré.

Le théorème de Sokhotski et les théorèmes précédents de ce numéro permettent d'affirmer que, dans un voisinage d'un point singulier isolé, une fonction analytique tend vers une limite définie (finie ou infinie), ou bien elle est entièrement indéterminée, c'est-à-dire qu'elle tend (suivant différentes suites) vers une limite arbitraire donnée préalablement. Aucun cas intermédiaire ne peut avoir lieu.

Donnons plusieurs exemples de fonctions élémentaires ayant des points singuliers de différents types.

1) Les fonctions

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{1-e^z}{z}, \quad \frac{1-\cos z}{z^2}$$

ont l'origine des coordonnées comme point singulier éliminable. On s'en convainc très facilement en utilisant les développements tayloriens connus (5) du n° 18

(*) D'ordinaire ce théorème est attribué à Weierstrass ; toutefois il a été démontré dans la thèse du mathématicien russe *Julian Sokhotski* (1842-1929) et a été publié huit ans avant l'apparition du travail de Weierstrass. L'Italien *F. Casorati* l'a obtenu simultanément avec Sokhotski.

et le théorème 1 de ce numéro. Par exemple, on a pour tout $z \neq 0$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

2) La fonction $f(z) = \dfrac{1}{e^{z^2}+1}$ possède un ensemble infini de pôles aux points $z = \pm\sqrt{(2k+1)\pi i}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, en lesquels le dénominateur s'annule (ces points se trouvent sur les deux bissectrices des quarts de plan). Tous les pôles sont du premier ordre, puisque la fonction $\dfrac{1}{f(z)} = e^{z^2} + 1$ a ces points pour zéros d'ordre un (sa dérivée $2ze^{z^2}$ est différente de zéro en ces points).

3) Les fonctions

$$e^{\frac{1}{z}}, \quad \sin\frac{1}{z}, \quad \cos\frac{1}{z}$$

ont un point singulier essentiel à l'origine des coordonnées. On l'établit facilement en substituant $\dfrac{1}{z}$ à z dans le développement taylorien (5) du n° 18 et en ayant recours au théorème 3 du n° 22 (par exemple pour $z \neq 0$ quelconque, on a $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^2} + \dots$).

Vérifions par exemple le théorème de Sokhotski pour la première fonction. Pour $A = \infty$, la suite z_k du théorème est $z_k = \dfrac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, car il est clair que $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^k = \infty$. Pour $A = 0$, on peut prendre $z_k = -\dfrac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, car alors $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-k} = 0$. Enfin pour $A \neq 0$ fini, prenons $z_k = \dfrac{1}{\ln A + 2k\pi i}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, alors $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\ln A + 2k\pi i} = A$ (ln désigne une détermination quelconque du logarithme).

4) La fonction

$$f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z^2}} + 1}$$

a l'origine des coordonnées comme point singulier non isolé, car ses pôles $z_k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi i}}$ ont l'origine des coordonnées comme point d'adhérence (comparer avec l'exemple 2).

D'après le caractère des points singuliers on définit deux classes simples de fonctions analytiques uniformes :

1) Fonctions entières. Une fonction $f(z)$ est dite fonction *entière* (ou *holomorphe*) si elle ne possède aucun point singulier (*). En vertu du théorème du n° 18 on peut afirmer que chaque

(*) Ici et dans la définition à venir il est question des points du plan *à distance finie* ; nous ne l'avons pas souligné dans le texte fondamental puisque la notion de point à l'infini sera donnée plus tard (n° 24).

fonction entière peut être représentée par la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergente dans tout le plan (et inversement chaque fonction représentée par une série entière convergente dans le plan entier est une fonction entière). Tous les polynômes, la fonction exponentielle, sin z, cos z et autres sont des fonctions entières. Il est clair que la somme, la différence et le produit de fonctions entières sont de nouveau des fonctions entières.

2) Fonctions méromorphes. Une fonction $f(z)$ est dite fonction *méromorphe* si ses seules singularités sont des pôles. Il découle de cette définition que dans tout domaine borné une fonction méromorphe ne peut posséder qu'un nombre fini de pôles. En effet, si dans un tel domaine il y en avait une infinité, il existerait alors une suite de pôles convergeant vers un point a, qui serait un point singulier non isolé et non un pôle. Dans tout le plan les pôles peuvent former un ensemble infini. Toutes les fonctions entières, les fonctions rationnelles, les fonctions trigonométriques et autres sont des exemples de fonctions méromorphes. Il est clair que la somme, la différence, le produit et le quotient des deux fonctions méromorphes et en général une fonction rationnelle quelconque $R(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de fonctions méromorphes sont de nouveau des fonctions méromorphes.

On donnera au chapitre V une étude détaillée des fonctions entières et méromorphes.

23. Théorème des résidus. Principe de l'argument. Nous introduisons ici la notion de résidu (*), très importante pour les applications ultérieures, et nous démontrons plusieurs théorèmes de caractère général s'y rapportant ; nous considérons des exemples de calcul des résidus et diverses applications principalement dans les chapitres V et VI.

On appelle *résidu* de la fonction $f(z)$ au point singulier isolé a et on le note Res (f, a) le nombre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz, \tag{1}$$

où γ est une circonférence $|z - a| = \rho$ suffisamment petite, décrite de manière que le voisinage du point $z = a$ se trouve à gauche du sens de parcours. En vertu du n° 13 la valeur du résidu ne dépend pas de la quantité ρ pour les ρ suffisamment petits.

Des formules (8), données au n° 21 pour les coefficients de la série

(*) La notion de résidu a été introduite par Cauchy dans son « Mémoire sur les intégrales définies » (1814) ; il a donné aussi dans ses « Exercices mathématiques » (1826-1829) de nombreuses applications de cette notion en analyse. Dans ses travaux Cauchy a indiqué qu'il est arrivé à la notion de résidu en développant une idée d'Euler.

de Laurent, il vient immédiatement pour $n = -1$

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz = c_{-1}, \tag{2}$$

c'est-à-dire que le *résidu d'une fonction $f(z)$ au point singulier a est égal au coefficient de la première puissance négative dans le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage du point a.*

Il en découle qu'en un point singulier éliminable le résidu de la fonction est toujours nul. La formule suivante

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \tag{3}$$

facilite le calcul du résidu en un pôle d'ordre n. Pour l'établir, il suffit de multiplier le développement en série de Laurent

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \ldots$$

par $(z-a)^n$ et de dériver $n-1$ fois l'égalité obtenue, puis de passer à la limite pour $z \to a$ (la substitution $z = a$ dans l'expression de la dérivée n'est pas permise puisque a est un point singulier de $f(z)$).

Pour les pôles du premier ordre la formule (3) a une forme particulièrement simple :

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} \{(z-a) f(z)\}. \tag{4}$$

De plus si, dans un voisinage du point a, $f(z)$ est définie comme le quotient de deux fonctions analytiques en ce point :

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

avec $\varphi(a) \neq 0$, et si $\psi(z)$ a en a un zéro du premier ordre (c'est-à-dire $\psi(a) = 0$ et $\psi'(a) \neq 0$), alors la formule (4) peut être remplacée par la suivante :

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} (z-a) = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \tag{5}$$

Exemple. La fonction méromorphe $\operatorname{ctg} z^2$ a des pôles du premier ordre aux points $z = \pm\sqrt{\pm k\pi}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) et un pôle du second ordre au point $z = 0$ (on le constate facilement en considérant les zéros de la fonction $\operatorname{tg} z^2$). D'après la formule (3), le résidu au point $z = 0$ est égal à

$$\lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} (z^2 \operatorname{ctg} z^2) = \lim_{z \to 0} \frac{z \sin 2z^2 - 2z^3}{\sin^2 z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{-\frac{4}{3} z^7 + \ldots}{z^4 - \ldots} = 0 \ (*)$$

(on le voit également de ce que le développement en série de Laurent de $\operatorname{ctg} z^2$, de centre au point $z = 0$, ne contient que des puissances paires de z). Le résidu

(*) Nous avons remplacé le numérateur et le dénominateur par les premiers termes de leur développement taylorien au voisinage du point $z = 0$.

au point $z = \pm\sqrt{\pm k\pi}$, d'après la formule (5), où l'on pose $\varphi = \cos z^2$, $\psi = \sin z^2$, est égal à

$$\frac{\cos z^2}{2z \cos z^2} = \frac{1}{2z} = \pm \frac{1}{2\sqrt{\pm k\pi}}.$$

L'application de la théorie des résidus est basée essentiellement sur l'important *théorème des résidus.*

Théorème 1 (A. Cauchy, 1825). *Soit $f(z)$ une fonction continue sur la frontière* (*) *C d'un domaine D et partout analytique dans ce domaine, sauf en un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Alors*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k), \qquad (6)$$

où la frontière C est décrite de manière que le domaine D se trouve à gauche du sens de parcours

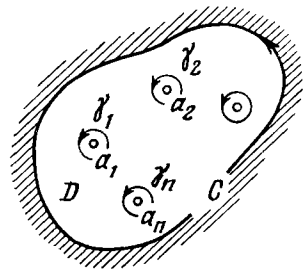

FIG. 26

La démonstration découle du théorème de Cauchy pour les domaines multiplement connexes (n° 13). Décrivons autour de chaque point a_k une circonférence γ_k : $|z - a_k| = \rho_k$, suffisamment petite pour que toutes ces circonférences appartiennent au domaine D et soient deux à deux disjointes (fig. 26). Vu que $f(z)$ est analytique dans le domaine D^* limité par la courbe C et l'ensemble de circonférences γ_k et continue sur $\overline{D}^*$, d'après le théorème cité

$$\int_C f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^-} f(z)\,dz = 0,$$

où tous les γ_k^- sont parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre. Changeant le sens de parcours sur les circonférences γ_k et usant de la définition du résidu (1) conformément à laquelle

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_k),$$

nous en déduisons le résultat (6).

(*) Ici et dans la suite la continuité de $f(z)$ sur la frontière du domaine est comprise au sens de la continuité *par rapport au domaine*, c'est-à-dire dans ce sens qu'en tout point z_0 de la frontière, la limite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0)$$

existe, en outre z tend vers z_0 par les points du domaine D.

L'importance de principe du théorème des résidus est qu'il permet de ramener le calcul d'une quantité « globale », telle que l'intégrale d'une quantité finie prise le long d'un contour fermé, au calcul d'une quantité « locale », des quantités différentielles telles que les résidus. En effet, les résidus se calculent au moyen d'intégrales prises le long de contours infiniment petits et même au moyen d'un simple passage à la limite (formules (3), (4) et (5)). La méthode de réduction du calcul des quantités « globales » au calcul des quantités différentielles est usuelle en analyse mathématique (cf. le calcul des intégrales au moyen des primitives qui en substance sont définies au moyen de dérivées connues). Le chapitre V est consacré aux applications de la théorie des résidus.

Arrêtons-nous encore sur la notion de résidu logarithmique. Le *résidu logarithmique* d'une fonction analytique $f(z)$ au point a est par définition le résidu de sa dérivée logarithmique

$$\{\ln f(z)\}' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Il est clair qu'il y a un sens de parler de résidus logarithmiques non seulement aux points singuliers, mais aussi aux zéros de $f(z)$. Si un point a est un zéro d'ordre n de $f(z)$, alors au voisinage de ce point

$$f(z) = c_n (z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots, \quad c_n \neq 0,$$

donc

$$f'(z) = nc_n (z-a)^{n-1} + (n+1) c_{n+1} (z-a)^n + \ldots$$

et la dérivée logarithmique

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{nc_n + (n+1) c_{n+1}(z-a) + \ldots}{c_n + c_{n+1}(z-a) + \ldots}.$$

Ici le second facteur est une fonction analytique au point a, car $c_n \neq 0$, donc elle se développe en série de Taylor de centre au point a (le terme indépendant de z de cette série est égal à n) et

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a}\{n + d_0(z-a) + d_1(z-a)^2 + \ldots\} =$$

$$= \frac{n}{z-a} + d_0 + d_1(z-a) + \ldots \qquad (7)$$

Nous avons établi le développement en série de Laurent de la dérivée logarithmique $\{\ln f(z)\}'$ au voisinage du point $z = a$, d'où l'on voit que le point a est un pôle du premier ordre de résidu n.

Soit a un pôle d'ordre n de $f(z)$. Puisque la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ a au point a un zéro d'ordre n et vu que $\{\ln f(z)\}' = -\{\ln g(z)\}'$, d'après ce que nous venons de démontrer, le point a est un pôle du premier ordre, de résidu $-n$, pour la dérivée logarithmique $\{\ln f(z)\}'$. Ainsi, on a démontré le théorème suivant.

Théorème 2. *Aux zéros et aux pôles d'une fonction* $f(z)$, *la dérivée logarithmique* $\frac{f'(z)}{f(z)}$ *possède des pôles du premier ordre. De plus, en un zéro, le résidu logarithmique est égal à l'ordre du zéro, en un pôle à l'ordre du pôle précédé du signe moins.*

Le théorème 2 et le théorème des résidus permettent d'appliquer les résidus logarithmiques pour le calcul du nombre des zéros et des pôles d'une fonction analytique dans des domaines donnés.

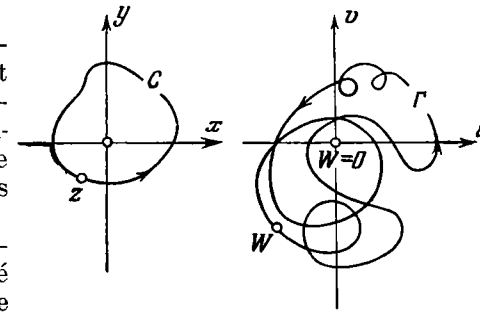

FIG. 27

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine borné D, sauf en un nombre fini de pôles $b_1, b_2, \ldots, b_m$ respectivement d'ordre de multiplicité $p_1, p_2, \ldots, p_m$, continue et ne s'annulant pas sur la frontière C de ce domaine ; de plus $f'(z)$ est continue sur C. Alors, la fonction $f(z)$ n'a dans D qu'un nombre fini de zéros, car, dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de zéros convergeant vers un point intérieur ou frontière du domaine D, mais cette suite ne peut converger ni vers un point intérieur (d'après le théorème d'unicité du n° 20), ni vers un point frontière (parce que $f(z) \neq 0$ et est continue sur C). Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_l$ les zéros respectivement d'ordre de multiplicité $n_1, n_2, \ldots, n_l$ de la fonction $f(z)$ dans ce domaine D. Appliquant le théorème des résidus et le théorème 2 à la dérivée logarithmique de $f(z)$, il vient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = (n_1 + \ldots + n_l) - (p_1 + \ldots + p_m) = N - P, \qquad (8)$$

où N et P désignent respectivement le nombre des zéros et des pôles de cette fonction. En outre, chaque zéro et chaque pôle est compté autant de fois que son ordre l'indique. Elucidons le sens géométrique du premier membre de cette égalité. On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\ln f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\ln|f(z)| + \frac{1}{2\pi}\int_C d\arg f(z), \qquad (9)$$

où ln et arg désignent des branches quelconques de ces fonctions, qui sont continues sur C. Etant donné que la fonction $\ln|f(z)|$ reprend sa valeur initiale lorsqu'on décrit le contour fermé C, la première intégrale dans le second membre de (9) est nulle. D'autre part, si le point $w = 0$ est intérieur au contour décrit par le point $w = f(z)$, quand z décrit C, alors la valeur finale de $\arg f(z)$ peut être différente de la valeur initiale (fig. 27), et la deuxième intégrale

est non nulle. La quantité

$$\frac{1}{2\pi}\int_C d\arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

est la variation totale de l'argument de la fonction $f(z)$, lorsqu'on décrit C, divisée par 2π ; du point de vue géométrique, elle représente le *nombre des rotations* exécutées autour de l'origine des coordonnées $w = 0$ par le vecteur $f(z)$ lorsqu'on décrit C entièrement ou, ce qui revient au même, par le vecteur w lorsqu'on décrit la courbe Γ, image de C par la transformation $w = f(z)$ (sur la fig. 27, ce nombre est égal à l'unité). Les relations (8) et (9) expriment le *principe de l'argument* :

Théorème 3. *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D, sauf en un nombre fini de pôles, continue sur la frontière C de ce domaine et ne s'annulant pas sur C ; supposons encore que $f'(z)$ est continue sur C. Alors la différence entre le nombre des zéros et le nombre des pôles de cette fonction dans D est égale au nombre des rotations du vecteur w lorsqu'il décrit la courbe Γ, image de C par la transformation $w = f(z)$, ou, ce qui revient au même, à la somme des résidus logarithmiques de $f(z)$ dans D :*

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \qquad (10)$$

Nous exposerons au n° 75 d'autres résultats concernant le calcul du nombre des zéros et des pôles des fonctions et leurs importantes applications. Nous ne donnons ici qu'une forme modifiée de la formule (8), qui tient compte non seulement du nombre des zéros et des pôles mais aussi de leur position.

En plus de la fonction $f(z)$ qui satisfait aux conditions du principe de l'argument, considérons une fonction $\varphi(z)$ analytique dans D et continue sur $\overline{D}$. Les points singuliers de la fonction $g(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ ne peuvent évidemment être que les zéros et les pôles de $f(z)$; de plus, au voisinage de chacun de ces points c, elle admet un développement de la forme

$$g(z) = \{\varphi(c) + \ldots\}\left\{\pm\frac{n}{z-c} + \ldots\right\} = \pm\frac{n\varphi(c)}{z-c} + \ldots$$

(cf. théorème 2), où le signe plus se rapporte au cas où le point c est un zéro de $f(z)$ et le signe moins au cas d'un pôle. On voit que le résidu de $g(z)$ au point c est égal à $\pm\varphi(c)\,n$ et, remplaçant dans la relation (8) la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ par la fonction $g(z)$, il vient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz =$$
$$= n_1\varphi(a_1) + \ldots + n_l\varphi(a_l) - p_1\varphi(b_1) - \ldots - p_m\varphi(b_m). \qquad (11)$$

Faisant en particulier $\varphi(z) \equiv z$, nous avons

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{l} n_k a_k - \sum_{k=1}^{m} p_k b_k. \tag{12}$$

Le second membre est ici la différence entre la somme de tous les zéros et la somme de tous les pôles de la fonction $f(z)$ dans un domaine D, de plus chaque zéro ou chaque pôle participe dans cette somme autant de fois que son ordre l'indique.

Au lieu de la fonction $f(z)$ considérons maintenant la fonction $g(z) = f(z) - a$, où a est un nombre complexe fixe ; les pôles de $g(z)$ coïncident avec les pôles de $f(z)$ et les zéros sont des *a-points* de la fonction $f(z)$, c'est-à-dire des points en lesquels $f(z)$ prend la valeur a. Si la fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine D, excepté en un nombre fini de pôles, et si elle est continue et ne prend pas la valeur a sur la frontière C de ce domaine (de plus $f'(z)$ est continue sur C), on peut alors appliquer les formules (10) et (12) à la fonction $g(z) = f(z) - a$.

Nous avons alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)-a}\, dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - a\} = \sum_{k=1}^{l} n_k - \sum_{k=1}^{m} p_k, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)-a}\, dz = \sum_{k=1}^{l} n_k a_k - \sum_{k=1}^{m} p_k b_k, \tag{14}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_l$ sont des a-points de la fonction $f(z)$ dans un domaine D respectivement d'ordre (*) $n_1, n_2, \ldots, n_l$ et $b_1, b_2 \ldots, b_m$ ses pôles respectivement d'ordre $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Nous aurons besoin de ces formules dans le chapitre VII.

24. Point à l'infini. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les points du plan complexe qui se trouvaient à distance finie. Cependant, pour l'étude de certaines questions il est utile d'introduire le point à l'infini. Il est préférable de le faire au moyen de la *projection stéréographique* du plan des z sur une sphère tangente au pôle sud au plan. Cette projection établit une correspondance entre chaque point z du plan complexe et un point Z de la sphère qui est le point d'intersection de la sphère et du rayon réunissant le point z au pôle nord de la sphère (fig. 28). La projection stéréographique définit donc une correspondance biunivoque entre le plan complexe et la sphère pointée, c'est-à-dire la sphère de laquelle on a retranché le pôle nord. Les points Z sont les représentations sphériques des nombres complexes z et la sphère elle-même est dite *numérique*.

(*) On appelle ordre d'un a-point de $f(z)$ l'ordre du zéro correspondant de la fonction $f(z) - a$.

Pour prolonger cette correspondance à toute la sphère on introduit sur le plan le *point à l'infini* conventionnel (le nombre complexe $z = \infty$) et on le considère comme l'image du pôle nord de la sphère. Le nombre $z = \infty$ ne participe pas dans les opérations arithmétiques à l'encontre des nombres complexes ordinaires. Cependant on dit, par exemple, que la suite $\{z_n\}$ converge vers le point à l'infini, $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, si pour tout $M > 0$ il existe un numéro n_0 à partir duquel $| z_n | > M$ (comme nous l'avons fait précédemment dans des cas semblables). Cette terminologie se justifie. En effet, les projections stéréographiques Z_n des points z_n de notre suite constituent une suite qui converge vers le pôle nord de la sphère.

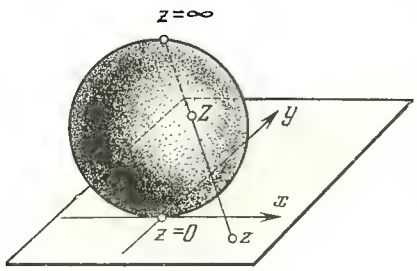

FIG. 28

Le plan de la variable complexe auquel on a adjoint le point à l'infini est appelé *plan fermé* (le plan sans ce point est appelé *plan ouvert*). Comme nous l'avons vu, le plan fermé est équivalent à la sphère, et pour les représentations géométriques des notions se rapportant au point à l'infini il est très commode d'avoir recours à la représentation sphérique des nombres complexes.

Par *voisinage* du point à l'infini on comprend un cercle de cette sphère, dont le centre est placé au pôle nord, ou, autrement dit, l'ensemble des points z qui satisfont à l'inégalité $| z | > R$ (avec adjonction du point à l'infini). Après avoir introduit cette notion, nous pouvons considérer des domaines pour lesquels le point à l'infini est un point intérieur ou frontière, c'est-à-dire des domaines non bornés. La définition de l'ordre de connexion donnée au n° 3 pour les domaines bornés s'étend sans aucune modification aux domaines non bornés (par exemple le voisinage du point $z = \infty$, ce point compris, est un domaine simplement connexe, tandis que le même voisinage, le point $z = \infty$ exclu, est un domaine doublement connexe).

De même, la définition de la limite d'une fonction au moyen des voisinages donnée au n° 5 s'étend sans aucune modification à z_0 et w_0 infinis. On dit alors qu'une fonction qui tend vers la limite $w_0 = \infty$ est infiniment grande (cf. n° 22, définition d'un pôle).

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un voisinage du point à l'infini (sauf au point $z = \infty$; la notion d'analyticité au point à l'infini n'est pas encore donnée). Les définitions des points singuliers du n° 22 sont valables, sans aucune modification, pour une telle fonction : on dit que $z = \infty$ est un point singulier éliminable,

un pôle ou un point singulier essentiel d'une fonction $f(z)$ suivant que la limite $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ est finie, infinie ou n'existe pas.

Néanmoins, les critères des types de points singuliers associés au développement en série de Laurent (théorèmes 1-3 du n° 22) se modifient, ce que l'on voit du raisonnement suivant. Posons $z = \frac{1}{\zeta}$ et

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta);$$

alors $\varphi(\zeta)$ est analytique dans un voisinage du point $\zeta = 0$. Ce dernier est pour $\varphi(\zeta)$ un point singulier du même type que $z = \infty$ pour $f(z)$, car $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{\zeta\to 0} \varphi(\zeta)$. Le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = \infty$ peut évidemment être obtenu par un simple changement de variable $\zeta = \frac{1}{z}$ dans le développement en série de Laurent de $\varphi(\zeta)$ au voisinage de $\zeta = 0$. Par ce changement de variable, la partie régulière se transforme en la partie principale et inversement.

Ainsi, le théorème ci-dessous est vrai :

Théorème 1. *Dans le cas d'une singularité éliminable au point à l'infini le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ dans un voisinage de ce point ne contient aucune puissance positive de z ; dans le cas d'un pôle ce développement n'en contient qu'un nombre fini, dans le cas d'une singularité essentielle une infinité.*

Si $f(z)$ a au point $z = \infty$ une singularité éliminable, on convient qu'elle est *analytique à l'infini* et on pose $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. Il est clair que, dans ce cas, la fonction est évidemment bornée dans un certain voisinage du point $z = \infty$.

Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit analytique dans le plan fermé. Il découle de l'analyticité de cette fonction à l'infini qu'elle est bornée dans un voisinage de ce point ; soit $|f(z)| < M_1$, pour $|z| > R$. D'autre part, de l'analyticité (et, par conséquent, de la continuité) de $f(z)$ dans le cercle fermé $|z| \leqslant R$ découle qu'elle est bornée dans ce cercle ; soit $|f(z)| < M_2$. Alors la fonction $f(z)$ est bornée dans tout le plan : nous avons pour tous les points z $|f(z)| < M = \max(M_1, M_2)$.

Ainsi, on peut énoncer le théorème de Cauchy-Liouville (n° 17) de façon suivante :

Théorème 2. *Si une fonction $f(z)$ est analytique dans le plan fermé des z, elle est alors constante.*

Pour terminer, arrêtons-nous sur la notion de résidu au point à l'infini. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un voisinage du point $z = \infty$ (sauf peut-être en ce point) ; par *résidu de la fonction à l'infini*

on comprend

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z)\, dz,$$

où γ^- est une circonférence suffisamment grande $|z| = \rho$ décrite dans le sens négatif (de manière que le voisinage du point $z = \infty$ se trouve à gauche tout comme dans le cas d'un point à distance finie). Il découle immédiatement de cette définition que le *résidu d'une fonction à l'infini est égal au coefficient de* z^{-1} *dans le développement en série de Laurent de cette fonction dans un voisinage du point* $z = \infty$, *précédé du signe moins.*

Enfin on obtient facilement le théorème suivant:

Théorème 3. *Si une fonction* $f(z)$ *possède un nombre fini de points singuliers dans le plan fermé, alors la somme de tous ses résidus, y compris le résidu à l'infini, est nulle.*

En effet, soient $a_1, \ldots, a_n$ des points singuliers à distance finie de la fonction $f(z)$ et γ la circonférence $|z| = \rho$ contenant à son intérieur tous ces points. D'après une propriété des intégrales, le théorème des résidus et la définition du résidu au point à l infini, il vient

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z)\, dz =$$

$$= \operatorname{Res}(f, a_1) + \ldots + \operatorname{Res}(f, a_n) + \operatorname{Res}(f, \infty),$$

ce qu'il fallait démontrer.

25. Prolongement analytique. Généralisation de la notion de fonction analytique. Nous considérons ici la question du prolongement analytique des fonctions et introduisons la notion de fonctions analytiques multiformes généralisant la notion d'analyticité donnée au n° 5.

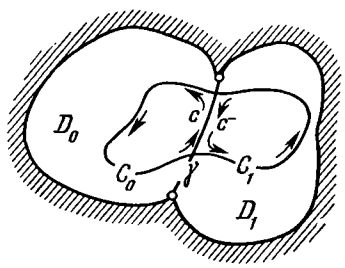

FIG. 29

Soient D_0 et D_1 deux domaines disjoints dont les frontières ont une partie commune γ (fig. 29). On se donne respectivement dans ces domaines des fonctions analytiques (uniformes) $f_0(z)$ et $f_1(z)$. Nous dirons que la fonction $f_1(z)$ est le *prolongement analytique immédiat* de la fonction $f_0(z)$ dans le domaine D_1 s'il existe une fonction $f(z)$ analytique dans le domaine $D_0 \cup \gamma \cup D_1$ coïncidant avec $f_0(z)$ en tous les points de D_0 et avec $f_1(z)$ en tous les points de D_1:

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{dans } D_0, \\ f_1(z) & \text{dans } D_1. \end{cases} \qquad (1)$$

D'après le théorème d'unicité (n° 20), pour les domaines donnés D_0 et D_1 et la partie commune γ donnée, le prolongement analytique de la fonction donnée $f_0(z)$ (s'il est possible) est défini d'une manière unique.

Donnons une condition suffisante simple du prolongement analytique que l'on appelle *principe du prolongement continu.*

Théorème 1. *Soient donnés deux domaines simplement connexes D_0 et D_1 disjoints dont les frontières possèdent un arc commun γ et des fonctions analytiques $f_0(z)$ et $f_1(z)$ respectivement dans ces domaines. Si de plus ces fonctions sont continues dans $D_0 \cup \gamma$ et $D_1 \cup \gamma$ et coïncident en tous les points de la courbe γ, alors la fonction $f_1(z)$ est le prolongement analytique immédiat de la fonction $f_0(z)$ dans le domaine D_1.*

La démonstration est basée sur les théorèmes de Morera (n° 17) et de Cauchy (n° 12). En effet, d'après nos conditions, la fonction

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{dans } D_0, \\ f_0(z) = f_1(z) & \text{sur } \gamma, \\ f_1(z) & \text{dans } D_1 \end{cases} \tag{2}$$

est continue dans le domaine $D = D_0 \cup \gamma \cup D_1$. Montrons que son intégrale prise sur tout contour fermé C appartenant à D est nulle. Si C en entier appartient à l'un des domaines D_0 ou D_1, c'est un corollaire immédiat du théorème de Cauchy. Si C appartient à D_0 et D_1, en désignant par C_0 et C_1 les parties du contour C qui appartiennent respectivement à D_0 et D_1 et par c la partie de la courbe γ intérieure à C (fig. 29), il vient, d'après le théorème de Cauchy (sous sa forme généralisée, cf. théorème 5 du n° 12),

$$\int_{C_0 \cup c} f(z)\,dz = 0, \qquad \int_{C_1 \cup c^-} f(z)\,dz = 0.$$

Additionnant ces égalités nous avons :

$$\int_{C_0 \cup c} f(z)\,dz + \int_{C_1 \cup c^-} f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz = 0.$$

On en conclut, d'après le théorème de Morera, que la fonction $f(z)$ est analytique dans le domaine D, ce qui signifie que $f_1(z)$ est le prolongement analytique de $f_0(z)$. Le théorème est démontré.

En d'autres termes, le théorème qui vient d'être démontré établit que si une fonction analytique est le prolongement *continu* d'une fonction analytique $f_0(z)$ à travers l'arc γ, alors elle est aussi le prolongement analytique de cette fonction (*).

(*) Le théorème analogue dans le domaine réel n'est pas vrai : si deux fonctions $f_0(x)$ et $f_1(x)$ dérivables dans des intervalles adjacents (a, b) et (b, c) sont continues et coïncident au point commun b de ces intervalles, alors la fonction $f(x)$ obtenue par leur réunion peut ne pas être dérivable dans l'intervalle (a, c), car son graphe peut avoir un point anguleux en b.

En se basant sur le théorème 1 nous pouvons généraliser un peu la notion de prolongement analytique immédiat. A savoir, supposons que les domaines D_0 et D_1 possèdent encore, en plus de la partie frontière commune γ, des points intérieurs communs (fig. 30) et que des fonctions analytiques $f_0(z)$ et $f_1(z)$ soient données comme précédemment dans ces domaines. On dit alors que $f_1(z)$ est le *prolongement analytique immédiat* de $f_0(z)$ à travers l'arc γ si $f_0(z)$ et $f_1(z)$ sont continues dans $D_0 \cup \gamma$ et dans $D_1 \cup \gamma$ et si leurs valeurs sur γ coïncident.

Si D_0 et D_1 n'ont pas de points intérieurs communs, alors cette définition coïncide avec la définition précédente. Si D_0 et D_1 ont des

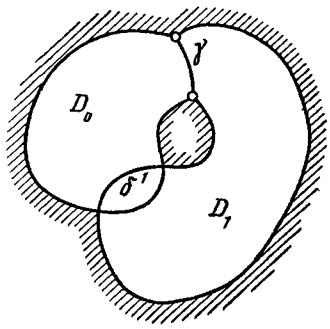

FIG. 30

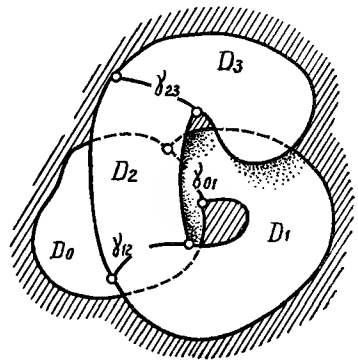

FIG. 31

points communs (par exemple la partie commune δ^1 de la fig. 30), alors la fonction $f(z)$, définie d'après la formule (2), peut être à deux déterminations pour les points de δ^1, car on ne peut pas affirmer qu'au point z de δ^1 les valeurs de $f_0(z)$ et $f_1(z)$ coïncident. Ainsi, la deuxième définition du prolongement est plus générale que la première.

Généralisons encore un peu cette définition. Soit donnée une chaîne de domaines simplement connexes $D_0, D_1, \ldots, D_n$, tels que chaque couple de domaines consécutifs D_k et D_{k+1} ait une partie frontière commune $\gamma_{k,k+1}$ (fig. 31) et soit donnée dans chaque domaine D_k une fonction analytique uniforme $f_k(z)$. On dit que $f_n(z)$ est le *prolongement analytique* (*) de la fonction $f_0(z)$ dans le domaine D_n par rapport à la chaîne donnée de domaines si, pour chaque $k = 0, 1, \ldots, n-1$, les fonctions $f_k(z)$ et $f_{k+1}(z)$ sont respectivement continues dans $D_k \cup \gamma_{k,k+1}$ et $D_{k+1} \cup \gamma_{k,k+1}$ et si leurs valeurs coïncident sur $\gamma_{k,k+1}$ (c'est-à-dire elles sont le prolongement analytique immédiat l'une de l'autre). Pour $n = 1$, nous retrouvons la définition précédente.

(*) Sans l'adjectif « immédiat ».

Remarquons que, ici aussi, pour $D_0, D_1, \ldots, D_n$ et $\gamma_{01}, \gamma_{12}, \ldots$ $\ldots, \gamma_{n-1,n}$ fixes, le prolongement analytique de la fonction $f_0(z)$ dans le domaine D_n (s'il est possible) est défini d'une manière unique. Si on change les éléments de la chaîne D_k ou même si l'on remplace un arc quelconque $\gamma_{k,k+1}$ par un autre arc $\widetilde{\gamma}_{k,k+1}$ commun aux frontières des domaines D_k et D_{k+1}, la valeur du prolongement analytique peut changer.

Expliquons sur un exemple simple ce que l'on vient d'exposer. Soient D_0 et D_1 les parties supérieure et inférieure de la couronne $1 < |z| < 2$, correspondant respectivement à $\operatorname{Im} z > 0$ et $\operatorname{Im} z < 0$, et $f_0(z)$ la branche de $\sqrt{z}$ caractérisée par la condition $0 < \arg z < \pi$. Si on prend pour γ_{01} l'intervalle ouvert $(-2, -1)$, alors le prolongement analytique de $f_0(z)$ dans D_1 est complètement défini par la branche de $\sqrt{z}$ pour laquelle $\pi < \arg z < 2\pi$ (sur γ_{01} la valeur de l'argument doit varier d'une manière continue). Si maintenant on conserve $f_0(z)$ et les domaines D_0 et D_1 et si on remplace l'intervalle ouvert γ_{01} par l'intervalle ouvert $\widetilde{\gamma}_{01}$: $(1, 2)$, alors le prolongement analytique de $f_0(z)$ dans D_1 est défini par la branche de $\sqrt{z}$ pour laquelle $-\pi < \arg z < \pi$ (à présent la valeur de l'argument doit varier d'une manière continue dans l'intervalle ouvert $\widetilde{\gamma}_{01}$). Ces prolongements $f_1(z)$ et $\widetilde{f}_1(z)$ sont différents. Par exemple

$$f_1(-i) = \sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}i}} = e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad \widetilde{f}_1(-i) = \sqrt{e^{-\frac{\pi}{2}i}} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

(ils ne diffèrent que par leur signe). Ainsi, la valeur du prolongement analytique peut réellement changer même si on ne modifie que les arcs, éléments de cette chaîne.

Soient maintenant $f_0(z)$, D_0, D_1 et γ_{01} avec le même sens que précédemment ; prenons encore un élément de la chaîne $D_2 = D_0$ relié à D_1 par l'intervalle ouvert γ_{12} : $(1, 2)$; alors le prolongement analytique $f_2(z)$ est défini par la branche de $\sqrt{z}$ pour laquelle $2\pi < \arg z < 3\pi$ et, en tout point z de la demi-couronne supérieure, les valeurs de $f_0(z)$ et $f_2(z)$ sont différentes (de signe contraire). Nous voyons que lorsque les domaines D_0 et D_k se recouvrent partiellement, en leurs points communs les valeurs de la fonction et de son prolongement analytique peuvent être différentes.

La notion de prolongement analytique permet d'introduire celle de fonction analytique complète (en général multiforme). Soit donnée dans un domaine D_0 une fonction analytique uniforme $f_0(z)$. Il peut se produire que $f_0(z)$ *ne soit prolongeable* à travers aucun arc de la frontière C du domaine D_0. Par exemple, soit D_0 le cercle $|z| < 1$ et

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}. \tag{3}$$

La fonction $f_0(z)$ a une singularité au point $z = 1$, car pour les $z = x$ réels, comme on le voit facilement, $\lim\limits_{x \to 1} f_0(x) = \infty$. En effet, $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{k=1}^{n} x^{2^k} = n$, donc pour tout n il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $x > 1 - \delta$, nous avons $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{2^k} > n - 1$ et, a fortiori, $f_0(x) =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} x^{2^k} > n - 1$. On a ensuite

$$f_0(z) = z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (z^2)^{2^k} = z^2 + f_0(z^2),$$

d'où l'on voit que la fonction $f_0(z)$ a des singularités aux points $z = \sqrt{1}$ (c'est-à-dire $z = \pm 1$). D'une façon analogue, pour tout n entier,

$$f_0(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f_0(z^{2^n}),$$

donc aux points $z = \sqrt[2^n]{1}$, qui coïncident avec les sommets d'un polygone régulier de 2^n côtés inscrit dans la circonférence $|z| = 1$, la fonction $f_0(z)$ a des singularités. Ainsi, l'ensemble des points singuliers de la fonction $f_0(z)$ est partout dense sur la circonférence $|z| = 1$ et $f_0(z)$ n'est prolongeable à travers aucun arc de la circonférence.

Dans de tels cas nous disons que le contour C est une *frontière essentielle de la fonction* $f_0(z)$; D_0 est appelé le *domaine d'existence* de cette fonction et la fonction elle-même la *fonction analytique complète*.

Supposons maintenant que $f_0(z)$ soit prolongeable dans l'extérieur de D_0. Considérons tous les prolongements analytiques possibles par rapport à toutes les chaînes possibles de domaines. Considérons les valeurs de tous ces prolongements comme les valeurs d'*une même* fonction $f(z)$. Nous appelons cette fonction *fonction analytique complète* et les fonctions analytiques uniformes qui la composent (prolongements de la fonction $f_0(z)$) ses *branches*. Le domaine D que l'on obtient par la réunion de tous les domaines composant les chaînes par rapport auxquelles les prolongements analytiques sont réalisés et des arcs qui relient ces domaines est appelé *domaine de définition de* $f(z)$.

On peut considérer la fonction $f(z)$ non pas dans tout le domaine de définition mais dans un sous-ensemble de ce dernier ; nous disons alors simplement que $f(z)$ est une *fonction analytique*. Cette définition de la fonction analytique est une généralisation de la définition du n° 5, car il est clair qu'elle admet aussi les fonctions multiformes. Désormais, lorsqu'il sera question de fonctions analytiques, nous aurons en vue l'analyticité dans ce sens plus général. Lorsqu'il sera nécessaire de souligner qu'il est question de l'analyticité au sens du n° 5, nous dirons que nous avons une fonction analytique *uniforme*.

Nous terminons l'exposé de la notion générale de fonction analytique par la description des points en lesquels l'analyticité est enfreinte — les points singuliers de la fonction. Il ne faut pas penser que ces points représentent quelque chose d'exceptionnel, d'anormal et, pour cette raison, sont de peu d'intérêt pour les applications.

Au contraire, les points singuliers représentent un très grand intérêt pour l'étude des fonctions analytiques car ils renferment toute l'information fondamentale sur les fonctions. Le lecteur aura l'occasion de mieux apprécier cette affirmation lorsqu'il prendra connaissance, par exemple, du chapitre V et qu'il verra les points singuliers, pour ainsi dire, « au travail ». Pour l'instant nous vous conseillons de vous rappeler que, d'après le théorème de Cauchy-Liouville (dans l'énoncé du n° 24), *toutes* les fonctions analytiques, excepté les constantes, possèdent des points singuliers, de vous rappeler les passages, déjà assez nombreux, de ce livre où, en partant de l'étude des points singuliers, des propriétés importantes des fonctions ont été mises au jour (théorèmes du n° 23, remarque donnée à la fin du n° 19, etc.). Passons maintenant à l'énoncé des définitions exactes.

Un point a appartenant au domaine de définition d'une fonction analytique ou à sa frontière est dit *point singulier* de la fonction $f(z)$ si au moins l'une des branches de $f(z)$ n'y est pas analytique (*).

Comme au numéro 22 nous nous limitons à la considération des points singuliers de type simple, dits isolés. Le point a est dit *point singulier isolé* de la fonction $f(z)$ s'il existe un voisinage $0 < |z - a| < R$ tel que $f(z)$ soit prolongeable le long de toute chaîne de domaines appartenant à ce voisinage.

Considérons la chaîne composée des domaines D_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) qui sont les couronnes $0 < |z - a| < R$ coupées suivant un rayon γ_0, par exemple $\arg(z - a) = 0$. Soit $f_0(z)$ une branche de $f(z)$ uniforme et analytique dans D_0. Si les valeurs de $f_0(z)$ sur les deux bords de la coupure γ_0 coïncident, nous disons alors que a est un *point singulier de caractère uniforme* pour la branche considérée (dans ce cas, en vertu du théorème d'unicité du n° 20, les prolongements analytiques de la branche $f_0(z)$ dans les autres couronnes D_k coïncident avec $f_0(z)$). De tels points singuliers ont été considérés au n° 22.

Si les valeurs de $f_0(z)$ sur les deux bords de la coupure ne coïncident pas, nous disons alors que le point a est un *point singulier de caractère multiforme* ou *point de branchement* ou encore *de ramification*. Ici deux cas sont possibles :

1. Il existe une chaîne $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ de couronnes qui se succèdent, par exemple dans le sens positif (c'est-à-dire que le bord inférieur de la coupure de D_0 est réuni avec le bord

(*) Un point singulier a ne peut appartenir au domaine d'existence que dans le cas où, en plus de la branche de la fonction qui possède en ce point une singularité, il existe une branche régulière en ce point. Tel est par exemple le point $z = 1$ pour la fonction $w = \dfrac{1}{\sqrt{z} + 1}$: il est singulier pour la branche de cette fonction pour laquelle $\sqrt{1} = -1$ et régulier pour l'autre branche (pour laquelle $\sqrt{1} = 1$).

supérieur de la coupure de D_1, le bord inférieur de D_1 avec le bord supérieur de D_2, etc.), de manière que sur les bords libres des coupures de D_0 et de D_{n-1} (le bord supérieur de D_0 et le bord inférieur de D_{n-1}) les valeurs de $f_0(z)$ et $f_{n-1}(z)$ coïncident. Alors, d'après le théorème d'unicité du n° 20,

$$f_n(z) \equiv f_0(z),\ f_{n+1}(z) \equiv f_1(z),\ \ldots,\ f_{2n-1}(z) \equiv f_{n-1}(z)$$

et, en général, les valeurs de $f_k(z)$, pour k variant de $-\infty$ à $+\infty$, répètent périodiquement les valeurs de $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_{n-1}(z)$. Dans ce cas nous disons que a est *un point de branchement* ou *de ramification d'ordre fini n.*

Si dans le cas considéré toutes les branches $f_k(z)$, lorsque $z \to a$, tendent vers une limite finie ou infinie, nous disons alors que a est *un point de branchement* ou *de ramification algébrique.* Tels sont par exemple les points $z = 0$ et $z = \infty$ pour les fonctions $f(z) = \sqrt[n]{z}$ et $f(z) = \frac{1}{\sqrt[n]{z}}$. Si la limite des $f_k(z)$, lorsque $z \to a$, n'existe pas, nous disons alors que a est *un point de branchement* ou *de ramification transcendant.* Tel est, par exemple, le point $z = 0$ pour la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{\sqrt[n]{z}}}$ ($z = \infty$ est pour cette dernière un point de branchement algébrique).

2. Dans toutes les couronnes D_k de la chaîne les valeurs de la fonction sont différentes. Dans ce cas nous disons que a est *un point de branchement* ou *de ramification logarithmique.* Tels sont par exemple les points $z = 0$ et $z = \infty$ pour la fonction multiforme $w = \operatorname{Ln} z$. Les points de branchement logarithmiques sont des points de branchement transcendants.

Dans le voisinage d'un point de branchement a, d'ordre fini n, la fonction $f(z)$ admet un développement en *série entière généralisée* :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{\frac{k}{n}}. \tag{4}$$

En effet, posons $z - a = \zeta^n$; alors à la chaîne de domaines D_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) correspond dans le plan des ζ une chaîne de secteurs adjacents Δ_ν de la couronne $0 < |\zeta| < \rho = \sqrt[n]{R}$, d'angles au centre $\frac{2\pi}{n}$. Considérons la fonction composée $\varphi(\zeta) = f(a + \zeta^n)$, en outre, nous choisissons dans chaque secteur Δ_ν la branche correspondante f_ν de la fonction f. Il est clair que la fonction $\varphi(\zeta)$ est prolongeable d'une manière continue de Δ_0 dans Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{n-1} et ses valeurs sur les bords libres des coupures de Δ_0 et Δ_{n-1} coïncident. Donc, le point $\zeta = 0$ est pour cette fonction un point singulier isolé de caractère uniforme et, par conséquent, $\varphi(\zeta)$ est représentée au voisinage du point $\zeta = 0$ par la série de

Laurent

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k.$$

En y substituant $\zeta = (z-a)^{\frac{1}{n}}$ nous obtenons le développement (4) que nous voulions établir.

Dans le cas d'un point algébrique a le développement (4) contient un nombre fini de termes avec k négatifs (il se peut que tous ces termes soient absents) et dans le cas d'un point transcendant une infinité.

26. Surfaces de Riemann. Pour terminer ce chapitre, donnons la notion de surfaces de Riemann des fonctions multiformes. Ces surfaces permettent une illustration géométrique du processus de prolongement analytique donné ci-dessus, ainsi que de la notion même de fonction analytique multiforme. Soit donnée une fonction analytique (multiforme) $f(z)$ définie dans un domaine D du plan de la variable complexe z. Convenons de considérer comme des feuillets distincts les domaines D_k servant à construire le domaine D au cours du processus de prolongement analytique; nous prenons autant d'exemplaires que cette fonction a de déterminations dans le domaine considéré D.

Considérons dans le plan des z une chaîne de domaines D_0, D_1, . . ., D_n avec des portions de frontières communes γ_{01}, γ_{12}, ..., $\gamma_{n-1,n}$. Supposons que les domaines D_0 et D_1 aient des parties communes; de plus, dans certaines d'entre elles, les valeurs de $f_0(z)$ et de $f_1(z)$ coïncident et dans les autres sont différentes. Prenons les feuillets correspondant à D_0 et D_1 et collons-les suivant la ligne correspondant à γ_{01}. Disposons ces feuillets au-dessus de $D_0 \cup \gamma_{01} \cup D_1$, de manière que chaque feuillet se trouve au-dessus du domaine correspondant et collons leurs parties disposées au-dessus des parties communes de D_0 et de D_1 dans lesquelles $f_0(z)$ et $f_1(z)$ coïncident; les parties collées sont considérées comme une même couche. Au-dessus des parties communes des domaines D_0 et D_1 dans lesquelles les valeurs de $f_0(z)$ et $f_1(z)$ sont différentes, nous disposons l'une sur l'autre les parties correspondantes des feuillets de manière que deux couches se trouvent au-dessus de ces parties de D_0 et D_1. Nous convenons de rapporter la valeur de $f_0(z)$ au point du premier feuillet disposé au-dessus de z, et la valeur de $f_1(z)$ au point correspondant du deuxième feuillet; alors la fonction

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{dans } D_0, \\ f_0(z) = f_1(z) & \text{sur } \gamma_{01}, \\ f_1(z) & \text{dans } D_1 \end{cases}$$

est *uniforme* sur l'ensemble des feuillets ainsi collés.

Exactement de la même façon nous exécutons les mêmes opé-

rations sur le feuillet correspondant au domaine D_2 (*), etc. Il peut se produire que ce collage des feuillets soit impossible sans intersection ; nous convenons de ne pas prendre en considération de telles intersections (cf. la fig. 32 où l'on a représenté le voisinage d'un point de branchement du troisième ordre constitué par le collage de trois couronnes $0 < |z - a| < R$ munies de coupures ; nous ne tenons pas compte des intersections obtenues par le collage des couronnes D_0 et D_2). On obtient enfin un morceau de la surface en général à m feuillets, étalé au-dessus du domaine $D_0 \cup \gamma_{01} \cup D_1 \cup \ldots \ldots \cup \gamma_{n-1,n} \cup D_n$. Si nous effectuons les opérations qui viennent d'être décrites pour toutes les chaînes de domaines définissant la fonction analytique $f(z)$, nous obtenons une surface R en général à m feuillets, étalée au-dessus du domaine D. C'est précisément cette surface que nous appelons *surface de Riemann* de la fonction $f(z)$.

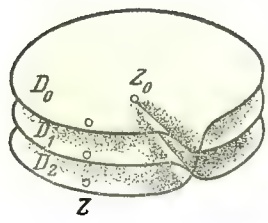

FIG. 32

Il est essentiel de noter que *toute fonction analytique peut être considérée comme uniforme sur sa surface de Riemann*. Pour cela il suffit de faire correspondre les différentes valeurs de la fonction, qu'elle prend en un point quelconque z, à différents feuillets de la surface de Riemann étalés au-dessus de ce point. Par exemple, nous convenons de rapporter les trois valeurs de la racine $\sqrt[3]{z - z_0}$ au point $z \neq z_0$ du voisinage de z_0 à trois points de la surface (fig 32) qui se trouvent au-dessus du point z.

Si une fonction $w = f(z)$ est l'inverse d'une fonction uniforme $z = \varphi(w)$ (comme dans tous les exemples que nous avons considérés dans le paragraphe 3), il est clair qu'elle réalise une transformation biunivoque de sa surface de Riemann sur le plan fermé des w ou sur une partie de ce dernier. Quant au cas général, $w = f(z)$ transforme une surface de Riemann sur une autre.

Donnons plusieurs exemples de surfaces riémaniennes simples (**) :

1) Surface de Riemann de la racine $w = \sqrt[n]{z}$. Prenons pour D_k le plan coupé suivant un demi-axe positif : D_k est défini $2k\pi < \arg z < 2(k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Prenons dans le domaine initial D_0 une branche $f_0(z)$ définie par la condition $0 < \arg z < 2\pi$ et prolongeons-la dans les domaines $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$. Préparons pour cela n exemplaires de feuillets ayant la même forme que D_k et collons le bord inférieur de la coupure du domaine D_0 au bord supérieur de la coupure du domaine D_1,

(*) De plus, des points z peuvent apparaître au-dessus desquels sont disposées trois couches de feuillets—ceci se produit dans le cas où D_2 empiète sur la partie commune de D_0 et de D_1 dans laquelle les valeurs de $f_0(z)$ et $f_1(z)$ sont différentes et si les valeurs de $f_2(z)$ y sont différentes aussi bien de celles de $f_0(z)$ que de celles de $f_1(z)$.

(**) Nous recommandons de confectionner les modèles en papier des surfaces de Riemann considérées ici et de suivre sur ceux-ci les raisonnements que nous allons donner.

le bord inférieur de la coupure du domaine D_1 au bord supérieur de la coupure du domaine D_2, etc. Les valeurs de $f_0(z)$ et de $f_n(z)$ sur le demi-axe positif (et dans le domaine $D_n = D_0$) coïncident. Par conséquent, nous devons coller (ne tenant pas compte des intersections qui en surgissent) le bord supérieur de la coupure du feuillet D_0 avec le bord inférieur de la coupure de D_{n-1}, les bords qui sont restés libres. Les valeurs de $\sqrt[n]{z}$ dans les autres domaines D_k ne font que répéter les valeurs dégagées de $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$, par conséquent, la surface à n feuillets que nous venons de construire n'est autre que la surface de Riemann de la fonction $w = \sqrt[n]{z}$. Elle possède des points de branchement algébriques d'ordre n au-dessus des points $z = 0$ et $z = \infty$ (cf. la fig. 33 où $n = 4$).

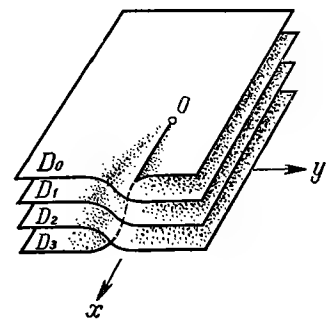

FIG. 33

2) Surface de Riemann de la fonction $w = \operatorname{Ln} z$. D_k sont les mêmes que dans 1). Choisissons dans D_0 une branche $w = \ln|z| + i \arg z$, où $0 < \arg z < 2\pi$, et prolongeons indéfiniment cette branche dans le domaine D_k pour $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ceci correspond à réunir un ensemble infini d'exemplaires de feuillets ayant la même forme que D_k d'après la loi suivante : le bord inférieur de la coupure de chaque feuillet D_k est collé au bord supérieur de la coupure du feuillet D_{k+1}. La surface de Riemann ainsi obtenue est représentée sur la fig. 34. Elle a un point de branchement du type logarithmique au-dessus de $z = 0$ et $z = \infty$.

3) Surface de Riemann de la fonction $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, inverse de la fonction de Joukovski. Prenons pour les D_k le plan coupé suivant le segment $[-1, 1]$ et désignons par $f_0(z)$ et $f_1(z)$ les branches de la fonction qui transforment D_0 et D_1 respectivement dans l'intérieur et l'extérieur du cercle unité (cf. n° 7). Etant donné que $f_0(z)$ et $f_1(z)$ transforment les bords inférieur et supérieur du segment $[-1, 1]$ sur la demi-circonférence supérieure, nous devons donc coller le bord inférieur de la coupure du feuillet D_0 au bord supérieur de la coupure du feuillet D_1. Nous répétons cette construction avec le bord supérieur de la coupure de D_0 et le bord inférieur de D_1 qui sont transformés sur la demi-circonférence inférieure. La surface à deux feuillets ainsi obtenue n'est autre que la surface de Riemann de notre fonction ; elle a des points de branchement du deuxième ordre au-dessus des points $z = \pm 1$ (fig. 35) (*). Cette surface ne se distingue de la surface de $\sqrt{z}$ que par des transformations homographiques complémentaires ; en effet, les transformations $z = \dfrac{\zeta+1}{\zeta-1}$ et $\omega = \dfrac{w+1}{w-1}$ changent la fonction $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ en la fonction $\omega = \sqrt{\zeta}$ (cf. n° 31).

4) Surface de Riemann de la fonction $w = \operatorname{Arcsin} z$. Nous avons vu (n° 9) que la fonction $z = \sin w$ transforme la demi-bande $\operatorname{Im} w > 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \dfrac{\pi}{2}$ dans le demi-plan supérieur (**), en outre les rayons (*1*) et (*4*) de la fig. 36, en bas, se transforment en les rayons $x < -1$ et $x > 1$; du fait que $\sin w$ est impair il découle que la demi-bande $\operatorname{Im} w < 0$,

(*) Au-dessus de $z = \infty$, la surface est composée de deux feuillets qui se superposent, car ce point n'est pas un point de branchement.

(**) Nous avons interverti les rôles de z et de w.

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}$, se transforme dans le demi-plan inférieur, de plus aux rayons (2) et (3) correspondent les mêmes rayons $x < -1$ et $x > 1$ (fig. 36). Ainsi, l'une des branches de la fonction $w = \operatorname{Arcsin} z$ (nous la notons $f_0(z)$) transforme le plan des z muni de coupures suivant les segments $(-\infty, -1)$ et $(1, \infty)$ (nous le

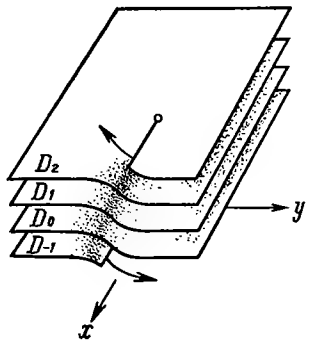

FIG. 34

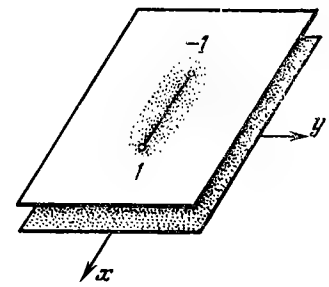

FIG. 35

notons D_0) dans la bande $\Delta_0 : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}$, avec correspondance des frontières comme il est indiqué sur la fig. 36. Etant donné que $\sin(w + \pi) = -\sin w$, la bande $\Delta_1 : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{3\pi}{2}$ a pour image par la transformation

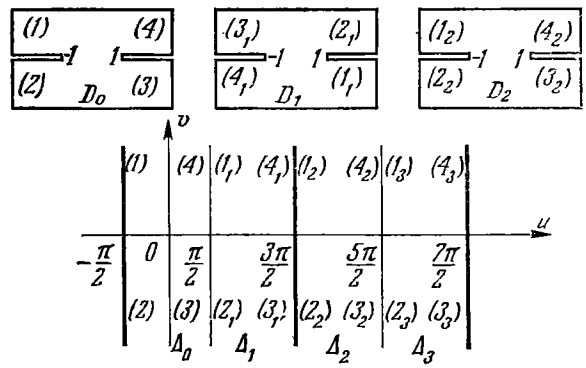

FIG. 36

$z = \sin w$ le même domaine du plan des z; désignons par D_1 ce domaine et par $f_1(z)$ la fonction qui réalise la représentation inverse. La correspondance des frontières de Δ_1 et D_1 est indiquée sur la fig. 36.

Il est clair que la branche $f_1(z)$ est le prolongement analytique de $f_0(z)$ dans D_1 et par ce prolongement la fonction $z = \sin w$ reste continue sur la droite $\operatorname{Re} w = \frac{\pi}{2}$. Aussi nous devons coller en croix les bords des coupures des feuillets D_0 et D_1 : (4) avec (1_1) et (3) avec (2_1). Nous obtenons une surface à deux feuillets avec un point de branchement du deuxième ordre au-dessus de $z = 1$ et une coupure au-dessus du rayon $(-\infty, -1)$ au-dessus duquel se trouvent quatre bords des coupures : (1), (2), (3_1) et (4_1). En vertu de la périodicité de la

fonction $z=\sin w$, l'ensemble des bandes Δ_2 et Δ_3 se transforme sur une surface à deux feuillets analogue, composée des feuillets D_2 et D_3 et possédant quatre bords de coupures libres: (1_2), (2_2), (3_3) et (4_3). Nous devons réunir les deux surfaces construites en collant en croix les bords libres des coupures des feuillets D_1 et D_2: (4_1) avec (1_2) et (3_1) avec (2_2). Ceci correspond au prolongement continu de la fonction $z = \sin w$ à travers la droite $\operatorname{Re} w=\frac{3\pi}{2}$ (fig. 36). De plus, un point de branchement qui réunit les feuillets D_1 et D_2 apparaît au-dessus du point $z = -1$. Continuant cette construction indéfiniment à droite et à gauche de la bande fondamentale Δ_0, nous obtenons la surface de Riemann à une infinité de feuillets de la fonction $w = \operatorname{Arcsin} z$. Elle a un ensemble infini de points de branchement du deuxième ordre au-dessus de $z = \pm 1$ et un point de branchement logarithmique (*) au-dessus de $z = \infty$ (fig. 37).

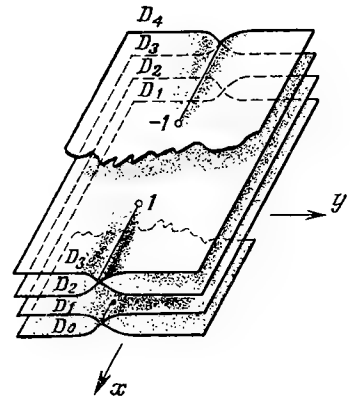

FIG. 37

Comme le montre notre construction, la fonction $z = \sin w$ réalise une transformation biunivoque et continue du plan complexe des w sur la surface de Riemann. La fonction inverse $w = \operatorname{Arcsin} z$ est uniforme sur cette surface.

BIBLIOGRAPHIE

[1] И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.
[2] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
[3] А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, Физматгиз, 1961.
[4] S. Stoilow, Teoria functiilor de o variabilă complexă, vol. 1-2, Bucureşti 1954.
[5] R. Courant, Geometrische Funktionentheorie (cf. [6]).
[6] A. Hurwitz, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, mit einem Abschnitt über «Geometrische Funktionentheorie» von R. Courant und einem Anhang von H. Röhll, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg 1964.
[7] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge 1952.
[8] V. Smirnov, Cours de mathématiques supérieures, t. III, deuxième partie, Editions Mir, 1972.
[9] Б. А. Фукс и Б. В. Шабат, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, «Наука», 1964.
[10] G. Springer, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley Publ. Co. Reading (Mass.) 1957.
[11] А. И. Маркушевич, Очерки по истории теории аналитических функций, Гостехиздат, 1951.

(*) Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le mouvement d'un point sur la surface étalée au-dessus de la circonférence $|z| = 2$. Supposons que nous partions d'un point de D_0 situé au-dessus de $z = 2$ et que nous nous déplacions dans le sens positif. Comme le montre la fig. 36, nous nous trouvons tout de suite sur le feuillet D_1; puis, passant au-dessus de $z = -2$, nous nous trouvons sur le feuillet D_2, ensuite, au-dessus de $z = 2$, sur le feuillet D_3, etc. D'où apparaît le caractère logarithmique de la singularité au-dessus de $z = \infty$.

CHAPITRE II

Transformations conformes

Ce chapitre est consacré aux transformations réalisées par des fonctions analytiques qu'il est convenu d'appeler transformations (ou représentations) conformes.

La notion de transformation conforme est l'une des plus importantes en mathématiques. Née de représentations physiques, elle a de nombreuses applications fondamentales dans les différents domaines de la physique : la méthode des représentations conformes résout d'une manière concluante les problèmes pratiques d'hydrodynamique et d'aérodynamique, de la théorie de l'élasticité, des théories des champs électrostatique, magnétique, thermique et autres.

Certains problèmes concernant les représentations conformes ont été résolus par *d'Alembert*, *Euler* et *Gauss* (1777-1855). En se référant à leurs travaux, *Bernhard Riemann*, dans sa thèse intitulée « Fondements de la théorie générale des fonctions d'une variable complexe » (1851), a posé la première pierre de la théorie géométrique des fonctions et a démontré notamment (bien qu'avec des erreurs) le théorème fondamental de la possibilité de la représentation conforme de tout domaine simplement connexe sur un autre. Dans ses recherches ultérieures, suivant l'exemple d'Euler, Riemann se servait des représentations physiques associées aux transformations conformes.

A partir du milieu du XIX^{e} siècle, les représentations conformes sont largement appliquées comme instrument mathématique de l'étude de la mécanique des milieux continus. Parmi les promoteurs de ces applications, citons avant tout *N. Joukovksi* et *S. Tchaplyguine* (pour l'hydrodynamique et l'aérodynamique), *G. Kolossov* et *N. Mouskhélichvili* (pour la théorie de l'élasticité).

§ 1. NOTIONS GÉNÉRALES. EXEMPLES

Nous exposerons dans ce paragraphe la notion de représentation conforme et les principes généraux de la théorie des représentations conformes. N'ayant pas la possibilité d'en démontrer la totalité (la démonstration exige l'introduction de propositions qui sortent du cadre de ce livre), nous nous limiterons à expliquer l'essence de ces principes et à les illustrer par une série d'exemples.

27. Notion de représentation conforme. Supposons que soit donnée une transformation continue et biunivoque d'un domaine D sur un domaine D^* :

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{1}$$

Supposons encore que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont dérivables dans ce domaine. Fixons un point arbitraire z_0 de D et remplaçons, dans un voisinage de ce point, les accroissements des fonctions u et v par les différentielles. Par la définition de la différentielle, les accroissements peuvent être mis sous la forme

$$\left.\begin{aligned} u - u_0 &= \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0) + \eta_1 \Delta r, \\ v - v_0 &= \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0) + \eta_2 \Delta r, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où les dérivées partielles sont calculées au point z_0, $\Delta r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ et η_1, η_2 tendent vers zéro lorsque $\Delta r \to 0$. Le remplacement des accroissements par les différentielles revient à négliger dans les relations (2) les termes $\eta_1 \Delta r$ et $\eta_2 \Delta r$ qui sont des infiniment petits d'ordre supérieur par rapport aux autres termes de ces formules (nous supposons que $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ et $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ sont différents de zéro).

Du point de vue géométrique, cette substitution est équivalente à la substitution à la transformation $w = f(z)$ de la transformation

$$\left.\begin{aligned} u - u_0 &= \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0), \\ v - v_0 &= \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

appelée *partie linéaire principale* de la transformation (1). La transformation (3) peut être écrite sous la forme

$$\left.\begin{aligned} u &= ax + by + l, \\ v &= cx + dy + m, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

où

$$\left.\begin{aligned} a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ l = u_0 - \frac{\partial u}{\partial x} x_0 - \frac{\partial u}{\partial y} y_0 \; ; \; m = v_0 - \frac{\partial v}{\partial x} x_0 - \frac{\partial v}{\partial y} y_0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ne dépendent pas de x et de y. C'est une *transformation linéaire* du plan des (x, y).

Enumérons les principales propriétés des transformations linéaires. Chaque transformation linéaire (4) est définie d'une manière

univoque dans tout le plan des z; supposons que le déterminant

$$\Delta = ad - bc$$

soit différent de zéro (*); de même, la transformation inverse de (4)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\Delta}(du - bv - dl + bm), \\ y &= \frac{1}{\Delta}(-cu + av + lc - am) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

est définie d'une manière univoque dans tout le plan des w. Ainsi, pour $\Delta \neq 0$, non seulement à chaque z correspond un w, mais à chaque w correspond un z, c'est-à-dire que la représentation (4) *réalise une transformation biunivoque du plan des z sur le plan des w.*

Considérons une famille de droites parallèles de coefficient angulaire $k = \operatorname{tg} \varphi$, c'est-à-dire les droites $y = kx + C$. En y remplaçant x et y d'après les formules (6), nous voyons qu'à cette famille de droites correspond la famille de droites parallèles $-cu + av + lc - am = k(du - bv - dl + bm) + C\Delta$, de coefficient angulaire

$$k^* = \operatorname{tg} \theta = \frac{c + kd}{a + kb}.$$

Il en découle que la transformation (4) *transforme les carrés du plan des z en parallélogrammes du plan des w.*

Soient $z_0 = x_0 + iy_0$ et $w_0 = u_0 + iv_0$ un couple de points qui se correspondent par la transformation (4). On peut représenter cette transformation sous la forme

$$\left.\begin{aligned} u - u_0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0), \\ v - v_0 &= c(x - x_0) + d(y - y_0), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

et la transformation inverse sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{d}{\Delta}(u - u_0) - \frac{b}{\Delta}(v - v_0), \\ y - y_0 &= -\frac{c}{\Delta}(u - u_0) + \frac{a}{\Delta}(v - v_0) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(pour établir les formules (7) et (8), il suffit de faire $x = x_0, \ldots$ $\ldots, v = v_0$ dans les relations (4) et (6) et de retrancher de (4) et de (6) les équations obtenues). Tenant compte des formules (8), nous pouvons affirmer que la circonférence de centre au point z_0:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

(*) Dans le cas $\Delta = 0$ on dit que la transformation (4) est dégénérée.

se transforme par la transformation (4) en une ellipse de centre au point w_0 et d'équation :

$$(d^2 + c^2)(u - u_0)^2 - 2(bd + ac)(u - u_0)(v - v_0) + \\ + (b^2 + a^2)(v - v_0)^2 = \Delta^2 r^2. \qquad (9)$$

Posons-nous la question : à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients de la transformation (4) pour que l'image d'une circonférence soit une circonférence ? Il découle de (9) qu'il faut et qu'il suffit que les relations

$$bd + ac = 0, \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \qquad (10)$$

soient satisfaites. La première donne $\frac{a}{d} = -\frac{b}{c} = \lambda$, d'où $a = \lambda d$, $b = -\lambda c$. En les substituant dans la deuxième équation (10), il vient $\lambda^2 = 1$ ou $\lambda = \pm 1$.

Le cas $\lambda = 1$ nous mène aux relations

$$a = d, \quad b = -c. \qquad (11)$$

Dans ce cas $\Delta = ad - bc = a^2 + b^2 > 0$. Posons

$$a = d = \sqrt{\Delta}\cos\alpha, \quad c = -b = \sqrt{\Delta}\sin\alpha,$$

cela est possible puisque $\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{\Delta} = 1$. La transformation (4) s'écrit alors sous la forme :

$$u = \sqrt{\Delta}(\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y) + l,$$
$$v = \sqrt{\Delta}(\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y) + m.$$

Ces relations peuvent être écrites sous la forme complexe comme suit :

$$u + iv = \sqrt{\Delta}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy) + l + im,$$

et elles nous mènent à une fonction linéaire de la variable complexe

$$w = Az + B, \qquad (12)$$

où

$$A = \sqrt{\Delta}e^{i\alpha}, \quad B = l + im. \qquad (13)$$

On voit que, avec les conditions (11), la transformation linéaire (4) se ramène à une translation du plan des z de vecteur $B = l + im$, à une rotation d'angle $\alpha = \operatorname{Arg} A$ et à une dilatation de coefficient $\sqrt{\Delta} = |A|$ (cf. n° 4).

Dans le cas $\lambda = -1$ nous avons

$$a = -d, \quad b = c \qquad (14)$$

et $\Delta = -a^2 - b^2 < 0$. En répétant les calculs qui viennent d'être faits, nous voyons que la transformation (4) peut être écrite comme

suit

$$w = \sqrt{-\Delta}e^{i\alpha}\bar{z} + B. \tag{15}$$

Donc, avec les conditions (14), il faut ajouter aux transformations qui viennent d'être énumérées la transformation de z en $\bar{z}$, c'est-à-dire une symétrie par rapport à l'axe réel (cf. n° 1).

D'après l'interprétation géométrique des transformations (12) et (15) il est clair qu'elles conservent les figures semblables et, en particulier, les angles formés par deux droites, qu'elles transforment les carrés du plan des z en carrés du plan des w, etc. Les transformations linéaires qui jouissent de ces propriétés sont dites *orthogonales*. Ainsi, les *conditions* (10) *sont les conditions d'orthogonalité* (*) pour la transformation (4). Il est clair que la transformation (12) conserve le sens de parcours sur les contours fermés (autrement dit conserve l'orientation) tandis que (15) inverse ce sens (change l'orientation). Ainsi, les conditions (11) caractérisent les transformations orthogonales qui conservent l'orientation et les conditions (14) les transformations orthogonales qui changent cette orientation.

Revenons aux transformations arbitraires. Une transformation biunivoque

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

d'un domaine D sur un domaine D^* est dite *conforme* si dans un voisinage de tout point de D la partie linéaire principale de cette transformation est une transformation orthogonale qui conserve l'orientation (**). Deux propriétés fondamentales des représentations conformes découlent de cette définition :

1) *La représentation conforme transforme les circonférences infiniment petites en circonférences aux infiniment petits d'ordre supérieur près* (caractère circulaire).

2) *La représentation conforme conserve les angles des courbes en leurs points d'intersection* (propriété de conservation des angles).

La première propriété signifie que pour des r petits la circonférence $C : |z - z_0| = r$ a pour image une courbe C^* telle que la distance d'un point quelconque de celle-ci à la circonférence $|w - w_0| = \rho$ menée par un point quelconque de la courbe C^*, image de C par la transformation considérée, est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à r. La deuxième propriété signifie

(*) Remarquons qu'on aboutit aux mêmes conditions d'orthogonalité si l'on exige que l'angle de rotation $\theta - \varphi$ de tout rayon $\arg z = \varphi$ ne dépende pas de l'angle φ.

(**) La transformation $w = f(z)$ est dite *transformation conforme de deuxième espèce* si sa partie linéaire principale est une transformation orthogonale qui change l'orientation.

que l'angle au point z_0 de deux courbes arbitraires Γ_1 et Γ_2 est égal à l'angle au point w_0 des images Γ_1^* et Γ_2^* de ces courbes (*) (fig. 38).

Tenant compte des formules (5) et (11) nous pouvons écrire les conditions pour que la transformation (1) soit conforme:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{16}$$

en outre, on doit avoir

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0, \tag{17}$$

car si $\Delta = 0$, la partie linéaire principale de la transformation $w = f(z)$ est dégénérée, ce qui est en contradiction avec les conditions

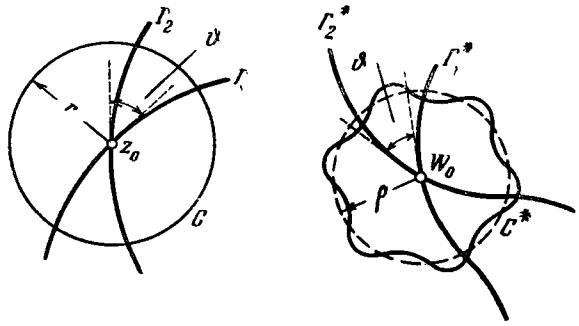

FIG. 38

d'après lesquelles la transformation est conforme. Ainsi, ces conditions coïncident avec les conditions de Cauchy-Riemann (n° 5) de différentiabilité (analyticité) d'une fonction $f(z)$ dans un domaine D, de plus l'inégalité (17) montre que la dérivée $f'(z)$ doit être partout différente de zéro.

Nous avons encore

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{\Delta}\cos\alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\Delta}\sin\alpha,$$

d'où il est facile d'obtenir l'interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction de la variable complexe. Nous avons

$$|f'(z)| = \sqrt{\Delta}; \quad \arg f'(z) = \alpha, \tag{18}$$

c'est-à-dire que le module et l'argument de la dérivée $f'(z)$ sont respectivement le coefficient de dilatation et l'angle de rotation de la partie

(*) Pour démontrer cette propriété il suffit de remarquer que l'angle de deux courbes est par définition l'angle de leurs tangentes et que la partie linéaire principale d'une transformation dérivable transforme la tangente d'une courbe Γ_k en la tangente de son image Γ_k^*.

linéaire principale de la transformation $w = f(z)$ *au point* z *ou, autrement dit, le coefficient de dilatation et l'angle de rotation de la transformation* $w = f(z)$ *au point* z.

Les raisonnements que nous venons de donner nous conduisent à la conclusion suivante :

Pour qu'une fonction $w = f(z)$ *réalise la représentation conforme d'un domaine* D, *il faut et il suffit qu'elle soit dans ce domaine* 1) *univalente*, 2) *analytique et* 3) *que partout dans* D *la dérivée* $f'(z)$ *soit différente de zéro.*

Remarquons que si $f'(z_0) = 0$, alors au voisinage du point z_0, le développement taylorien de la différence $f(z) - w_0$ est de la forme

$$f(z) - w_0 = c_n (z - z_0)^n + c_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \ldots, \qquad (19)$$

où $n \geqslant 2$ et $c_n \neq 0$ (cf. n° 20). Il en découle que pour des $| z - z_0 | = r$ petits la représentation réalisée par la fonction $f(z)$ diffère de la transformation

$$w - w_0 = c_n (z - z_0)^n \qquad (20)$$

par des infiniment petits d'ordre supérieur. Mais la transformation inverse de (20) a en w_0 un point de branchement d'ordre n, c'est-à-dire que la transformation (20) n'est pas univalente dans le voisinage du point z_0. Par conséquent, la transformation $w = f(z)$ n'est pas univalente dans le voisinage de z_0. Ainsi, la *condition* 3) *qui vient d'être énoncée peut être rejetée*, car elle découle de la condition 1) (univalence de la transformation).

Remarquons de même que, inversement, la condition $f'(z_0) \neq 0$ assure l'univalence de la transformation dans un voisinage suffisamment petit du point z_0, ce qui se démontre de la même façon que la proposition précédente. Cependant, si la condition $f'(z) \neq 0$ est satisfaite en chaque point d'un domaine D, il n'en découle pas encore que la transformation est univalente dans tout ce domaine, même si ce domaine est simplement connexe. Par exemple, dans la demi-couronne $1 < | z | < 2$, $0 < \arg z < \pi$, la transformation $w = z^4$ est évidemment non univalente, mais en tout point de la demi-couronne $\dfrac{dw}{dz} = 4z^3 \neq 0$.

Pour terminer nous dirons quelques mots sur les transformations réalisées par les fonctions uniformes non univalentes dans un domaine D. Nous avons vu (n° 26) que ces fonctions $w = f(z)$ réalisent une transformation biunivoque d'un domaine D sur la surface de Riemann R de la fonction inverse $z = \varphi(w)$. Soit P un point de la surface R se trouvant au-dessus du point w_0 et distinct d'un point de branchement et supposons qu'au point P corresponde un point z_0 du domaine D. Ceci signifie qu'il existe une branche $\varphi_0(w)$ de la fonction multiforme $\varphi(w)$ telle que $\varphi(w_0) = z_0$. Au point z_0 la dérivée $f_1(z_0) \neq 0$, car, dans le cas contraire, comme on le voit du

développement (19), P aurait été un point de branchement de la surface R. Ainsi, la fonction $f(z)$ réalise la transformation biunivoque d'un voisinage suffisamment petit de z_0 sur un voisinage du point w_0. Il est clair que cette transformation est conforme.

Ainsi, *la fonction* $w = f(z)$, *uniforme, non univalente dans un domaine* D, *réalise la représentation conforme dans un voisinage suffisamment petit de chaque point* z_0 *en lequel* $f'(z_0) \neq 0$. Les points en lesquels $f'(z) = 0$ ainsi que leurs images sur les surfaces de Riemann sont dits *points de branchement* ou *de ramification* (par exemple la fonction de Joukovski $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ a les points $z = \pm 1$ comme points de branchement, la fonction $w = \sin z$ les points $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, etc.).

28. Problème fondamental. Ayant une fonction analytique quelconque nous pouvons considérer différentes représentations conformes réalisées par celle-ci. Tout domaine D, dans lequel cette fonction est univalente, peut être transformé conformément à l'aide de cette fonction sur un domaine D^*. Ainsi, nous pouvons obtenir différents exemples de représentations conformes qui illustrent géométriquement la fonction considérée. En fait, nous nous sommes déjà occupés de ce problème au § 3 du chapitre précédent où toutes les transformations considérées étaient univalentes dans les domaines correspondants et réalisées par des fonctions analytiques (elles étaient donc conformes).

Cependant, en pratique, un grand intérêt est suscité par le problème inverse, beaucoup plus difficile, qu'il est convenu d'appeler:

Problème fondamental de la théorie des représentations conformes. *Etant donnés deux domaines* D *et* D^*, *on demande de construire une fonction réalisant la représentation conforme de l'un de ces domaines sur l'autre.*

Tenant compte de ce qu'il n'existe pas d'algorithmes suffisamment simples pour résoudre ce problème, la théorie des représentations conformes se développe dans les directions suivantes:

1) élucider les conditions générales d'existence de la représentation conforme et de son unicité;

2) définir différentes classes particulières de domaines dont les représentations peuvent être réalisées à l'aide de combinaisons de fonctions élémentaires;

3) étudier, à l'aide des propriétés générales des fonctions analytiques, différentes propriétés des représentations conformes en fonction de la forme des domaines à transformer;

4) élaborer des méthodes approchées de représentations conformes.

Arrêtons-nous sur le premier problème. Avant tout, il est clair que le problème fondamental de la représentation conforme est irré-

soluble sous la forme générale énoncée ci-dessus. Ainsi, un domaine multiplement connexe ne peut être transformé d'une manière biunivoque et continue sur un domaine simplement connexe. Sans nous arrêter sur la démonstration complète, nous indiquerons les raisons pour lesquelles cette transformation est impossible. Supposons qu'une telle transformation d'un domaine multiplement connexe D sur un domaine simplement connexe D^* existe. Prenons dans D une courbe fermée C contenant à son intérieur des points extérieurs ou frontières de D (une telle courbe existe toujours). L'image de C par la transformation considérée est une courbe fermée C^* appartenant à D^*. Si, en restant dans D^*, on réduit d'une manière continue la courbe C^* à un point w_0 de D^*, alors, en vertu de la continuité de la transformation, la courbe C, tout en restant dans le domaine D, se réduit d'une manière continue à un point de D, ce qui évidemment est impossible puisqu'il existe à l'intérieur du contour C des points qui n'appartiennent pas à D.

De plus, par exemple on ne peut transformer d'une manière conforme le plan fermé ou le plan ouvert des z sur un domaine borné D^* du plan des w. En effet, s'il existait une pareille transformation, la fonction $w = f(z)$, qui établit cette transformation, serait alors analytique dans tout le plan ouvert et bornée en même temps puisque toutes ses valeurs appartiendraient au domaine D^*. Mais alors, d'après le théorème de Cauchy-Liouville (n° 17), $f(z)$ devrait être constante, ce qui est absurde.

Néanmoins, pour deux domaines simplement connexes quelconques dont les frontières contiennent plus d'un point, il s'avère possible de transformer d'une manière conforme l'un des domaines sur l'autre et cela par un nombre infini de procédés, notamment on peut arriver à faire se correspondre deux points fixes quelconques et deux directions quelconques issues de ces points. En d'autres termes, on a le théorème suivant connu sous le nom de théorème fondamental de la théorie des représentations conformes:

Théorème. (B. Riemann, 1851). *Quels que soient les domaines simplement connexes D et D^* (de frontières composées de plus d'un point) et quels que soient les points z_0 de D et w_0 de D^* et le nombre réel α_0, il existe une et une seule représentation conforme*

$$w = f(z), \tag{1}$$

du domaine D sur le domaine D^*, telle que

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0. \tag{2}$$

La démonstration de l'*existence* des représentations conformes exige un instrument spécial sortant du cadre de ce livre et pour cette raison nous l'omettons. Ne tenant compte que de l'existence, dé-

montrons l'unicité de cette représentation conforme lorsque les conditions de normalisation (2) sont données.

Considérons d'abord un cas particulier lorsque les domaines D et D^* sont les cercles unités $|z|<1$, $|w|<1$, et $z_0 = w_0 = \alpha_0 = 0$. Nous devons montrer dans ce cas que si $w = f(z)$ réalise la représentation conforme du cercle $|z|<1$ sur le cercle $|w|<1$, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$, alors

$$f(z) \equiv z.$$

La démonstration est basée sur le lemme de Schwarz (n° 15). Puisque pour $|z|<1$ nous avons $|f(z)|<1$ car $w = f(z)$ transforme le cercle $|z|<1$ sur le cercle $|w|<1$, d'après ce lemme, on a

$$|f(z)| \leqslant |z|.$$

Appliquant ce même raisonnement à la fonction inverse de $f(z)$ nous obtenons:

$$|z| \leqslant |f(z)|.$$

Donc, $|f(z)| \equiv |z|$ et, d'après ce même lemme,

$$f(z) = e^{i\alpha} z.$$

Or, par hypothèse $f'(0) > 0$, donc $\alpha = 0$ et $f(z) \equiv z$.

Passons au cas général. Supposons qu'il existe deux représentations conformes de D sur D^*:

$$w = f_1(z), \quad w = f_2(z),$$

qui vérifient les conditions

$$f_1(z_0) = f_2(z_0) = w_0, \quad \arg f_1'(z_0) = \arg f_2'(z_0) = \alpha_0.$$

Transformons d'une manière conforme le cercle $|\zeta|<1$ sur le domaine D à l'aide de la fonction

$$z = \varphi(\zeta); \quad \varphi(0) = z_0, \quad \varphi'(0) > 0,$$

et le domaine D^* sur le cercle $|\omega|<1$ à l'aide de la fonction

$$\omega = \psi(w); \quad \psi(w_0) = 0, \quad \arg \psi'(w_0) = -\alpha_0.$$

Il est clair que les fonctions

$$\omega = F_1(\zeta) = \psi[f_1(\varphi(\zeta))], \quad \omega = F_2(\zeta) = \psi[f_2(\varphi(\zeta))]$$

réalisent les représentations conformes du cercle $|\zeta|<1$ sur le cercle $|\omega|<1$, avec

$$F_1(0) = F_2(0) = 0, \quad \arg F_1'(0) = \arg F_2'(0) = 0.$$

D'après ce qui vient d'être démontré, $F_1(\zeta) \equiv F_2(\zeta)$, mais alors $f_1(z) \equiv f_2(z)$ et l'unicité de la transformation est démontrée.

Pour terminer, donnons une généralisation du théorème de Cauchy-Liouville (n° 17), qui est une conséquence immédiate du théorème de Riemann.

Si une fonction $w = f(z)$ est analytique dans le plan ouvert et si elle ne prend pas les valeurs appartenant à un arc de courbe γ, elle est alors constante.

En effet, soit $\omega = \varphi(w)$ une fonction qui réalise la représentation conforme de l'extérieur de l'arc de courbe γ sur l'intérieur du cercle unité (cette fonction existe d'après le théorème de Riemann et, évidemment, n'est pas constante). Considérons la fonction composée $\omega = \varphi[f(z)] = g(z)$; elle est analytique dans le plan ouvert et toutes ses valeurs sont intérieures au cercle unité, donc, d'après le théorème de Cauchy-Liouville (n° 17), cette fonction est constante. Mais si $g(z)$ est constante, alors la fonction $f(z)$ est aussi constante. Ce qui achève la démonstration.

En particulier, la fonction $f(z)$ est par exemple constante si elle est analytique dans le plan ouvert et si toutes ses valeurs appartiennent à un demi-plan (elle ne prend pas alors les valeurs qui appartiennent à un arc de courbe quelconque du complémentaire de ce demi-plan).

29. Correspondance des frontières. Donnons les principales propositions concernant la correspondance des frontières qui s'établit pendant la représentation conforme des domaines. Pour plus de commodité, introduisons sur la frontière C du domaine D un paramètre réel s, longueur de l'arc de courbe comptée à partir d'un point fixe de la courbe C, de manière que l'on ait sur C $\zeta = \zeta(s)$. Soit $f(z)$ une fonction continue sur un domaine fermé $\overline{D}$, nous posons alors sur la frontière C de ce domaine :

$$f\{\zeta(s)\} = \varphi(s),$$

$\varphi(s)$ est appelée la *fonction frontière* de la fonction $f(z)$.

Donnons sans démonstration le théorème de la correspondance des frontières.

Théorème 1. *Soit $w = f(z)$ une fonction qui réalise la représentation conforme des domaines à frontières bornées D et D^*.* Alors

1) *$f(z)$ est continue sur la frontière du domaine D et la fonction frontière $w = f(\zeta) = \varphi(s)$ donne une correspondance continue et biunivoque entre les frontières des domaines D et D^* ;*

2) *si les frontières de D et de D^* ont en chaque point une courbure continue (donc bornée), la fonction frontière $\varphi(s)$ est continûment différentiable.*

De plus, on suppose partout que les points frontières multiples sont comptés autant de fois que l'indique leur ordre de multiplicité ; ainsi sur la fig. 39 les points des deux bords des coupures cd et de sont considérés distincts (à ces bords correspondent différents arcs frontières c^*d^* et d^*e^*), les points b^* et f^* aussi (il leur cor-

respond aussi des points différents b et f). Si l'on n'exige pas dans la première partie du théorème que la frontière de D^* soit bornée, alors la fonction $\varphi(s)$ est continue en tous les points de la frontière de D qui correspondent aux points à distances finies. Pour les points qui correspondent au point à l'infini de la frontière de D^* (il peut y en avoir plusieurs si ce point est multiple) la fonction $\frac{1}{\varphi(s)}$ est continue.

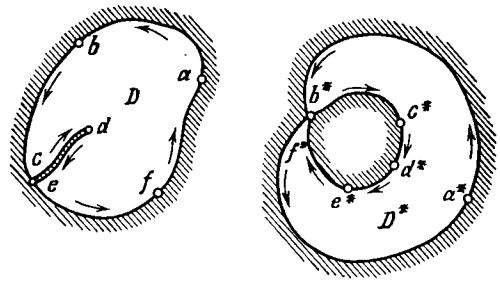

FIG. 39

Donnons encore, toujours sans démonstration, plusieurs résultats plus précis qui concernent l'existence de la dérivée de la représentation conforme sur la frontière du domaine. Le premier d'entre eux a été obtenu par *C. Carathéodory* en 1929 :

1) Si une fonction $w = f(z)$, $f(0) = 0$, réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur sur un domaine D dont la frontière C, au voisinage du point $w = 0$, est une courbe continue et si, de plus, il existe des circonférences passant par $w = 0$ dont l'une est complètement intérieure à D et l'autre complètement extérieure à D, alors, lorsque $z \to 0$ par les points du demi-plan supérieur, la limite :

$$\lim \frac{f(z)}{z} = \lim f'(z) = \gamma, \qquad 0 < |\gamma| < \infty,$$

existe.

En 1931, ce résultat a été amélioré par *M. Lavrentiev* et *P. Bessonov*.

2) Si au voisinage du point $w = 0$ la frontière C est rectifiable (*) et se trouve entre les deux courbes $v = \pm |u|^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, et $\lim\limits_{s \to 0} \frac{u(s)}{s} = 1$, où $u(s)$ est l'abscisse d'un point courant de C, dont la distance suivant C au point $w = 0$ est égale à s, alors la limite :

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} \frac{f(z)}{z} = \gamma, \qquad 0 < \gamma < \infty,$$

existe.

En pratique le résultat de *O. Kellogg* est suffisant. Pour l'énoncer on convient d'appeler *arc de courbe de Liapounov* un arc de courbe rectifiable qui possède en chaque point une tangente telle que l'angle ϑ de cette tangente avec l'axe des x, comme fonction de la

(*) C'est-à-dire que chaque arc de courbe possède une longueur déterminée.

longueur d'arc s, satisfait à la condition de Hölder

$$| \vartheta (s_2) - \vartheta (s_1) | < K | s_2 - s_1 |^{\alpha},$$

où K est une constante et $0 < \alpha \leqslant 1$. On a le théorème suivant.

Théorème. *Si une fonction $w = f(z)$ réalise la représentation conforme d'un domaine D, dont la frontière contient un arc de courbe de Liapounov c, sur un domaine D^* et si, de plus, c est transformé en un arc de courbe de Liapounov c^*, alors la dérivée $f'(z)$ existe sur c, ne s'annule pas et satisfait à la condition de Hölder.*

Le lecteur trouvera la démonstration du théorème de Kellogg dans le livre de G. Golouzine [6], p. 468.

Remarquons encore que les conditions de normalisation (2), dans le théorème fondamental du n° 28, qui contiennent trois paramètres réels x_0, y_0 ($x_0 + iy_0 = z_0$) et α_0, peuvent être remplacées par une condition sur la correspondance de trois couples de points appartenant aux frontières de D et D^* :

$$f(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

pris arbitrairement mais en conservant leur ordre de succession lorsqu'on décrit les frontières (*). Nous démontrerons cette proposition plus loin (n° 35).

Dans la pratique des représentations conformes l'important théorème suivant est dans un certain sens la réciproque du théorème 1 connue sous le nom de principe de la correspondance des frontières:

Théorème 2. *Soient donnés deux domaines simplement connexes D et D^* de frontières C et C^*, de plus le domaine D^* est borné. Si une fonction $w = f(z)$*

1) *est analytique dans D, continue sur $\overline{D}$ et*

2) *réalise la transformation biunivoque de C sur C^* avec conservation du sens de parcours,*

elle réalise alors aussi une représentation conforme (univalente) du domaine D sur le domaine D^*.

Pour démontrer ce théorème nous aurons recours au principe de l'argument (n° 23). Pour toute valeur complexe w_0 que $f(z)$ ne prend pas sur la frontière C du domaine D, le nombre des w_0-points de la fonction $f(z)$ dans D est égal à

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - w_0\},$$

où $\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$ est la variation totale de $\arg \{f(z) - w_0\}$ lorsque z décrit le contour C (cf. formule (13) du n° 23 ; la fonction $f(z)$ n'a pas de pôle dans le domaine D puisque $f(z)$ est continue).

(*) Les conditions (1) ainsi que les conditions (2) du n° 28 renferment trois paramètres réels, car la position d'un point sur la frontière d'un domaine est définie par un paramètre.

En vertu de la correspondance biunivoque et continue entre les points des contours C et C^*, nous avons:

$$\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\} = \Delta_{C^*} \arg (w - w_0).$$

Mais il est clair que $\Delta_{C^*} \arg (w - w_0)$ est égale à 2π pour tous les points w_0 intérieurs à C^* et nulle pour tous les points extérieurs à C^*. Donc pour tous les points w_0 intérieurs à C^*, $N(w_0) = 1$, et pour tous les points extérieurs à C^*, $N(w_0) = 0$. Ainsi, la fonction $w = f(z)$ prend dans D une fois et seulement une fois toute valeur de D^* et ne prend aucune autre valeur, c'est-à-dire qu'elle réalise la représentation univalente de D sur D^*. Le théorème est démontré.

Le fait que le domaine D est borné n'est pas utilisé dans la démonstration. Cependant, si le domaine D^* n'est pas borné, c'est-à-dire s'il contient à son intérieur (*) ou sur sa frontière le point à l'infini, le principe doit être précisé. Nous devons avant tout dans son énoncé rejeter la condition de continuité de $f(z)$ sur $\overline{D}$ puisque $f(z)$ cesse d'être continue au point qui correspond à $w = \infty$. Mais alors, sans restriction complémentaire, ce principe cesse d'être vrai. Par exemple, la fonction $w = z^3$ réalise une correspondance continue (excepté au point $z = \infty$) et biunivoque entre les points de l'axe des x et les points de l'axe des u avec conservation du sens de parcours, mais, toutefois, elle n'est pas univalente dans le demi-plan supérieur. En effet, par cette transformation le demi-plan supérieur, c'est-à-dire l'angle d'ouverture π, se transforme dans un angle d'ouverture 3π qui recouvre deux fois le demi-plan supérieur (et une fois le demi-plan inférieur).

Le cas d'un domaine D^* non borné est important en pratique; étudions-le maintenant en détail. On a deux théorèmes (nous conservons les notations introduites ci-dessus et la condition 2) imposée à la fonction $f(z)$).

Théorème 3. *Soit D^* un domaine qui contient à son intérieur le point à l'infini. Le principe de la correspondance des frontières reste en vigueur si l'on remplace la condition* 1) *par la condition*

1′) *$f(z)$ est continue sur $\overline{D}$ et analytique dans D, sauf en un certain point intérieur z_0 en lequel elle a un pôle du premier ordre.*

Pour démontrer ce théorème nous aurons de nouveau recours au principe de l'argument. D'après ce principe, pour chaque point w_0 qui n'appartient pas à C^* le nombre des w_0-points de la fonction $f(z)$

(*) Si un domaine D contient à son intérieur le point $z = \infty$, il faut alors définir la notion de transformation conforme en ce point. Cette définition peut être obtenue au moyen de la projection stéréographique, en passant sur la sphère de nombres complexes. Cf. aussi n° 31 où cette question sera étudiée en détail.

vérifie la relation

$$N(w_0) - 1 = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - w_0\} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C^*} \arg (w - w_0)$$

(à l'intérieur du contour C^* il y a exactement un pôle du premier ordre).

Puisque le domaine D^* contient le point à l'infini, C^* est alors parcouru dans le sens négatif, c'est-à-dire que $\Delta_{C^*} \arg (w - w_0)$ est égal à -2π si w_0 se trouve à l'intérieur de C^* et à 0 si w_0 est extérieur à C^*. Ainsi $N(w_0) = 1$ pour tous les points intérieurs du domaine D^* et $N(w_0) = 0$ pour tous les points extérieurs, ce qu'il fallait démontrer.

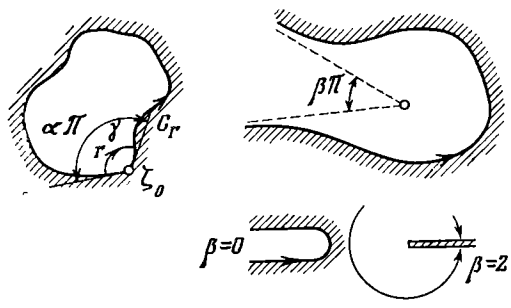

FIG. 40

Le théorème suivant concerne le cas des domaines contenant le point à l'infini sur la frontière. Comme le montre l'exemple de la fonction $w = z^3$ donné ci-dessus, pour que le principe de la correspondance des frontières soit conservé, il faut imposer dans ce cas des restrictions supplémentaires.

Supposons d'abord que le domaine D^* n'ait qu'un seul point pareil, c'est-à-dire que $w = \infty$ soit un point simple de la frontière C^* ; supposons encore que les branches de C^* s'éloignant à l'infini possèdent des asymptotes (*). Désignons par $\beta\pi$ $(0 \leqslant \beta \leqslant 2)$ l'angle formé par ces asymptotes et mesuré comme l'indique la fig. 40 (sur cette figure les cas $\beta = 0$ et $\beta = 2$ sont représentés séparément ; le complémentaire du domaine est hachuré). Supposons que le point $w = \infty$ correspond au point ζ_0 du contour C ; nous désignons par $\alpha\pi$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ l'angle des tangentes au contour C en ce point. Supposons encore qu'au voisinage du point ζ_0 la fonction $f(z)$ soit un infiniment grand d'ordre μ, c'est-à-dire qu'il existe une constante $A \neq 0, \neq \infty$ telle que lorsque z tend vers le point ζ_0 par les points du domaine D, la limite

$$\lim_{z \to \zeta_0} \{f(z)(z_0 - \zeta_0)^{\mu}\} = A \quad (\mu > 0) \tag{2}$$

existe.

(*) Pour le point à l'infini cette condition est l'analogue de la condition qui dit qu'une courbe est une fois continûment différentiable par morceau.

Dans le cas considéré, le principe de la correspondance des frontières ne peut être appliqué directement vu que $f(z)$ devient infinie sur le contour C. Il s'avère que pour que le principe soit conservé, il faut imposer une restriction sur l'ordre de croissance μ de la fonction réalisant la représentation. On a dans les conditions et notations adoptées ci-dessus :

Théorème 4. *Le principe de la correspondance des frontières reste en vigueur si l'on remplace la condition* 1) *par la condition*

1″) *la fonction* $f(z)$ *est analytique dans* D *et continue sur* $\overline{D}$ *partout sauf au point* ζ_0 *et elle est un infiniment grand d'ordre* μ *avec*

$$\mu < \frac{\beta+2}{\alpha} \tag{3}$$

dans son voisinage appartenant à D.

Pour démontrer ce théorème retranchons du domaine D le cercle $|z-\zeta_0|<r$ de rayon petit et de centre au point ζ_0 ; nous désignons par γ_r l'arc de circonférence appartenant à D, la partie restante du contour C par C_r et le contour $C_r \cup \gamma_r$ par $\widetilde{C}$. Le principe de la correspondance des frontières est applicable au domaine $\widetilde{D}$ de frontière $\widetilde{C}$.

Soit w_0 un point quelconque du domaine D^*. Puisque w_0 est fini et que $f(z) \to \infty$ lorsque $z \to \zeta_0$, on peut alors choisir le rayon r aussi petit que l'on veut pour que la partie du domaine D que l'on a retranchée ne contient aucun w_0-point de la fonction $f(z)$. Alors $N(w_0)$, le nombre des w_0-points de la fonction $f(z)$ dans le domaine D, est égal au nombre des points semblables du domaine $\widetilde{D}$, et, d'après le principe de l'argument, nous avons

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\widetilde{C}} \arg \{f(z) - w_0\} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_r} + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_r}. \tag{4}$$

Pour calculer le premier terme, remarquons que lorsque le point z décrit C_r, le point correspondant w décrit dans le sens positif la courbe C^* sauf un certain arc se trouvant dans un petit voisinage du point $w = \infty$. Donc

$$\Delta_{C_r} = \Delta_{C_r^*} \arg (w - w_0) = (2 - \beta)\,\pi + O(r), \tag{5}$$

où C_r^* est l'image de l'arc de courbe C_r et $O(r)$ désigne une quantité qui tend vers zéro avec r (ultérieurement, au cas de besoin, nous utiliserons ce symbole, il désignera aussi bien des quantités réelles que complexes).

Pour calculer le second terme, utilisons la condition (2) en représentant $f(z)$, au voisinage du point ζ_0, sous la forme

$$f(z) = \frac{1}{(z-\zeta_0)^\mu} \{A + O(r)\}.$$

On peut alors affirmer que

$$\Delta_{\gamma_r} = \Delta_{\gamma_r} \arg \frac{A + O(r) - w_0 (z-\zeta_0)^\mu}{(z-\zeta_0)^\mu} = \Delta_{\gamma_r} \arg \{A + O(r)\} - \mu \Delta_{\gamma_r} \arg (z-\zeta_0),$$

car la quantité $w_0 (z - \zeta_0)^\mu$, un infiniment petit lorsque $r \to 0$, peut être incluse dans le symbole $O(r)$. Puisque $A \neq 0$ et est une constante, le premier terme tend donc vers zéro lorsque $r \to 0$; il résulte de la fig. 40 que

$\Delta_{\gamma_r} \arg (z - \zeta_0) = -\alpha\pi + O(r)$, donc

$$\Delta_{\gamma_r} = \alpha\mu\pi + O(r). \tag{6}$$

Substituant les expressions (5) et (6) dans la formule (4), nous trouvons $N(w_0) = 1 + \frac{\alpha\mu - \beta}{2} + O(r)$, d'où, lorsque $r \to 0$, il vient

$$N(w_0) = 1 + \frac{\alpha\mu - \beta}{2}. \tag{7}$$

Or d'après la restriction (3) sur la croissance de $f(z)$ on a $\alpha\mu - \beta < 2$ et nous déduisons de la formule (7) que $N(w_0) < 2$; d'autre part, $N(w_0) = \frac{1}{2}(2 - \beta + \alpha\mu) > 0$, puisque $\alpha\mu > 0$ et $\beta \leqslant 2$. Mais l'intervalle ouvert (0, 2) ne contient qu'un seul nombre entier, à savoir 1, donc $N(w_0) = 1$.

Nous avons démontré que toute valeur w_0 du domaine D^* est prise une fois et seulement une fois par la fonction $f(z)$ dans D. Si le point w_0 appartient à l'extérieur du domaine D^*, alors nos raisonnements restent encore vrais si l'on remplace $(2 - \beta)\pi$ par $-\beta\pi$ dans la formule (5), et à la place de la formule (7) nous avons alors

$$N(w_0) = \frac{\alpha\mu - \beta}{2} \tag{8}$$

C'est pourquoi, dans ce cas nous avons $-1 < N(w_0) < 1$ et, par conséquent, $N(w_0) = 0$, c'est-à-dire que la fonction $f(z)$ ne prend dans le domaine D aucune valeur qui n'appartienne pas à D^*. Ainsi la fonction $w = f(z)$ réalise la représentation univalente de D sur D^*, et le théorème est démontré.

Remarquons que dans les conditions du théorème démontré nous avons $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$ (cela découle des formules (7) ou (8)), c'est-à-dire qu'au voisinage du point ζ_0

$$f(z) = \frac{A}{(z - \zeta_0)^{\beta/\alpha}} \{1 + O(r)\}. \tag{9}$$

Supposons en particulier $\alpha = \beta = 1$, c'est-à-dire que ζ_0 et $w = \infty$ ne sont pas des points anguleux. Alors l'inégalité (3) devient $\mu < 3$. Ainsi, la fonction $f(z)$ doit être un infiniment grand d'ordre inférieur à trois au voisinage du point ζ_0. L'exemple de la fonction $w = z^3$ qui précède le théorème 3 montre que, dans le cas considéré, le théorème est exact, c'est-à-dire qu'un infiniment grand d'ordre trois n'assure déjà plus l'univalence de la transformation.

Donnons enfin la proposition suivante:

Si $w = \infty$ est un point multiple d'un contour C^*, alors, pour que le principe de la correspondance des frontières reste valable, il suffit que la condition (3) *soit satisfaite au moins en un point* (*) ζ_0 *du contour C, image du point $w = \infty$.*

En effet, retranchons de D les cercles voisinages $|z - \zeta_k| < r_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, où n est l'ordre de multiplicité du point

(*) Ces points sont en nombre égal à l'ordre de multiplicité du point frontière $w = \infty$ du domaine D^*.

$w = \infty$) de tous les points ζ_k, images du point $w = \infty$, et désignons par $\widetilde{D}$ le domaine ainsi obtenu. Pour toute valeur w_0 n'appartenant pas à C^* (donc finie) choisissons r_k aussi petit pour que le nombre des w_0-points de la fonction $f(z)$ dans les domaines D et $\widetilde{D}$ soit le même. Faisons tendre maintenant r_0 vers zéro en conservant $r_1, r_2, \ldots$ $\ldots, r_{n-1}$ fixes. Ici on peut répéter textuellement la démonstration du théorème précédent, par conséquent, $N(w_0) = 1$ pour tous les points de D^* et $N(w_0) = 0$ pour tous les points w_0 n'appartenant pas à D^*, ce qui achève la démonstration.

Nous allons donner (n° 30) plusieurs exemples où l'on applique le principe de la correspondance des frontières.

30. Exemples. 1) La fonction

$$w = \frac{4z}{(1+z)^2} \tag{1}$$

prend les valeurs $w = \dfrac{4e^{i\varphi}}{(1+e^{i\varphi})^2} = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$ sur la frontière du cercle unité.

Elle établit donc une correspondance biunivoque entre les points de la circonférence unité et les points du rayon $u > 1$, $v = 0$. Cette correspondance est partout continue, excepté au point $\zeta_0 = -1$, au voisinage duquel

$$w \approx \frac{-4}{(1+z)^2}.$$

Ici on peut appliquer le théorème 4 du n° 29, puisque $\alpha = 1$, $\beta = 2$, et la condition (3) est satisfaite. Par conséquent, la fonction (1) réalise une représentation conforme univalente du cercle $|z| < 1$ sur le domaine obtenu en

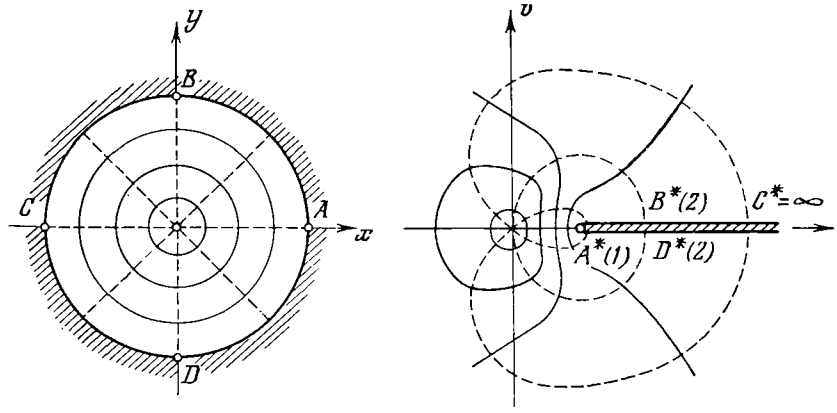

FIG. 41

retranchant du plan des w le rayon $u > 1$, $v = 0$. On a représenté sur la fig. 41 les réseaux de courbes qui se correspondent par la transformation considérée; dans le plan des w ce réseau est orthogonal puisqu'il est l'image conforme d'un réseau orthogonal du plan des z (les circonférences $|z| = \text{const}$ et leurs rayons).

2) Considérons un cas plus général. La fonction

$$w=\sqrt[n]{4}\,\frac{z}{(z^n+1)^{2/n}} \tag{2}$$

pour $n = 1$ coïncide avec la fonction de l'exemple précédent. Elle prend les valeurs $w=\sqrt[n]{4}\,\dfrac{e^{i\varphi}}{(e^{in\varphi}+1)^{2/n}}=\dfrac{1}{\left(\cos\dfrac{n\varphi}{2}\right)^{2/n}}$ sur la circonférence unité. Portons

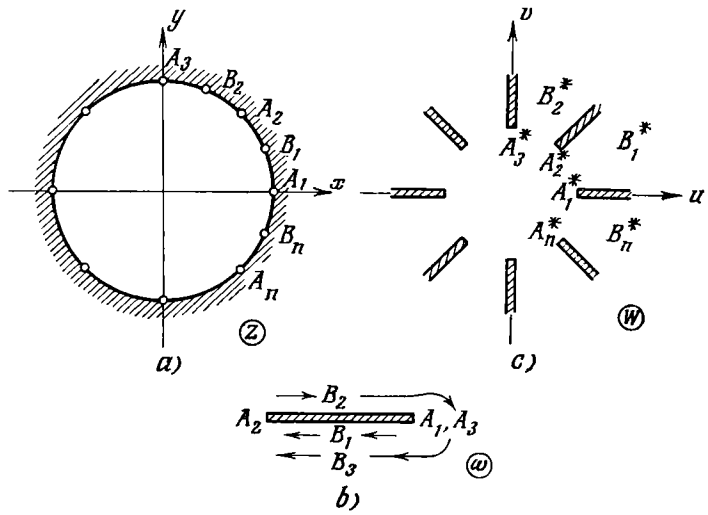

FIG. 42

sur la circonférence unité les sommets d'un polygone régulier à n côtés : $A_k = e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}$ et les milieux des arcs qu'ils engendrent : $B_k = e^{i(2k-1)\frac{\pi}{n}}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) (fig. 42). La quantité $\omega = \cos\dfrac{n\varphi}{2}$ décroît de 1 à 0 sur l'arc de circonférence A_1B_1 (nous prenons $\arg\omega = 0$ sur cet arc) ; sur l'arc de circonférence B_1A_2 elle varie de 0 à -1 (sur cet arc nous prenons $\arg\omega = -\pi$) ; sur l'arc de circonférence A_2B_2 de -1 à 0 (nous prenons comme pour l'arc B_1A_2 $\arg\omega = -\pi$) ; sur l'arc de circonférence B_2A_3 de 0 à 1 (nous prenons $\arg\omega = -2\pi$), etc. (fig. 42*b*). D'après ce qui vient d'être dit, sur l'arc de circonférence A_1B_1, le module du point image w croît de 1 à $+\infty$ et l'argument est nul ; sur l'arc de circonférence B_1A_2 le module de w décroît de $+\infty$ à 1 et l'argument est égal à $\dfrac{2\pi}{n}$; sur l'arc de circonférence A_2B_2 le module de w croît de 1 à $+\infty$ $\left(\text{comme pour l'arc } B_1A_2 \text{ arg } \omega=\dfrac{2\pi}{n}\right)$; sur B_2A_3, le module de w décroît de $+\infty$ à 1 et $\arg\omega = 2\cdot\dfrac{2\pi}{n}$, etc. Ainsi le point w décrit successivement les n rayons

$$\arg\omega=(k-1)\frac{2\pi}{n}, \qquad |w|\geqslant 1 \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

chaque rayon étant parcouru deux fois dans des sens opposés (fig. 42*c*). L'image de la circonférence $|z| = 1$ par la transformation considérée a le point $w = \infty$ comme point multiple d'ordre n auquel correspondent les points B_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) de la circonférence. Puisque chaque point B_k est un zéro simple de $z^n + 1$, dans son voisinage $w \approx \dfrac{C_k}{(z - B_k)^{2/n}}$, où C_k est une constante. D'après le principe de la correspondance des frontières (théorème 4 avec $\alpha_k = 1$, $\beta_k = \dfrac{2}{n}$), la fonction (2) réalise la transformation conforme univalente du cercle $|z| < 1$ sur le plan des w duquel on a retranché les rayons (3).

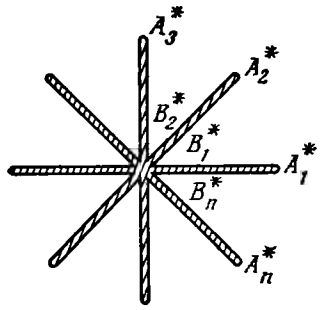

FIG. 43

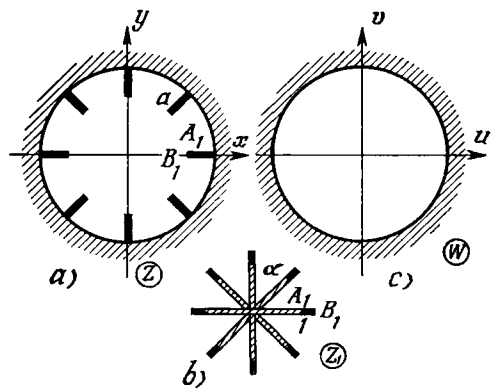

FIG. 44

3) Réalisant la transformation complémentaire $w = \dfrac{1}{w_1}$ du plan des w nous obtenons la transformation

$$w = \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \frac{(z^n + 1)^{\frac{2}{n}}}{z} \tag{4}$$

du cercle unité sur l'extérieur d'une « étoile » composée de n rayons

$$|w| < 1, \quad \arg \omega = (k - 1)\frac{2\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

(fig. 43; nous écrivons de nouveau w au lieu de w_1). Pour $n = 2$ nous avons $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, c'est-à-dire que nous retrouvons la transformation de Joukovski (cf. n° 7).

4) Considérons maintenant le cercle unité $|z| < 1$ duquel on a retranché des segments de longueur a

$$1 - a \leqslant |z| \leqslant 1, \quad \arg z = (k - 1)\frac{2\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

(fig. 44*a*). On vérifie facilement à l'aide de la méthode donnée ci-dessus que la fonction

$$z_1 = f(z) = \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \frac{(z^n + 1)^{2/n}}{z}$$

de l'exemple précédent transforme ce domaine sur l'extérieur d'une « étoile » dont la longueur des rayons est

$$1+\alpha=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\,\frac{[(1-a)^n+1]^{2/n}}{1-a} \tag{7}$$

et semblable à l'« étoile » (5) (fig. 44*b*). L'homothétie $z_2=\frac{z_1}{1+\alpha}$ donne une étoile dont la longueur des rayons est égale à l'unité, alors la fonction

$$w=g(z_2)=[z_2^{n/2}+\sqrt{z_2^n-1}]^{2/n}, \tag{8}$$

inverse de la fonction (4), transforme l'extérieur de cette « étoile » sur l'intérieur du cercle unité. Ainsi, la fonction

$$w=g\left(\frac{1}{1+\alpha}\,f(z)\right) \tag{9}$$

réalise la représentation conforme du cercle unité duquel on a retranché n segments (6) sur l'intérieur du cercle unité.

Sous forme développée la formule (9) est assez volumineuse, c'est pourquoi il y a intérêt à obtenir une formule approchée, commode pour les calculs. Supposons que la quantité a est petite ; alors, il vient de (7), en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à a^2, et en utilisant la formule de Taylor que

$$\alpha\approx\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\left[2-na+\frac{n(n-1)}{2}\,a^2\right]^{\frac{2}{n}}(1+a+a^2)-1\approx\frac{na^2}{4}.$$

On trouve d'une manière analogue, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à α, que

$$z_2=\frac{1}{1+\alpha}\,f(z)\approx(1-\alpha)\left(\frac{z^n+1}{2z^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{2}{n}}$$

et d'après la formule (8)

$$w\approx\left[\left(1-\frac{n\alpha}{2}\right)\frac{z^n+1}{2z^{\frac{n}{2}}}+\sqrt{(1-n\alpha)\frac{(z^n+1)^2}{4z^n}-1}\right]^{\frac{2}{n}}\approx z\left(1+\alpha\,\frac{1+z^n}{1-z^n}\right).$$

Substituant la valeur de α, trouvée plus haut, nous avons :

$$w\approx z\left(1+\frac{na^2}{4}\,\frac{1+z^n}{1-z^n}\right). \tag{10}$$

Cette formule est valable pour les points qui ne sont pas trop voisins de points $A_k=e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}$. Pour $a=0$, on a $w\equiv z$, ce qui devait avoir lieu.

5) Considérons la fonction

$$w=z+e^z. \tag{11}$$

Posant $z=x+iy$, $w=u+iv$, nous avons : $u=x+e^x\cos y$, $v=y+e^x\sin y$, d'où il découle que sur les droites $y=\pm\pi$, limitant la bande $-\pi<y<\pi$, on a les relations $u=x-e^x$, $v=\pm\pi$, c'est-à-dire que ces

droites se transforment en les rayons $-\infty < u < -1$, $v = \pm\pi$, parcourus deux fois (la fonction $u = x - e^x$ atteint son maximum $u = -1$ pour $x = 0$). Le principe de la correspondance des frontières ne peut être appliqué, mais l'analyse directe de la fonction montre qu'elle réalise une représentation conforme de la bande $-\pi < y < \pi$ sur un domaine qui s'obtient du plan des w

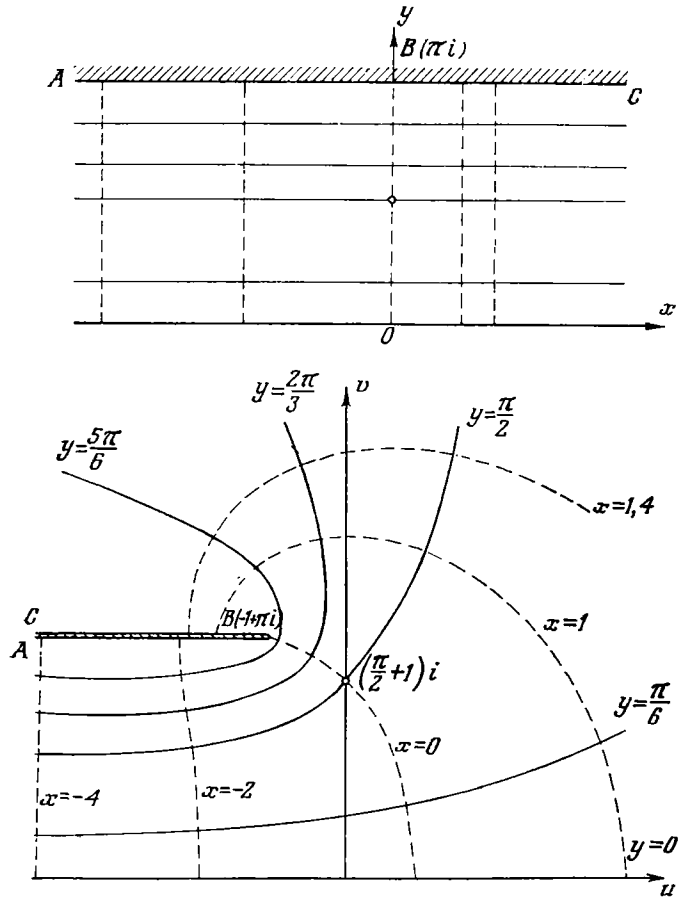

FIG. 45

en y retranchant les deux rayons $-\infty < u < -1$, $v = \pm\pi$. On a représenté sur la fig. 45 la correspondance des courbes par cette transformation (on a donné les moitiés supérieures des domaines, la transformation des moitiés inférieures est symétrique).

6) La fonction exponentielle

$$w = e^z \tag{12}$$

transforme les droites parallèles $y = k(x - a_1)$, $y = k(x - a_2)$ $(k \neq 0, \neq\infty)$ en les courbes $w = e^x e^{ik(x - a_\nu)}$ $(\nu = 1, 2)$. Introduisons les coordonnées polaires

$w = \rho e^{i\theta}$ dans le plan des w; nous avons $\rho = e^x$, $\theta = k\,(x - a_\nu)$, soit encore

$$\rho = \rho_\nu e^{\frac{\theta}{k}}, \tag{13}$$

où $\rho_\nu = e^{a_\nu}$ $(\nu = 1, 2)$. Ce sont deux spirales logarithmiques semblables. Si $k\,(a_2 - a_1) < 2\pi$, alors, dans le plan des z, la longueur des segments verticaux, compris entre les droites, est inférieure à 2π, et la transformation est

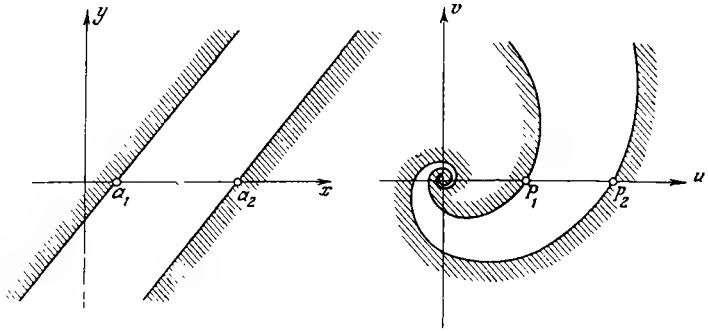

FIG. 46

univalente dans la bande comprise entre celles-ci (cf. n° 8). En faisant varier a de a_1 à a_2 on peut se convaincre que la fonction exponentielle réalise la transformation de cette bande sur la bande comprise entre les deux spirales logarithmiques (fig. 46). Si $k\,(a_2 - a_1) = 2\pi$, alors les deux spirales coïncident et

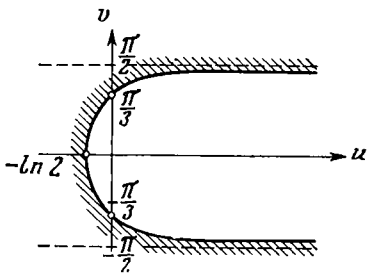

FIG. 47

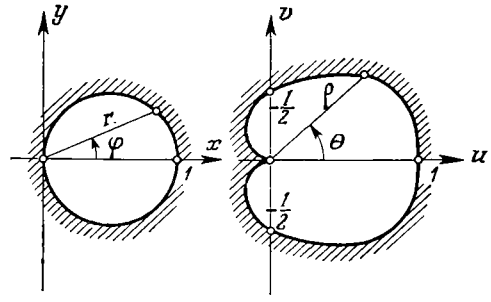

FIG. 48

nous obtenons la transformation sur le plan duquel on a retranché cette spirale.

Pour $k\,(a_2 - a_1) > 2\pi$ la transformation n'est pas univalente.

7) La fonction

$$w = \ln \frac{1}{1 - z} \tag{14}$$

prend les valeurs $w = \ln \dfrac{1}{1 - e^{i\varphi}} = \ln \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}} + i\,\dfrac{\pi - \varphi}{2}$ sur la frontière du cercle unité; posant $w = u + iv$ et éliminant le paramètre φ nous obtenons l'équation

de l'image de la circonférence unité :

$$u = \ln \frac{1}{2 \cos v}. \tag{15}$$

Cette équation est celle de la chaînette d'égale résistance (fig. 47). D'après le principe de la correspondance des frontières, nous trouvons que la fonction

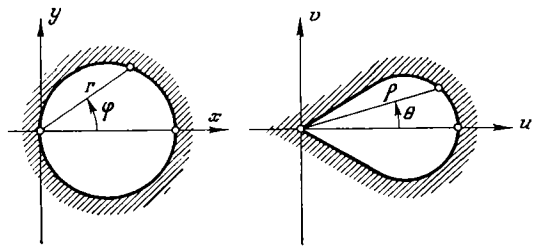

FIG. 49

(14) réalise la représentation conforme du cercle unité sur l'intérieur de cette courbe.

8) La fonction

$$w = z^2 \tag{16}$$

ou encore, en coordonnées polaires, $\rho = r^2$, $\theta = 2\varphi$, transforme la circonférence $r = \cos \varphi$ en la cardioïde

$$\rho = \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \tag{17}$$

(fig. 48). D'après le principe de la correspondance des frontières, la fonction (16) réalise la représentation conforme de l'intérieur de cette circonférence sur l'intérieur de la cardioïde.

9) La fonction

$$w = \sqrt{z}, \tag{18}$$

ou encore $\rho = \sqrt{r}$, $\theta = \frac{\varphi}{2}$, où $\varphi = \arg z$ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, transforme la circonférence de l'exemple précédent en la branche de la lemniscate $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ (fig. 49). D'après le principe de la correspondance des frontières, la fonction (18) réalise la transformation de l'intérieur de cette circonférence sur l'intérieur de la branche de droite de la lemniscate.

§ 2. REPRÉSENTATIONS CONFORMES SIMPLES

Ce paragraphe est consacré aux méthoodes les plus simples de résolution du problème fondamental de la théorie des représentations conformes : le problème de la détermination des fonctions qui réalisent la représentation conforme d'un domaine donné sur un autre. On y donne suffisamment d'exemples pour que le lecteur prenne connaissance des procédés qui permettent de résoudre ce problème en choisissant d'une manière convenable les combinaisons de fonctions élémentaires (si cela est possible). Ce choix suppose une con-

naissance parfaite de la géométrie des fonctions élémentaires, c'est pourquoi on recommande de revoir le § 3 du chapitre I avant d'entreprendre la lecture des numéros 33 et 34. Nous accordons également une grande place aux méthodes particulièrement importantes pour la pratique, qui permettent d'obtenir des formules approchées des représentations conformes.

La manipulation des représentations conformes simples exige que l'on ait fréquemment recours aux fonctions homographiques. Nous entreprenons à présent l'étude de leurs propriétés géométriques. Notons que les transformations réalisées par les fonctions homographiques sont très intimement liées à la géométrie de *Lobatchevski* ; cependant, nous ne nous arrêterons pas sur ce lien (*).

31. Transformations homographiques. C'est ainsi que nous appellerons les transformations réalisées par les fonctions homographiques

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

où a, b, c et d sont des constantes complexes, avec $ad - bc \neq 0$ (**). La fonction (1) est définie dans le plan fermé des z (sa valeur au point $z = -\frac{d}{c}$ est égale à ∞ et au point $z = \infty$ à $\lim\limits_{z\to\infty} w = \frac{a}{c}$).

Puisque la dérivée

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \tag{2}$$

existe partout pour $z \neq -\frac{d}{c}$, la fonction (1) est donc partout analytique dans le plan fermé des z, excepté au point $z = -\frac{d}{c}$ qui est un pôle d'ordre un de cette fonction. L'équation (1) est résoluble d'une manière unique par rapport à z

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}, \tag{3}$$

en outre, la fonction (3) est définie dans le plan fermé des w (sa valeur au point $w = \frac{a}{c}$ est égale à ∞ et au point $w = \infty$ à $-\frac{d}{c}$). C'est pour cette raison que la fonction homographique réalise une représentation univalente du plan fermé des z sur le plan fermé des w.

Il est facile de voir que la fonction homographique est l'unique fonction qui possède cette propriété. Notamment, on a le théorème suivant.

(*) Cf. Markouchévitch [2], pp. 111-118.

(**) Pour $ad - bc = 0$ nous avons $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, et la fonction (1) se réduit à une constante.

Théorème 1. *Si une fonction $f(z)$ est partout univalente et analytique dans le plan fermé des z, excepté au point C, elle est alors une fonction homographique.*

En effet, C ne peut être un point singulier essentiel pour la fonction $f(z)$, car alors, d'après le théorème de Sokhotski (n° 22), $f(z)$ serait évidemment non univalente. D'après le théorème de Cauchy-Liouville (sous la forme donnée au n° 24) C ne peut être un point singulier éliminable. Ainsi, le point C est un pôle, de plus, il est du premier ordre, puisqu'au voisinage d'un pôle d'ordre supérieur la fonction n'est pas univalente. Si $C \neq \infty$, alors la partie principale de la fonction $f(z)$ dans un voisinage du point C a la forme $\frac{B}{z-C}$; retranchant cette partie principale de $f(z)$ nous obtenons une fonction $\varphi(z) = f(z) - \frac{B}{z-C}$ qui n'a pas de singularités dans le plan fermé (l'unique point singulier pour $\varphi(z)$ aurait pu être le point C, mais il est un point singulier éliminable car l'on a retranché de $\varphi(z)$ la partie principale). Par conséquent, $\varphi(z) \equiv A$ est constante et la fonction

$$f(z) = A + \frac{B}{z-C}$$

est une fonction homographique. Si $C = \infty$, alors la partie principale de la fonction $f(z)$ est de la forme Az, et de la même manière on montrerait que $f(z) = Az + B$, c'est-à-dire qu'elle est une fonction linéaire entière. Le théorème est démontré.

La formule (3) montre que la fonction inverse d'une fonction homographique est encore une fonction homographique. Il est facile de vérifier que la fonction composée de fonctions homographiques est encore une fonction homographique.

Etudions les propriétés géométriques de la fonction homographique.

Si $c = 0$, alors la fonction (1) se réduit à une fonction linéaire entière dont les propriétés géométriques ont déjà été étudiées (n° 4). Pour étudier les propriétés géométriques de la fonction (1), lorsque $c \neq 0$, représentons-la sous la forme

$$w = A + \frac{B}{z-C}, \tag{4}$$

où A, B et C sont des constantes (*) et considérons cette transformation comme la transformation composée des transformations :

$$\text{(a) } z_1 = z - C; \quad \text{(b) } z_2 = \frac{1}{z_1}; \quad \text{(c) } w = A + Bz_2. \tag{5}$$

(*) Pour pouvoir représenter la fonction (1) sous la forme (4) il suffit de diviser dans l'expression (1) le numérateur par le dénominateur suivant les règles de la division des polynômes.

La transformation (a) se ramène à une translation, la transformation (c) à une translation et une rotation suivie d'une dilatation. Il reste à étudier la transformation (b) qui, en changeant les notations, s'écrit sous la forme

$$w = \frac{1}{z}. \tag{6}$$

Avec les coordonnées polaires $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$ la transformation (6) s'écrit sous la forme

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\varphi. \tag{7}$$

Il est commode de considérer la transformation (7) comme composée de deux transformations plus simples du point de vue géométrique :

$$(\alpha)\ \rho_1 = \frac{1}{r}, \quad \theta_1 = \varphi\ ; \qquad (\beta)\ \rho = \rho_1, \quad \theta = -\theta_1.$$

La transformation (β) est une transformation de symétrie par rapport à l'axe réel. La transformation (α) est une inversion, c'est-à-dire une transformation de symétrie par rapport à la circonférence unité (cf. n° 2).

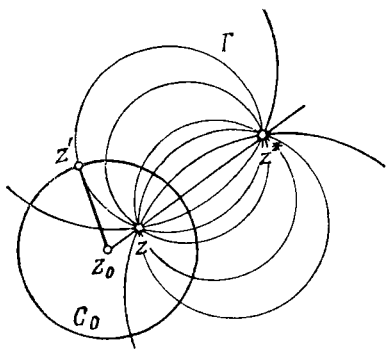

FIG. 50

En général, nous dirons que les points z et z^* *sont symétriques par rapport à la circonférence* C_0 : $|z - z_0| = R_0$ si

1) ils se trouvent sur un même rayon passant par z_0 ;

2) $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R_0^2$.

(Le procédé de construction des points symétriques exposé au n° 2 reste valable dans le cas général.)

La transformation qui fait correspondre à chaque point z du plan le point z^* symétrique par rapport à la circonférence C_0 est appelée *symétrie* par rapport à cette circonférence ou *inversion*.

Démontrons la propriété fondamentale des points symétriques : *les points z et z^* sont symétriques par rapport à la circonférence C_0 si, et seulement si, ils sont les sommets d'un faisceau de circonférences orthogonales à la circonférence C_0.*

En effet, soient z et z^* des points symétriques par rapport à C_0 et Γ une circonférence arbitraire passant par z et z^* (fig. 50). Menons par le point z_0 la tangente à la circonférence Γ. D'après le théorème bien connu, le carré de la longueur de cette tangente $|z' - z_0|^2$ est égal au produit de la sécante $|z^* - z_0|$ par sa partie extérieure $|z - z_0|$, c'est-à-dire

$$|z' - z_0|^2 = |z - z_0| \cdot |z^* - z_0|.$$

Puisque z et z^* sont symétriques par rapport à C_0, ce produit est égal à R_0^2 et, par conséquent, $|z' - z_0| = R_0$. Ainsi, la tangente à Γ est un rayon de la circonférence C_0, c'est-à-dire que Γ est orthogonale à C_0.

Inversement, si z et z^* sont les sommets d'un faisceau de circonférences $\{\Gamma\}$ orthogonales à la circonférence C_0, ils se trouvent alors sur une droite passant par z_0 puisque cette droite appartient au faisceau (*). La tangente z_0z' à une circonférence quelconque Γ est un rayon de la circonférence C_0 et, d'après le même théorème, $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R_0^2$, c'est-à-dire que z et z^* sont symétriques par rapport à C_0. Ainsi, la propriété est démontrée.

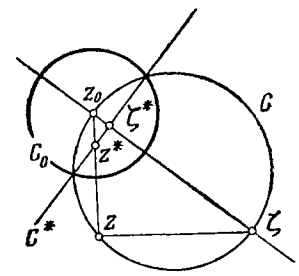

FIG. 51

Il découle entre autres de cette propriété que, dans le cas où la circonférence C_0 dégénère en une droite, la symétrie par rapport à la circonférence devient une symétrie ordinaire.

L'inversion par rapport à une circonférence quelconque C_0 est une transformation conforme de deuxième espèce (qui ne conserve pas l'orientation). En effet, soient z_0 et R_0 le centre et le rayon de la circonférence C_0, alors, pour le point z^* symétrique du point z par rapport à C_0, on peut écrire la formule

$$z^* = z_0 + \frac{R_0^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}, \tag{8}$$

car il en découle que $|z^* - z_0| \, |z - z_0| = R_0^2$ et $\arg(z^* - z_0) = -\arg(z - z_0)$. Par conséquent, l'inversion ne diffère de la transformation conforme

$$w = \bar{z}_0 + \frac{R_0^2}{z - z_0}$$

que par une symétrie supplémentaire par rapport à l'axe réel dans le plan des w, c'est-à-dire qu'elle est une transformation conforme de deuxième espèce.

Montrons que l'*inversion transforme toute circonférence C du plan fermé en circonférence* (caractère circulaire).

En effet, soit d'abord C une circonférence qui passe par le centre z_0 de la circonférence C_0 par rapport à laquelle on fait l'inversion (fig. 51). Construisons une droite C^* perpendiculaire à la droite des centres des circonférences C_0 et C et distante de $\frac{R_0^2}{2R}$ de z_0 (R_0 et R sont

(*) Dans le plan fermé on considère les droites comme un cas particulier des circonférences : ce sont des circonférences passant par le point à l'infini.

les rayons de C_0 et C). La similitude des triangles $z_0\zeta^*z^*$ et $z_0z\zeta$ (fig. 51) nous donne $\frac{|z-z_0|}{|\zeta^*-z_0|} = \frac{|\zeta-z_0|}{|z^*-z_0|}$ ou $|z-z_0| \times |z^*-z_0| = |\zeta-z_0| \cdot |\zeta^*-z_0| = 2R\frac{R_0^2}{2R} = R_0^2$. Par conséquent, les points z et z^* sont symétriques par rapport à C_0. Ainsi, nous avons démontré que le point symétrique d'un point quelconque z de la circonférence C se trouve sur la droite C^*, c'est-à-dire que C^* est la transformée par inversion de la circonférence C. Si, en particulier, C est une droite passant par z_0, alors la transformée de cette droite par inversion coïncide évidemment avec cette dernière.

Soit maintenant C une circonférence ou une droite qui ne passe pas par le point z_0. Construisons le point z_1 symétrique de z_0 par rapport à C et considérons le faisceau de circonférences $\{\Gamma\}$ de sommets en z_0 et z_1. Puisque toutes les circonférences Γ passent par z_0, d'après ce qui vient d'être démontré, par inversion par rapport à C_0 le faisceau $\{\Gamma\}$ se transforme en un faisceau de droites $\{\Gamma^*\}$. Le sommet de ce faisceau coïncide évidemment avec le point z_1^* symétrique du point z_1 par rapport à C_0. D'après la propriété des points symétriques, toutes les circonférences $\{\Gamma\}$ sont orthogonales à C, et comme l'inversion conserve les angles (nous avons démontré ci-dessus qu'elle est une transformation conforme de deuxième espèce), l'image C^* de la circonférence C est orthogonale au faisceau de droites $\{\Gamma^*\}$. Il en découle que C^* est une circonférence. La propriété est démontrée.

On démontre de la même manière une autre propriété importante de l'inversion : *l'inversion transforme tout couple de points z_1 et z_2 symétriques par rapport à une circonférence arbitraire C en un couple de points z_1^* et z_2^* symétriques par rapport à la circonférence C^*, image de la circonférence C* (propriété de conservation des points symétriques).

En effet, construisons le faisceau de circonférences $\{\Gamma\}$ de sommets en z_1 et z_2. Par inversion il devient un faisceau de circonférences $\{\Gamma^*\}$ de sommets z_1^* et z_2^*. Puisque les circonférences Γ sont orthogonales à C, les circonférences Γ^* sont orthogonales à C^*. Il en découle que z_1^* et z_2^* sont symétriques par rapport à C^*. La propriété est démontrée.

Puisque la transformation $w = \frac{1}{z}$ est composée de deux symétries (symétrie (α) par rapport à la circonférence unité et symétrie (β) par rapport à une droite), elle jouit aussi bien du caractère circulaire que de la propriété de conservation des points symétriques. Or, comme les autres transformations qui composent toute transformation homographique (transformations (a) et (c) de la formule (5), c'est-à-dire une translation et une translation et une rotation suivie d'une dilatation) possèdent évidemment ces propriétés, celles-ci sont vraies aussi pour toute transformation homographique.

Démontrons que toute transformation homographique (1) conserve les angles dans le plan fermé des z.

Cela est évident pour tous les points z, excepté $z = -\frac{d}{c}$ et $z = \infty$, car en ces points $\frac{dw}{dz} \neq 0$ existe (cf. (2)). Pour parler de conservation des angles aux points $z = -\frac{d}{c}$ et $z = \infty$, il faut introduire la notion d'angle au point à l'infini, de plus, on peut évidemment se limiter à la définition de l'angle de deux droites. Par *angle au point à l'infini* entre deux droites on comprend l'angle au second point (à distance finie) d'intersection de ces droites pris avec le signe contraire (sur la fig. 52*a* l'angle à l'infini formé par les droites I et II est négatif). Il est évident que les transformations (a) et (c) conservent partout les angles.

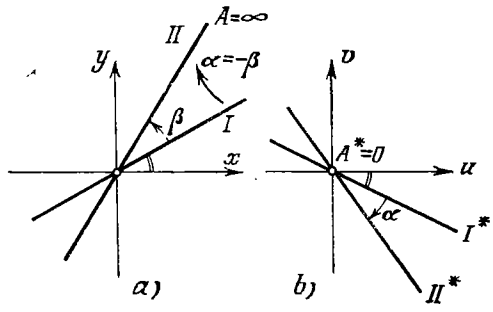

FIG. 52

Il reste à montrer que la transformation (b) ou, ce qui revient au même, la transformation $w = \frac{1}{z}$ conserve les angles aux points $z = 0$ et $z = \infty$. Mais ceci se voit directement de la fig. 52 et de la définition qu'on vient de donner (la transformation $w = \frac{1}{z}$ fait correspondre à la droite $\arg z = \varphi$ la droite $\arg w = -\varphi$).

Nous énonçons sous la forme du théorème suivant les propriétés fondamentales des transformations homographiques qu'on vient de démontrer dans ce numéro.

Théorème 2. *Toute transformation homographique*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0,$$

réalise la représentation conforme univalente du plan fermé des z sur le plan fermé des w. Cette transformation

1) *transforme toute circonférence du plan fermé des z en une circonférence du plan fermé des w (caractère circulaire);*

2) *transforme tout couple de points symétriques par rapport à une circonférence C en un couple de points symétriques par rapport à l'image de C (propriété de conservation des points symétriques).*

Pour terminer donnons, sans les établir, les formules d'après lesquelles on peut calculer l'image des droites et des circonférences par une transformation homographique (1).

a) Aux droites $\operatorname{Re}(\lambda z) = \alpha$, qui ne passent pas par le point $z = -\frac{d}{c}$ $\left(\alpha \neq -\operatorname{Re}\left(\lambda \frac{d}{c}\right)\right)$, correspondent les circonférences $|w - w_0| = \rho$, où

$$w_0 = \frac{2a\alpha\bar{c} + a\bar{d}\bar{\lambda} + b\bar{c}\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{d}\bar{\lambda})}, \quad \rho = \left|\frac{a}{c} - w_0\right| = \left|\frac{(ad-bc)\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{d}\bar{\lambda})}\right|. \tag{9}$$

b) Aux droites $\operatorname{Re}(\lambda z) = -\operatorname{Re}\left(\lambda \frac{d}{c}\right)$, qui passent par le point $z = -\frac{d}{c}$, correspondent les droites

$$\operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c^2}\lambda\bar{w}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c^2}\lambda\frac{\bar{a}}{\bar{c}}\right). \tag{10}$$

c) Aux circonférences $|z - z_0| = r$, qui ne passent pas par le point $z = -\frac{d}{c}$ $\left(r \neq \left|z_0 + \frac{d}{c}\right|\right)$, correspondent les circonférences $|w - w_0| = \rho$, où

$$w_0 = \frac{(az_0+b)(\bar{c}\bar{z}_0+\bar{d}) - a\bar{c}r^2}{|cz_0+d|^2 - |c|^2 r^2}, \quad \rho = \frac{r|ad-bc|}{||cz_0+d|^2 - |c|^2 r^2|}. \tag{11}$$

d) Aux circonférences $|z - z_0| = \left|z_0 + \frac{d}{c}\right|$ correspondent les droites

$$\operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c(cz_0+d)}w\right) = \frac{|ad-bc|^2 + 2\operatorname{Re}\{c(az_0+b)(\overline{ad}-\overline{bc})\}}{2|c(cz_0+d)|^2}. \tag{12}$$

On établit ces formules par un calcul direct.

Exemple. Trouvons l'image de la droite $y = x + 2$ par la transformation $w = \frac{z+1}{z-1}$; puisque la droite ne passe pas par le point $z = 1$, elle se transforme en une circonférence de centre et de rayon calculés d'après les formules (9) :

$$w_0 = \frac{2-i}{3}, \quad \rho = \frac{|i+1|}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(ici $a = b = c = 1$, $d = -1$, et comme l'équation de la droite s'écrit sous la forme $\operatorname{Re}\{(-i-1)(x+iy)\} = 2$, on a $\lambda = -i - 1$ et $\alpha = 2$).

32. Cas particuliers. Etudions d'abord les conditions qui déterminent une transformation homographique. Comme le montre la définition (1) du n° 31, ces transformations sont définies par 4 coefficients a, b, c et d. Etant donné qu'au moins un de ces coefficients est différent de zéro et qu'on peut donc le supposer égal à l'unité, divisant par ce coefficient le numérateur et le dénominateur de la fraction, la transformation homographique dépend pratiquement de trois paramètres complexes ou de six paramètres réels.

Il est donc clair qu'une transformation homographique se définit par des conditions qui conduisent à six relations indépendantes entre les parties réelles et imaginaires des coefficients. Ces conditions sous la forme la plus simple consistent à donner dans les plans des z et des w deux triplets arbitraires de points z_1, z_2, z_3 et w_1, w_2, w_3 qui se correspondent par la transformation.

Pour construire la transformation qui vérifie cette condition, considérons un plan auxiliaire des ζ et construisons les transformations homographiques des plans des z et des w sur ce plan transformant les triplets de points donnés en 0, 1 et ∞. Ces transformations sont faciles à écrire:

$$\zeta = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}, \qquad \zeta = \frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}. \tag{1}$$

Eliminant ζ nous obtenons la transformation homographique du plan des z sur le plan des w, qui fait correspondre respectivement aux points z_1, z_2 et z_3 les points w_1, w_2 et w_3; cette transformation s'écrit comme suit:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}. \tag{2}$$

Démontrons que la transformation donnée par la formule (2) est l'unique transformation homographique qui vérifie la condition imposée. En effet, s'il existe deux transformations distinctes $w = l_1(z)$ et $w = l_2(z)$, alors en appliquant la seconde transformation (1) que nous désignons par $\zeta = l(w)$, nous obtenons deux transformations homographiques distinctes

$$\zeta' = l[l_1(z)] = L_1(z), \quad \zeta'' = l[l_2(z)] = L_2(z),$$

faisant correspondre aux points z_k ($k = 1, 2, 3$) les points 0, 1 et ∞. Considérons maintenant la transformation

$$\zeta'' = L_2[L_1^{-1}(\zeta')],$$

où L_1^{-1} est la transformation inverse de L_1. Elle est homographique, on peut donc la mettre sous la forme

$$\zeta'' = \frac{a\zeta' + b}{c\zeta' + d}. \tag{3}$$

La transformation (3) conserve évidemment les points 0, 1 et ∞. Vu la correspondance des points à l'infini, il vient $c = 0$ et, par conséquent, $\zeta'' = \frac{a}{d}\zeta' + \frac{b}{d}$.

La correspondance entre deux autres points donne les conditions $\frac{b}{d} = 0$, $\frac{a}{d} = 1$. Ainsi, $\zeta'' = L_2[L_1^{-1}(\zeta')] \equiv \zeta'$, c'est-à-dire que L_1^{-1} est l'inverse de L_2 et $L_1 \equiv L_2$. Mais alors nous avons aussi $l_1 \equiv l_2$,

ce qui démontre notre affirmation sur l'unicité de la transformation (2).

Il est aisé de se convaincre de ce que la formule (2) conserve son sens aussi dans le cas où l'un des points z_k ou w_k est le point à l'infini, si dans cette formule on remplace par l'unité le numérateur et le dénominateur de la fraction où participe ce point (dans la formule (2) chaque point participe une fois au numérateur et une fois au dénominateur). En effet, soit, par exemple, $w_3 = \infty$, $z_2 = \infty$, alors la formule (2) prend la forme

$$\frac{w-w_1}{1}\cdot\frac{1}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{1}{1},$$

ou $w = w_1 + (w_2 - w_1)\frac{z-z_1}{z-z_3}$, et l'on voit immédiatement que la transformation obtenue résout le problème. Ainsi, on a démontré le théorème suivant :

Théorème 1. *Il existe une et seulement une transformation homographique du plan fermé des z sur le plan fermé des w, qui fait correspondre à trois points arbitraires z_k trois points arbitraires w_k.*

De ce théorème découle le théorème 2.

Théorème 2. *Tout cercle du plan fermé des z peut être transformé par une transformation homographique en un cercle quelconque du plan fermé des w.*

En effet, prenons sur la frontière C du cercle du plan des z trois points z_k numérotés dans le sens positif de parcours de ce cercle. Si l'on prend sur la frontière C^* du cercle du plan des w trois points arbitraires w_k et si l'on construit, d'après la formule (2), une transformation homographique, alors cette dernière, en vertu du caractère circulaire, met en correspondance les circonférences C et C^*. Ainsi, d'après le principe de la correspondance des frontières, elle transforme le cercle K de frontière C sur l'un des deux cercles de frontière C^*.

En effet, soient K et K^* les cercles donnés respectivement dans les plans des z et des w et de frontières C et C^*. Choisissons sur C trois points z_k numérotés dans le sens positif de parcours de K et trois points w_k numérotés dans le sens positif de parcours de K^* sur C^*. Si l'on construit maintenant, d'après la formule (2), une transformation homographique, cette dernière, en vertu du caractère circulaire, met en correspondance les circonférences C et C^* et, d'après le principe de la correspondance des frontières, le cercle K avec l'un des cercles de frontière C^*. Mais comme les transformations conformes conservent l'orientation (cf. n° 27) et que les points w_k sont disposés par rapport à K^* de la même manière que les points z_k par rapport à K, K se transforme précisément sur K^*. Le théorème est démontré.

Donnons un cas limite de la formule (2). Proposons-nous de résoudre le problème de la construction d'une transformation homographique si l'on se donne deux couples de points qui doivent se correspondre, à savoir z_1, z_2 et w_1 et w_2, et si la dérivée $a = \left[\frac{dw}{dz}\right]_{z_2}$ au point z_2 est donnée. Pour résoudre ce problème, remplaçons la

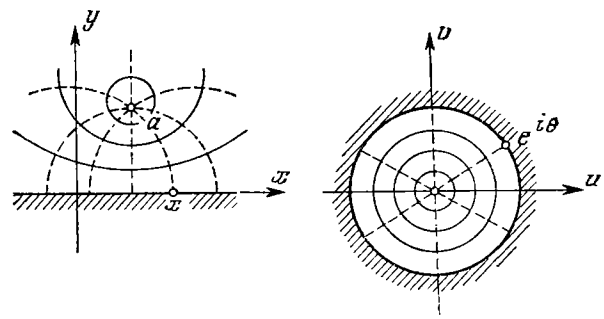

FIG. 53

dernière condition par la condition de correspondance des points $z_3 = z_2 + h$ et $w_3 = w_2 + ah$; alors la transformation est donnée d'après la formule (2)

$$\frac{w-w_1}{w-w_2-ah}\cdot\frac{-ah}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2-h}\cdot\frac{-h}{z_2-z_1}.$$

Simplifiant les deux membres par $-h$ et passant à la limite lorsque $h \to 0$, nous obtenons la transformation cherchée

$$a\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{w_2-w_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}. \qquad (4)$$

Considérons maintenant plusieurs exemples importants de transformations homographiques.

1) Transformation du demi-plan supérieur sur le cercle unité. Donnons-nous un point a dans le demi-plan supérieur, qui correspond au centre $w = 0$ du cercle (fig. 53). D'après la propriété de conservation des points conjugués, au point $\bar{a}$ symétrique du point a par rapport à l'axe réel doit correspondre le point $w = \infty$ symétrique du point $w = 0$ par rapport à la circonférence unité. Donc la transformation cherchée doit avoir la forme

$$w = k\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \qquad (5)$$

où k est un facteur constant. Pour k arbitraire cette fonction transforme le demi-plan supérieur sur un cercle de centre $w = 0$, puisque le point $w = \infty$ doit être symétrique du point $w = 0$ par rapport à la circonférence de ce cercle. Choisissons k de manière que le cercle

soit unité. Pour cela il suffit d'exiger que le point $z = 0$ corresponde à un point de la circonférence unité : $\left| k\frac{a}{\bar{a}} \right| = |k| = 1$. Ainsi, on peut poser $k = e^{i\alpha}$ et la fonction

$$w = e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \tag{6}$$

avec α un nombre réel quelconque, résout notre problème (changer α signifie faire subir une rotation au cercle par rapport au centre $w = 0$).

D'après les propriétés des transformations homographiques, à un faisceau de rayons du cercle $|w| < 1$ (c'est-à-dire aux arcs des circonférences passant par les points $w = 0$ et $w = \infty$) correspondent des arcs des circonférences (appartenant au demi-plan supérieur) passant par les points a et $\bar{a}$. A la famille de circonférences de centre au point $w = 0$ correspondent des circonférences ayant a et $\bar{a}$ comme points symétriques (cf. fig. 53).

Voyons encore la transformation inverse de (6), à savoir la transformation du cercle unité sur le demi-plan supérieur. Supposant pour simplifier $a = ih$ purement imaginaire nous obtenons la formule

$$z = ih\frac{e^{i\alpha}+w}{e^{i\alpha}-w}. \tag{7}$$

Posant ici $w = e^{i\theta}$ et multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{-i\frac{\alpha+\theta}{2}}$, nous établissons une correspondance entre les points de la circonférence unité et les points de l'axe des x donnée par la transformation (7) :

$$x = h\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\theta}{2}. \tag{8}$$

La dérivée frontière

$$\left[\frac{dz}{dw}\right]_{w=e^{i\theta}} = \frac{dx}{d\theta} = \frac{h}{2\sin^2\frac{\alpha-\theta}{2}} = \frac{h}{1-\cos(\theta-\alpha)} \tag{9}$$

est partout continue sur la circonférence, excepté au point $w = e^{i\alpha}$ qui correspond au point $z = \infty$ (comparer avec le théorème 1 du n° 29).

2) Transformation du cercle unité sur lui-même. Donnons-nous un point a dans le cercle $|z| < 1$, qui doit avoir pour image le centre du cercle $|w| < 1$. Le point $a^* = \frac{1}{\bar{a}}$, symétrique de a par rapport à la circonférence unité, doit avoir pour image le point $w = \infty$; donc la transformation cherchée doit être de la forme

$$w = k\frac{z-a}{z-a^*} = k_1\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

où k et k_1 sont des constantes. Choisissons k_1 de manière que le cercle dans le plan des w soit unité. Pour cela il suffit d'exiger que le point

$z = 1$ corresponde au point de la circonférence unité : $\left| k_1 \frac{1-a}{1-\bar{a}} \right| = | k_1 | = 1$. On peut donc prendre $k_1 = e^{i\alpha}$, et la fonction

$$w = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \tag{10}$$

avec α un nombre réel quelconque, résout notre problème. Puisque

$$\left[\frac{dw}{dz}\right]_{z=a} = e^{i\alpha} \frac{1}{1-|a|^2}$$

et $|a| < 1$, géométriquement α est l'angle de rotation de la transformation (10) au point a :

$$\alpha = \left[\arg \frac{dw}{dz}\right]_{z=a}. \tag{11}$$

Remarquons que la dilatation de la transformation (10) au point a

$$\left[\left|\frac{dw}{dz}\right|\right]_{z=a} = \frac{1}{1-|a|^2} \tag{12}$$

tend vers l'infini lorsque le point a tend vers la frontière du cercle unité.

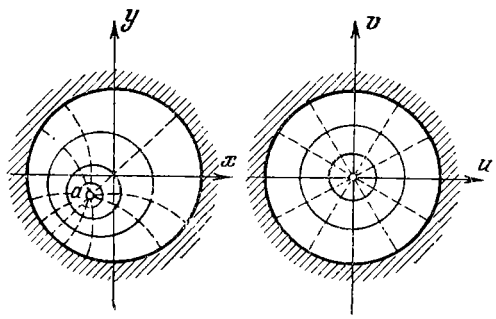

FIG. 54

On a indiqué sur la fig. 54 les courbes qui se correspondent par cette transformation. Le réseau dans le plan des z est une partie du réseau de la fig. 53.

Donnons encore la relation qui relie les arguments des points correspondants des circonférences unités $z = e^{i\varphi}$ et $w = e^{i\theta}$ (pour plus de simplicité nous supposons que $\alpha = 0$ et posons $a = re^{i\varphi_0}$) :

$$\cos(\theta - \varphi_0) = \frac{(1+r^2)\cos(\varphi-\varphi_0) - 2r}{1-2r\cos(\varphi-\varphi_0)+r^2} \text{ (*)}. \tag{13}$$

(*) Pour obtenir la relation (13) il suffit de substituer les expressions de z, w et a dans la formule (10), de multiplier les deux membres par $e^{-i\varphi_0}$ et de séparer les parties réelles.

Passons à un cas plus général. Remarquons que si le rayon du cercle dans le plan des z est égal à R, la fonction $w = f(z)$ qui transforme ce cercle sur le cercle $|w| < 1$, avec les conditions $f(a) = 0$, $\arg f'(a) = \alpha$, a la forme

$$w = e^{i\alpha} \frac{R(z-a)}{R^2 - \bar{a}z}. \tag{14}$$

Cette formule s'obtient de la formule (10) en remplaçant z par $\frac{z}{R}$ et a par $\frac{a}{R}$.

3) Transformation du demi-plan supérieur sur lui-même. Trouvons la forme générale de ces transformations. Chaque fonction homographique $w = l(z)$ qui réalise la représentation du demi-plan supérieur des z sur le demi-plan supérieur des w peut être obtenue de la formule (2) en se donnant deux triplets de points qui se correspondent, $z_k = x_k$, $w_k = u_k$, des axes réels des x et u. Puisque les nombres z_k et w_k sont réels, après transformation, la formule (2) se met sous la forme

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{15}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels. Inversement, toute fonction (15) avec des coefficients réels transforme l'axe des x sur l'axe des u et, par conséquent, le demi-plan supérieur des z sur l'un des demi-plans, supérieur ou inférieur, des w. Nous obtenons le demi-plan supérieur si l'on exige que la dériveé $\frac{dw}{dz}$ sur l'axe réel soit positive

$$\left[\frac{dw}{dz}\right]_{z=x} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0,$$

d'où $ad - bc > 0$. Ainsi, la formule (15) avec des coefficients réels vérifiant la condition $ad - bc > 0$ donne la forme générale des transformations homographiques du demi-plan supérieur sur lui-même.

33. Exemples. Donnons quelques exemples de transformations conformes réalisées à l'aide de combinaisons de fonctions élémentaires.

1) Transformation d'une bande sur le cercle unité. Soit donnée dans le plan des z la bande $D: -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$, qu'on demande de transformer conformément sur le cercle $|w| < 1$ avec correspondance de trois points frontières : $f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$, $f(i\infty) = i$ ($i\infty$ désigne le point à l'infini dans la direction de l'axe imaginaire du plan des z). Nous faisons d'abord une rotation d'un angle droit et nous dilatons de deux fois notre bande :

$$z_1 = 2iz, \tag{1}$$

puis en remarquant que la fonction exponentielle

$$z_2 = e^{z_1} \tag{2}$$

transforme la bande $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z_1 < \frac{\pi}{2}$, sur laquelle la fonction (1) transforme D, sur le demi-plan de droite $\operatorname{Re} z_2 > 0$ (en effet, $z_2 = e^{x_1} \cdot e^{iy_1}$, par conséquent, $|z_2| = e^{x_1}$ varie de zéro à l'infini et $\arg z_2 = y_1$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$). Il reste à transformer ce demi-plan sur le cercle unité de manière que les points $z_2 = i$, $-i$, 0

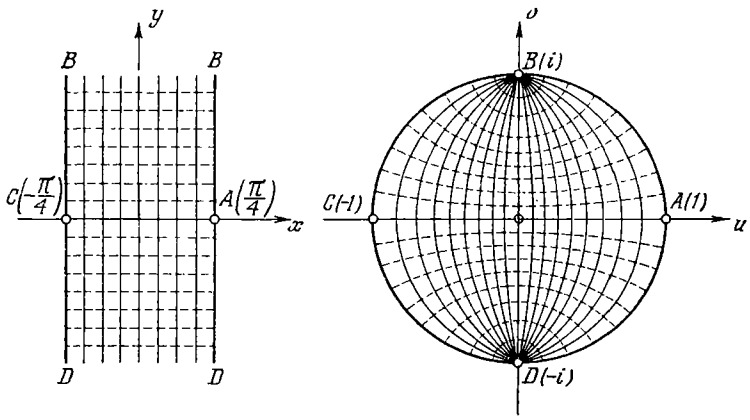

FIG. 55

qui correspondent respectivement aux points $z = \frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $i\infty$ aient pour images les points $w = 1$, -1, i. Ce problème se résout à l'aide de la formule (2) du n° 32 (nous changeons les notations qui y ont été admises) :

$$\frac{w-1}{w-i}(1+i) = \frac{z_2-i}{z_2}$$

ou

$$w = \frac{1}{i}\,\frac{z_2-1}{z_2+1}. \tag{3}$$

En substituant dans (3) les expressions (2) et (1) nous trouvons la solution du problème

$$w = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = \operatorname{tg} z \tag{4}$$

(cf. n° 9). Etudions la correspondance des courbes par cette transformation. Par la transformation (1) la famille des droites verticales $\operatorname{Re} z = \text{const}$ a pour image la famille des droites horizontales que la transformation (2) transforme en la famille des rayons $\arg z_2 = \text{const}$, c'est-à-dire en la famille des « circonférences » passant par les points $z_2 = 0$ et $z_2 = \infty$. Par la transformation homographique (3) les images de ces points sont $w = i$ et $w = -i$, donc les rayons que nous avons considérés se transforment en la famille des circonférences qui passent par les points $w = \pm i$. La famille orthogonale des segments $\operatorname{Im} z = \text{const}$ se transforme en la famille des circonférences qui ont $w = \pm i$ comme points symétriques (fig. 55).

La fonction inverse

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$$

réalise la transformation inverse du cercle sur la bande. Remplaçant ici iz par z_1 et iw par $\frac{\pi}{2H} w_1$, nous avons la transformation du cercle $|z| < 1$ sur la bande de largeur H: $-\frac{H}{2} < \operatorname{Im} w < \frac{H}{2}$. Elle est de la forme

$$w = \frac{H}{\pi} \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{2H}{\pi} \operatorname{arth} z \tag{5}$$

(nous omettons les indices de z et de w). La transformation (5) fait correspondre aux points $z = \pm 1$ les points $w = \pm\infty$ et au point $z = i$ le point $w = i\frac{H}{2}$. Sa dérivée

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2H}{\pi} \frac{1}{1-z^2}$$

n'est infinie qu'aux points $z = \pm 1$.

2) Transformation du demi-plan duquel on a retranché un segment sur le demi-plan. Supposons que l'on retranche du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ le segment $(a, a + ih)$. Pour obtenir la transformation cherchée nous aurons recours à la transformation $w = z^2$ qui double les angles à l'origine des coordonnées et, par conséquent, qui « rectifie » l'angle entre le segment retranché et l'axe des x.

Nous faisons donc subir une translation de vecteur a vers la gauche au demi-plan des z: $z_1 = z - a$, et appliquant la transformation $z_2 = z_1^2$ nous obtenons le plan duquel on a retranché le rayon $-h^2 < \operatorname{Re} z_2 < \infty$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$. Nous déplaçons ensuite de vecteur h^2 vers la droite le plan des z_2: $z_3 = z_2 + h^2$. Appliquant finalement la transformation $z_4 = \sqrt{z_3}$, nous obtenons le demi-plan supérieur. Ainsi, la transformation cherchée est de la forme

$$z_4 = \sqrt{(z-a)^2 + h^2}. \tag{6}$$

Effectuant une translation de vecteur a vers la droite du plan des z_4 de manière que le point $z = a + ih$ ait pour image le point a, nous obtenons

$$w = \sqrt{(z-a)^2 + h^2} + a. \tag{7}$$

La dérivée de la transformation (7)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2+h^2}} \tag{8}$$

s'annule aux points B et D (en lesquels $z = a$) et devient infinie au point C (en lequel $z = a + ih$). Aux droites $v = v_0 = \text{const}$ correspondent les courbes du quatrième degré

$$y = v_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{(x-a)^2 + v_0^2}} \tag{9}$$

symétriques par rapport à la droite $x = a$ sur laquelle leurs ordonnées atteignent leur maximum. Pour les grands v_0, les courbes (9) diffèrent très peu des droites (fig. 56).

Pour $h = 0$ la transformation (7) se réduit à la transformation identique $w = z$. Trouvons la partie principale de la transformation (7) pour les petits h. Pour cela nous transformons la formule (7) en négligeant les puissances de h supérieures à 2. Appliquant la formule approchée de la racine carrée bien con-

nue nous avons

$$w=(z-a)\sqrt{1+\frac{h^2}{(z-a)^2}}+a\approx z+\frac{h^2}{2(z-a)}. \tag{10}$$

La formule approchée (10) cesse d'être vraie pour les points z voisins du point a, car pour ceux-ci la quantité $\frac{h^2}{z-a}$ cesse d'être petite.

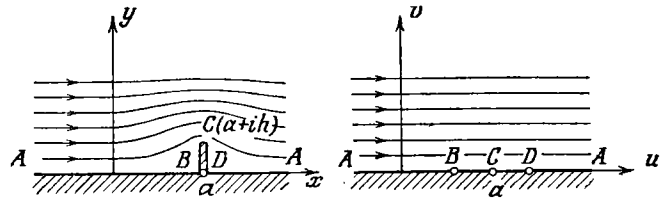

FIG. 56

3) Transformation du cercle duquel on a retranché un segment de rayon sur le cercle unité (fig. 57). Supposons que l'on ait retranché du cercle $|z|<1$ le segment de droite $[(1-h)\,e^{i\alpha},\ e^{i\alpha}]$. La transformation du domaine ainsi obtenu sur le

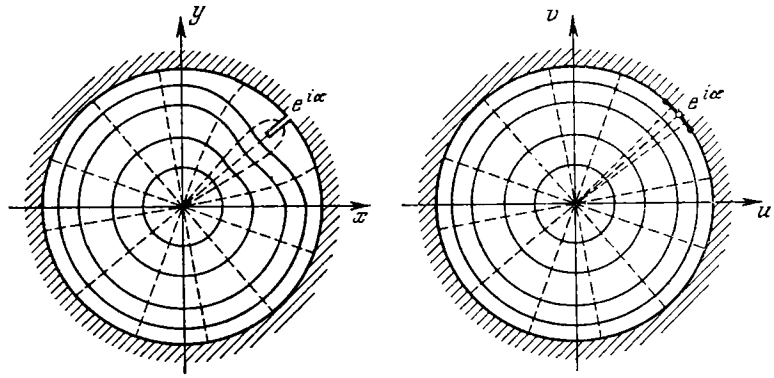

FIG. 57

cercle unité peut être ramenée à la transformation précédente (7) à l'aide de transformations homographiques complémentaires. Cependant, il est plus facile d'utiliser les propriétés de la fonction de Joukovski (n° 7). Faisant subir une rotation d'angle $-\alpha$ et appliquant la fonction de Joukovski $\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{e^{i\alpha}}+\frac{e^{i\alpha}}{z}\right)$ au domaine du plan des z, nous transformons ce domaine sur l'extérieur du segment $[-1,\ 1+2h_1]$, où $h_1=\frac{h^2}{4(1-h)}$ (*). La trans-

(*) En effet, l'image du point $z=(1-h)\,e^{i\alpha}$ par la transformation considérée est le point

$$\zeta_0=\frac{1}{2}\left(1-h+\frac{1}{1-h}\right)=1+\frac{h^2}{2(1-h)}.$$

formation analogue $\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{w}\right)$ transforme le cercle du plan des w sur l'extérieur du segment $[-1, 1]$. Il est facile de voir que la transformation linéaire $\omega = \frac{\zeta}{1+h_1} - \frac{h_1}{1+h_1}$ transforme l'un sur l'autre les domaines obtenus dans les plans des ω et des ζ; remplaçant ω et ζ par leurs expressions, nous en déduisons la transformation cherchée:

$$(1+h_1)\left(\frac{w}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{w}\right) = \left(\frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z}\right) - 2h_1. \tag{11}$$

Pour $h = 0$ nous avons $h_1 = 0$ et $w \equiv z$. Trouvons la partie principale de la transformation (11) pour les petits h. Pour cela substituons $w = z + \omega$ dans (11) et négligeons les infiniment petits du second ordre par rapport à h_1, remarquant de plus que ω et h_1 sont du même ordre (de manière que les quantités d'ordre ω^2 peuvent être négligées). Nous trouvons:

$$(1+h_1)\left[\frac{z+\omega}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z}\left(1 - \frac{\omega}{z}\right)\right] \approx \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} - 2h_1,$$

ou

$$\frac{\omega}{e^{i\alpha}} - \frac{e^{i\alpha}\omega}{z^2} + h_1\left(\frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} + 2\right) \approx 0,$$

d'où

$$\omega \approx h_1 z \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z}.$$

Ainsi, pour les petits h_1 et pour les points z pas trop voisins du point $e^{i\alpha}$, notre transformation conforme peut être représentée sous la forme approchée suivante

$$w \approx z + h_1 z \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z}. \tag{12}$$

Dérivant la relation (12) nous trouvons la partie principale de la dérivée

$$\frac{dw}{dz} \approx 1 + h_1 \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z} + \frac{2h_1 z e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha} - z)^2}. \tag{13}$$

Notons encore le lien qui existe entre les arguments des points $z = e^{i\varphi}$ et $w = e^{i\theta}$ des circonférences qui se correspondent par la transformation (11). Séparant dans (12), après avoir fait $z = e^{i\varphi}$ et $w = e^{i\theta}$, les parties réelles et posant $\theta = \varphi + \Delta\varphi$, $\cos\theta \approx \cos\varphi - \Delta\varphi \cdot \sin\varphi$ nous trouvons (*):

$$-\sin\varphi \cdot \Delta\varphi \approx h_1 \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{i\varphi}\frac{e^{i\alpha} + e^{i\varphi}}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi}}\right\} = -h_1 \sin\varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi - \alpha}{2},$$

d'où

$$\theta = \varphi + \Delta\varphi \approx \varphi + h_1 \operatorname{ctg}\frac{\varphi - \alpha}{2}. \tag{14}$$

(*) Nous prenons les deux premiers termes de la formule de Taylor de $\cos\theta$ au point $\theta = \varphi$.

4) Transformation du plan duquel on a retranché des rayons sur la bande $0 < v < H$ (fig. 58). Pour fixer les idées, exigeons que le rayon de gauche se transforme sur le bord inférieur de la bande et le rayon de droite sur le bord supérieur (*). Par la transformation homographique

$$z_1 = \frac{z+a}{z-a}$$

nos rayons ont pour image le rayon $(0, \infty)$, puis l'axe réel à l'aide de la transformation

$$z_2 = \sqrt{z_1} = \sqrt{\frac{z+a}{z-a}}.$$

Le domaine considéré se transforme alors dans le demi-plan supérieur. Pour obtenir la correspondance désirée des points, transformons ce demi-plan sur

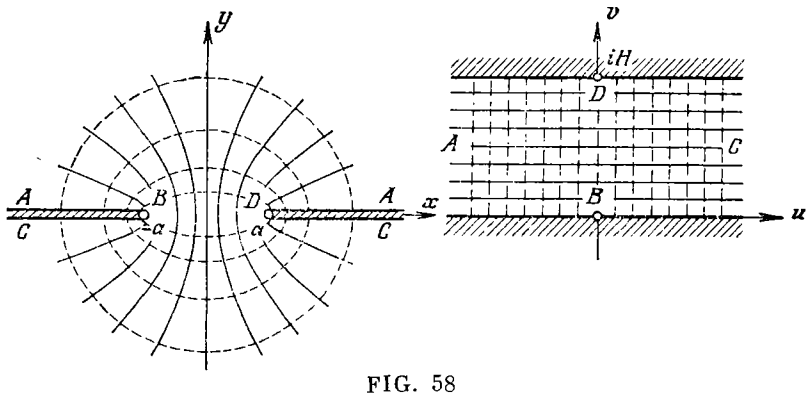

FIG. 58

lui-même par une transformation homographique de manière que les images des points à l'infini A et C du domaine initial dans le plan des z (c'est-à-dire les points $z_2 = \mp 1$) correspondent à 0 et à ∞

$$z_3 - k\frac{1+z_2}{1-z_2} = -\frac{k}{a}(z+\sqrt{z^2-a^2})$$

(k est une constante positive arbitraire). Il reste à avoir recours à la fonction logarithmique $w = \frac{H}{\pi}\ln z_3$ pour obtenir la transformation sur la bande avec la correspondance désirée des frontières

$$w = \frac{H}{\pi}\ln(z+\sqrt{z^2-a^2}) + Hi + c = \frac{H}{\pi}\operatorname{arch}\frac{z}{a} + Hi + c, \qquad (15)$$

ici $c = \frac{4}{\pi}\ln\frac{k}{a}$ est une constante réelle arbitraire. La transformation (15) fait correspondre dans le plan des z aux deux familles des droites $u = \text{const}$ et $v = \text{const}$ les familles des ellipses et des hyperboles de foyers $\pm a$.

(*) Ces conditions ne définissent que deux paramètres réels de la transformation (elles se ramènent à la donnée de deux couples de points frontières qui se correspondent), le troisième restant arbitraire (comparer avec la formule (15)).

5) Transformation de la bande $0 < y < 2H$ munie de la coupure $-\infty \leqslant x \leqslant a$, $y = H$ sur la bande $0 < v < 2H$ (fig. 59). La fonction

$$z_1 = e^{\frac{\pi z}{2H}}$$

transforme la bande ainsi coupée sur le demi-plan supérieur coupé suivant le segment $(0, bi)$ de l'axe imaginaire, où $b = e^{\frac{a\pi}{2H}}$. La fonction (7) de l'exemple 2)

$$z_2 = \sqrt{z_1^2 + b^2} = \sqrt{e^{\frac{\pi z}{H}} + e^{\frac{\pi a}{H}}}$$

(il faut faire $a = 0$, $h = b$ dans la formule (7)) transforme ce dernier domaine

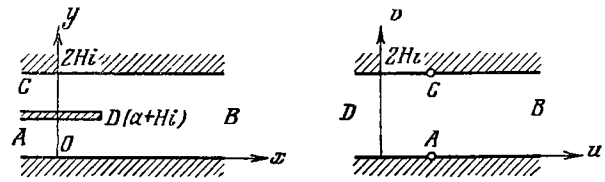

FIG. 59

sur le demi-plan. Ayant recours à la fonction logarithmique nous trouvons la transformation cherchée

$$w = \frac{2H}{\pi} \ln z_2 = \frac{H}{\pi} \ln \left(e^{\frac{\pi z}{H}} + e^{\frac{\pi a}{H}} \right). \tag{16}$$

6) Transformation de la bande $0 < y < 1$ munie de la coupure $0 \leqslant y \leqslant h$, $x = a$ sur la bande $0 < v < 1$

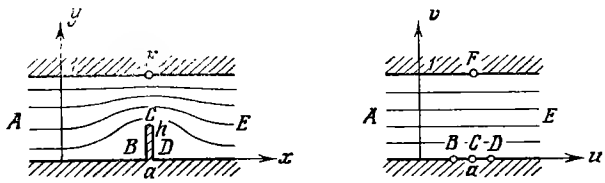

FIG. 60

(fig. 60). La fonction $z_1 = e^{\pi(z-a)}$ transforme la bande ainsi coupée sur le demi-plan supérieur coupé suivant un arc de circonférence unité. La transformation

$$z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} = \text{th}\, \frac{\pi (z-a)}{2}$$

transforme cet arc sur le segment $(0, bi)$ de l'axe imaginaire, où $b = \frac{1}{i} \text{th} \frac{\pi h i}{2} = \text{tg} \frac{\pi h}{2}$.

Utilisant encore une fois la fonction (7) de l'exemple 2) nous trouvons la transformation du domaine donné sur le demi-plan supérieur:

$$z_3 = \sqrt{z_2^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi (z-a)}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}}.$$

Par cette transformation les points A et E ont pour images les points $\mp \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}} = \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi h}{2}}$; par la transformation homographique

$$z_4 = \frac{1 + z_3 \cos \frac{\pi h}{2}}{1 - z_3 \cos \frac{\pi h}{2}}$$

ces derniers ont pour images les points 0 et ∞, puis nous avons recours à la fonction logarithmique

$$z_5 = \frac{1}{\pi} \ln z_4.$$

Nous obtenons ainsi la transformation sur la bande nécessaire. Le point C correspond évidemment au point $z_5 = 0$; pour le faire correspondre au point a de l'axe réel il faut faire subir à cette bande une translation de vecteur a. Ainsi, la transformation cherchée a la forme:

$$w = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + z_3 \cos \frac{\pi h}{2}}{1 - z_3 \cos \frac{\pi h}{2}} + a = \frac{2}{\pi} \operatorname{arth} \left(\cos \frac{\pi h}{2} \; z_3 \right) + a,$$

ou enfin

$$w = \frac{2}{\pi} \operatorname{arth} \left\{ \cos \frac{\pi h}{2} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi (z-a)}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}} \right\} + a. \qquad (17)$$

Pour les petits h l'expression qui se trouve entre accolades et que nous notons ζ se transforme de la manière suivante:

$$\zeta \approx \left(1 - \frac{\pi^2 h^2}{8}\right) \operatorname{th} \frac{\pi (z-a)}{2} \left\{1 + \frac{\pi^2 h^2}{8} \operatorname{cth}^2 \frac{\pi (z-a)}{2}\right\} \approx$$

$$\approx \operatorname{th} \frac{\pi (z-a)}{2} \left\{1 + \frac{\pi^2 h^2}{8} \left(\operatorname{cth}^2 \frac{\pi (z-a)}{2} - 1\right)\right\}$$

(nous remplaçons cos, tg et $\sqrt{\;}$ par leurs expressions approchées et nous négligeons pendant la multiplication les infiniment petits d'ordre supérieur à h^2). Usant des formules élémentaires des fonctions hyberboliques nous avons:

$$\zeta \approx \operatorname{th} \frac{\pi (z-a)}{2} + \frac{\pi^2 h^2}{4} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \pi (z-a)}.$$

Cherchons maintenant la formule approchée de la transformation conforme (17). Remplaçons pour cela dans le second membre de la formule (17) arth ζ par les deux premiers termes de son développement taylorien au voisinage du

point $\zeta_0 = \operatorname{th}\frac{\pi}{2}(z-a)$:

$$\operatorname{arth}\zeta \approx \operatorname{arth}\zeta_0 + \frac{1}{1-\zeta_0^2}(\zeta-\zeta_0).$$

Substituant les valeurs ζ et ζ_0 dans le second membre nous trouvons

$$w \approx z + \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1-\operatorname{th}^2\frac{\pi(z-a)}{2}}\cdot\frac{\pi^2h^2}{4\operatorname{sh}\pi(z-a)} = z + \frac{\pi h^2}{4}\operatorname{cth}\frac{\pi(z-a)}{2}. \qquad (18)$$

7) Transformation d'une couronne circulaire excentrique sur une couronne concentrique. Considérons d'abord le cas où chaque circonférence frontière de la couronne se trouve

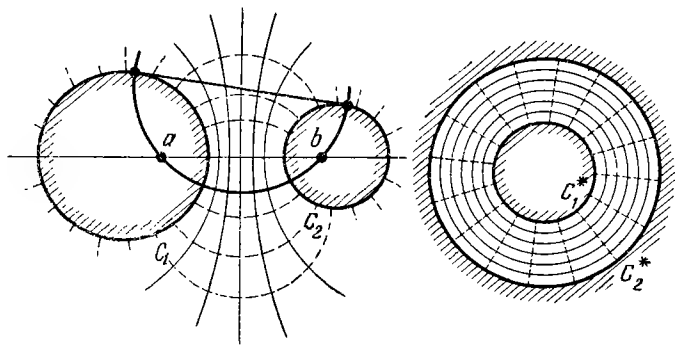

FIG 61

à l'extérieur de l'autre circonférence (fig. 61). Construisons sur leur tangente commune, comme diamètre, la demi-circonférence Γ; elle coupe la droite des centres des circonférences de la couronne en deux points a et b qui sont simultanément symétriques par rapport aux deux circonférences C_1 et C_2, car la droite des centres et la demi-circonférence Γ qui passent par a et b sont orthogonales aux deux circonférences. D'après les propriétés des transformations homographiques la fonction

$$w = \frac{z-a}{z-b} \qquad (19)$$

transforme les circonférences C_1 et C_2 en deux circonférences C_1^* et C_2^* par rapport auxquelles les points $w = 0$ et $w = \infty$, qui correspondent aux points $z = a$ et $z = b$, sont symétriques. Donc le point $w = 0$ est le centre commun de C_1^* et de C_2^*. La couronne excentrique qui se trouve entre C_1 et C_2 se transforme donc en une couronne circulaire concentrique qui se trouve entre C_1^* et C_2^*. On a aussi indiqué sur la fig. 61 la correspondance des lignes par cette transformation. Le réseau dans le plan des z est une partie du réseau de la fig. 53.

Par une transformation complémentaire

$$w_1 = \ln w = \ln\rho + i\theta, \qquad (20)$$

où θ varie de $-\pi$ à $+\pi$ nous transformons la couronne obtenue sur la bande. Ceci n'est pas en contradiction avec ce qui a été dit au numéro 28 sur l'impossibilité de transformer les domaines doublement connexes sur les domaines sim-

plement connexes, car la fonction (20) qui réalise cette transformation est multiforme. De plus, la fonction (20) donne la représentation univalente du domaine sur sa surface de Riemann étalée au-dessus de la couronne sur la bande, et il est clair que ce domaine est simplement connexe.

Le cas où une des circonférences de la couronne se trouve à l'intérieur de l'autre se ramène au cas considéré à l'aide de la transformation homographique complémentaire $z_1 = \frac{1}{z-c}$, où c est un point arbitraire qui se trouve entre les deux circonférences.

34. Transformations des lunules circulaires. On appelle lunule circulaire tout domaine limité par deux arcs des circonférences du

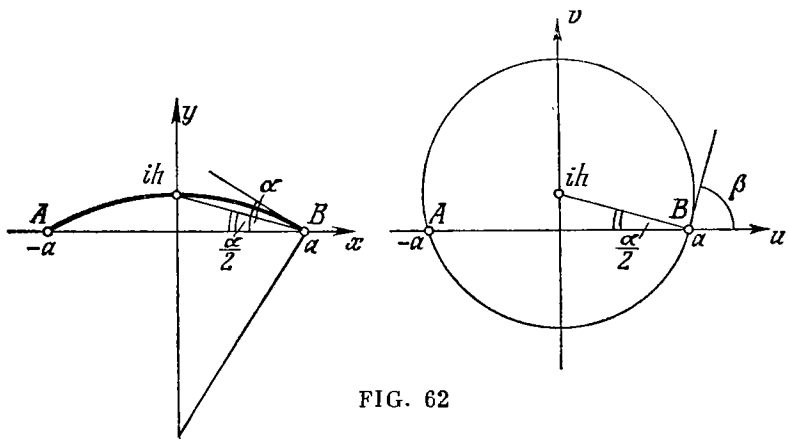

FIG. 62

plan fermé (c'est-à-dire, en particulier, par des segments de droite). Les exemples que nous allons donner jouent un rôle important tant dans les applications que pour le développement ultérieur de la théorie.

1) Transformation de l'extérieur d'un arc de circonférence sur l'extérieur d'un cercle. (C'est un cas dégénéré : les deux arcs de circonférence frontière de la lunule coïncident.) Supposons que les deux extrémités de l'arc AB dans le plan des z coïncident avec les points $\pm a$ et que le cercle dans le plan des w passe par ces mêmes points. Supposons encore que le milieu de l'arc coïncide avec le point $z = ih$ et le centre du cercle avec le point $w = ih$, de sorte que la tangente à l'arc au point $z = a$ fait l'angle $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$ avec l'axe négatif des x et la tangente à la circonférence au point $w = a$ l'angle $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ avec l'axe positif des u (fig. 62). Nous transformons à l'aide de la fonction homographique

$$z_1 = \frac{z-a}{z+a} \qquad (1)$$

l'extérieur de l'arc AB sur l'extérieur d'un certain rayon. Puisque $\left[\frac{dz_1}{dz}\right]_{z=a} > 0$, l'angle de ce rayon avec l'axe négatif est égal à α. Cherchons ensuite la transformation de l'extérieur du cercle donné dans le plan des w sur l'extérieur du rayon obtenu. Pour cela nous avons encore recours à la fonction homographique

$$w_1 = \frac{w-a}{w+a}$$

qui transforme le cercle sur un demi-plan et sa circonférence sur une certaine droite. Puisque $\left[\frac{dw_1}{dw}\right]_{w=a} > 0$, l'angle que forme cette droite avec l'axe positif est égal à β. La transformation

$$z_1 = w_1^2 = \left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2 \tag{2}$$

transforme donc notre cercle sur l'extérieur du rayon formant l'angle $2\beta = \pi - \alpha$ avec l'axe positif. Ainsi, ce rayon coïncide avec celui

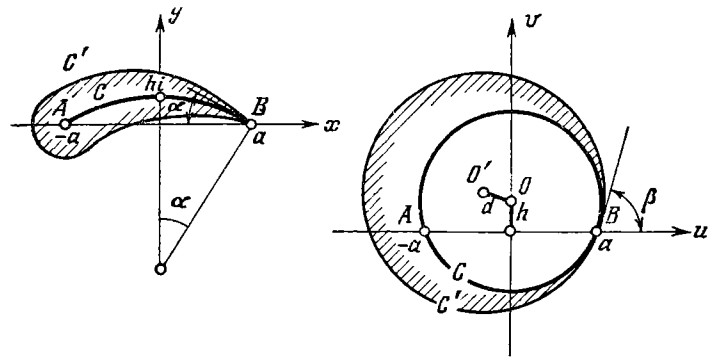

FIG. 63

obtenu par la transformation (1); éliminant z_1 entre les relations (1) et (2) nous trouvons la transformation cherchée

$$\left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2 = \frac{z-a}{z+a}.$$

Nous tirons de cette dernière équation

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{a^2}{w}\right), \quad w = z + \sqrt{z^2-a^2}. \tag{3}$$

Par la transformation considérée une circonférence arbitraire C' tangente à la circonférence C au point $w = a$ se transforme en une courbe fermée contenant à son intérieur l'arc AB et ayant au point B ($z = a$) un point de rebroussement; cette courbe rappelle le profil d'une aile d'avion (fig. 63).

La fonction (3) réalise la représentation conforme de l'extérieur de cette courbe sur l'extérieur du cercle dont la frontière est la circonférence C'.

C'est sur cette remarque qu'est basée la méthode proposée par N. Joukovski pour obtenir des classes de profils d'ailes d'avion de calcul particulièrement simple (*profils Joukovski*).

La forme des profils Joukovski dépend de trois paramètres: a, caractérisant la corde de l'aile, h, caractérisant sa courbure et d, distance entre les centres des circonférences C et C', caractérisant l'épaisseur de l'aile (fig. 63).

2) Transformation du demi-plan duquel on a retranché un segment circulaire sur le demi-plan. La fonction $z_1 = \frac{z}{a-z}$ transforme le domaine donné (fig. 64) sur le secteur $\alpha < \arg z_1 < \pi$. Par conséquent, la fonction

$$z_2 = (e^{-i\alpha} z_1)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} = -\left(\frac{z}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}$$

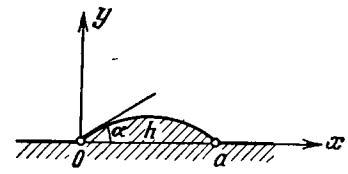

FIG. 64

transforme ce domaine sur le demi-plan supérieur. Donnons-nous encore les conditions: $w(\infty) = \infty$, $w'(\infty) = 1$; puisque pendant la transformation précédente le point $z = \infty$ avait pour image le point $z_2 = -1$, il faut faire une transformation linéaire complémentaire

$$w = \frac{kz_2}{1+z^2} = \frac{k}{1-\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}},$$

où la constante k est déterminée par la deuxième condition ci-dessus. En effet, $\frac{dw}{dz} = \frac{k\pi}{\pi-\alpha}\left\{1-\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}\right\}^{-2}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\pi-\alpha}}\frac{a}{z^2}$, d'où, en développant le binôme qui se trouve entre accolades, nous trouvons pour les grands $|z|$:

$$\frac{dw}{dz} \approx \frac{k\pi}{\pi-\alpha}\left(\frac{\pi}{\pi-\alpha}\frac{a}{z}\right)^{-2}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\pi-\alpha}}\frac{a}{z^2}.$$

Par conséquent

$$w'(\infty) = k\left(\frac{a\pi}{\pi-\alpha}\right)^{-1} \text{ et } k = \frac{a\pi}{\pi-\alpha}.$$

Enfin nous avons

$$w = \frac{a\pi}{\pi-\alpha}\left\{1-\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}\right\}^{-1} + C, \qquad (4)$$

où C est une constante réelle arbitraire. Pour trouver la partie principale de la transformation (4) lorsque a et α sont petits, utilisons les premiers termes des développements tayloriens. Nous avons:

$$\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} =$$

$$=1-\frac{a}{z}\left(1+\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\alpha a}{2\pi z}+\frac{\alpha^2}{\pi^2}-\frac{a^2\alpha}{6\pi z^2}-\frac{a\alpha^2}{\pi^2 z}+\frac{\alpha^3}{\pi^3}+\cdots\right) (*),$$

d'où

$$\left\{1-\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}\right\}^{-1}=\frac{z}{a}\left(1-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha a}{2\pi z}+\frac{a^2\alpha}{6\pi z^2}+\cdots\right),$$

et en multipliant cette dernière expression par

$$\frac{a\pi}{\pi-\alpha}=a\left(1+\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha^2}{\pi^2}+\frac{\alpha^3}{\pi^3}+\cdots\right),$$

nous obtenons:

$$w=z\left(1+\frac{\alpha a}{2\pi z}+\frac{\alpha^2 a}{2\pi^2 z}+\frac{a^2\alpha}{6\pi z^2}+\cdots\right)+C\approx z+\frac{a^2\alpha}{6\pi z}+\text{const}. \qquad (5)$$

Calculons l'aire σ du segment circulaire. Nous avons: $\sigma=\alpha r^2-\frac{a}{2}r\cos\alpha$, où $r=\frac{a}{2\sin\alpha}$ est le rayon du cercle. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur nous trouvons: $\sigma=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}-\right.$ $\left.-\operatorname{ctg}\alpha\right)\approx\frac{a^2\alpha}{6}$. Ainsi, la formule (5) s'écrit sous la forme

$$w\approx z+\frac{\sigma}{\pi z}+\text{const}. \qquad (6)$$

Ayant recours à une translation nous obtenons un résultat un peu plus général: la fonction

$$w\approx z+\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{z-b}+\text{const}\quad (w(\infty)=\infty,\ w'(\infty)=1) \qquad (7)$$

réalise la représentation conforme du demi-plan $y>0$ duquel on a retranché une aire σ, de frontière le segment $(b,\ b+a)$ et l'arc de circonférence de faible courbure, sur le demi-plan $v>0$.

3) Transformation du cercle duquel on a retranché une lunule sur le cercle. Supposons que les points anguleux de la lunule soient voisins de $e^{i\alpha}$ et que l'aire σ de la lunule soit petite (fig. 65). Faisons les transformations homographiques complémentaires

$$\zeta=i\frac{1-ze^{-i\alpha}}{1+ze^{-i\alpha}},\qquad w=i\frac{1-we^{-i\alpha}}{1+we^{-i\alpha}}$$

(*) Ici et dans la suite les points de suspension désignent les termes infiniment petits du quatrième ordre.

des cercles unités des plans des z et des w sur les demi-plans supérieurs ζ et ω.

La lunule σ a pour image la lunule $\sigma^* = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2_{z=e^{i\alpha}} \cdot \sigma = \frac{\sigma}{4}$, adjacente au point $\zeta = 0$. D'après la formule (6) de l'exemple précédent nous avons alors

$$w \approx \zeta + \frac{\sigma^*}{\pi\zeta} \approx \zeta + \frac{\sigma}{4\pi\zeta},$$

ou, en revenant aux variables z et w,

$$w = e^{i\alpha}\frac{i-\omega}{i+\omega} \approx$$

$$\approx e^{i\alpha}\frac{i-\zeta-\frac{\sigma}{4\pi\zeta}}{i+\zeta+\frac{\sigma}{4\pi\zeta}} \approx z + \frac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi}\frac{(1+ze^{-i\alpha})^3}{1-ze^{-i\alpha}} \tag{8}$$

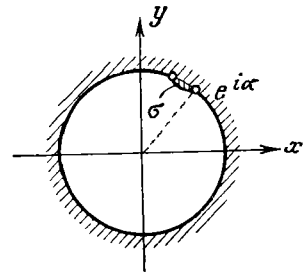

FIG. 65

(nous négligeons partout les infiniment petits d'ordre supérieur à σ). Par cette transformation le point $z=0$ a pour image le point $w_0 = \frac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi}$; faisant la transformation homographique complémentaire $w_1 = \frac{w-w_0}{1-\bar{w}_0 w}$ du cercle sur lui-même de manière que le point w_0 ait pour image le point 0, nous trouvons

$$w_1 = \frac{w-\frac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi}}{1-\frac{\sigma e^{-i\alpha}}{8\pi}w} \approx w + \frac{\sigma}{8\pi}(w^2 e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}).$$

Après la substitution à w de sa valeur approchée (8) et après des transformations simples (pendant lesquelles nous négligeons les infiniment petits d'ordre supérieur à σ) nous avons :

$$w = f(z) \approx z\left\{1 + \frac{\sigma}{2\pi}\frac{1+ze^{-i\alpha}}{1-ze^{-i\alpha}}\right\}, \quad f(0)=0 \tag{9}$$

(nous écrivons w au lieu de w_1). La transformation (9) établit la correspondance suivante entre les points des circonférences $z = e^{i\varphi}$ et $w = e^{i\theta}$:

$$e^{i(\theta-\varphi)} \approx 1 + \frac{\sigma i}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\alpha}{2},$$

ou (si l'on prend les parties imaginaires et si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur)

$$\theta \approx \varphi + \frac{\sigma}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\alpha}{2}. \tag{10}$$

Pour le module de la dérivée frontière de la transformation nous avons :

$$|f'(e^{i\theta})| = \left|\frac{d\theta}{d\varphi}\right| \approx 1 - \frac{\sigma}{4\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi-\alpha}{2}} \tag{11}$$

et pour la dérivée à l'origine des coordonnées

$$f'(0) \approx 1 + \frac{\sigma}{2\pi}. \tag{12}$$

4) Transformation d'une bande de laquelle on a retranché une lunule sur une bande. Supposons que l'on ait retranché de la bande $0 < y < 1$ le segment circulaire σ de frontière le segment $(0, a)$ de l'axe réel et l'arc de circonférence de petite courbure (fig. 66). Réalisant les transformations complémentaires $\zeta = e^{\pi z}$, $\omega = e^{\pi w}$ des bandes sur les demi-plans supérieurs et appliquant la formule (7)

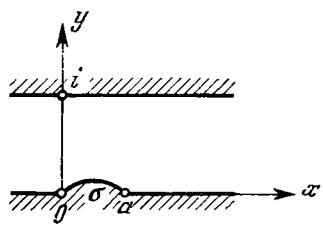

FIG. 66

$$\omega \approx \zeta + \frac{\sigma^*}{\pi}\frac{1}{\zeta-1} + \frac{\sigma^*}{\pi},$$

où $\sigma^* = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2_{z=0} \cdot \sigma = \pi^2\sigma$ est l'aire de l'image du segment (*), nous trouvons la transformation cherchée

$$w = \frac{1}{\pi}\ln\omega \approx z + \frac{\sigma}{e^{\pi z}-1}$$

(nous avons négligé partout les infiniment petits d'ordre supérieur à σ). Effectuant la translation de vecteur $\frac{\sigma}{2}$ du plan des w nous avons :

$$w \approx z + \frac{\sigma}{2}\frac{e^{\pi z}+1}{e^{\pi z}-1} = z + \frac{\sigma}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}z. \tag{13}$$

Par une translation supplémentaire du plan des z nous obtenons un résultat plus général : la fonction

$$w \approx z + \frac{\sigma}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi(z-b)}{2} + \text{const} \tag{14}$$

réalise la représentation conforme de la bande $0 < y < 1$, de laquelle on a retranché un segment circulaire σ qui s'appuie sur le segment $(b, b + a)$, sur la bande $0 < v < 1$. Elle établit la correspondance suivante entre les points des droites $y = 0$, $y = 1$ et ceux

(*) Dans la formule (7) $b = 1$ et $\text{const} = \frac{\sigma^*}{\pi}$.

des droites $v = 0$, $v = 1$:

$$\left.\begin{aligned} u &= x + \frac{\sigma}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi (x-b)}{2} + \text{const}, \\ u &= x + \frac{\sigma}{2} \operatorname{th} \frac{\pi (x-b)}{2} + \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

5) Formule donnant la valeur de la dilatation engendrée par la transformation d'une lunule circulaire sur une bande. Supposons que la lunule D ait pour frontière les arcs de circonférence C_1 et C_2 qui se coupent aux points $\pm a$ et soient $-ih_1$ et $-ih_2$ les points d'intersection de ces deux arcs avec l'axe imaginaire (fig. 67). Utilisant la fonction (5) de l'exemple 1) (n° 33) on construit facilement la représentation conforme de la lunule D sur la bande $0 < v < h$:

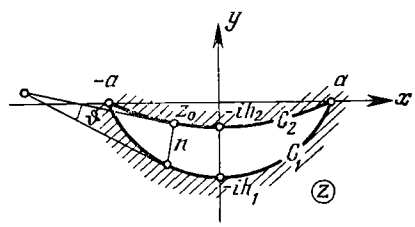

FIG. 67

$$w = f(z) = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \ln \frac{a+z}{a-z} + i\lambda_1 \right\}, \tag{16}$$

où $\lambda_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{h_k}{a}$, $k = 1, 2$ (*). Dérivant l'expression (16) nous trouvons :

$$f'(z) = \frac{2ah}{(\lambda_1 - \lambda_2)(a^2 - z^2)}. \tag{17}$$

On peut obtenir à partir de la formule (17) une formule approchée très importante pour les applications. Soient z_0 un point de C_2, n un segment de la normale à la circonférence C_2 en ce point appartenant à la lunule D, ϑ l'angle entre les tangentes à C_1 et C_2 aux extrémités du segment n et k_1, k_2 les courbures de C_1 et de C_2 (fig. 67). Supposons que h, $k_1 - k_2$ et n soient infiniment petits du premier ordre et que les courbures k_1 et k_2 soient bornées. On peut alors affirmer que

$$|f'(z_0)| = \frac{h}{n} \left\{ 1 + \frac{k_1 n}{6} + \frac{k_2 n}{3} + \frac{k_2^2 n^2}{12} + \frac{\vartheta^2}{3} \right\} + \eta, \tag{18}$$

(*) Pour obtenir la formule (16) il suffit de remarquer que la fonction (5) du n° 33 dans laquelle on remplace z par $\frac{z}{a}$ réalise la représentation de la lunule donnée sur une bande horizontale dont la frontière passe par les points $\frac{H}{\pi} \ln \frac{a - ih_k}{a + ih_k} = -2i \frac{H}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h_k}{a} = -i \frac{H}{\pi} \lambda_k$ (comparer avec les formules (11) du n° 9). La largeur de cette bande est $h = \frac{H}{\pi} (\lambda_1 - \lambda_2)$; d'où l'on trouve H. Il reste à déplacer la bande de manière que son bord inférieur coïncide avec l'axe réel, et ainsi nous établissons la formule (16).

où η peut être représenté sous la forme d'un polynôme homogène du troisième degré en n, ϑ, $k_1 - k_2$ à coefficients bornés.

Pour établir la formule (18) à partir de la formule (17) il faut exprimer dans cette dernière les paramètres a, λ_1, λ_2, z_0 en fonction de n, ϑ, k_1, k_2, puis développer $|f'(z_0)|$ suivant les puissances de n, ϑ, $k_1 - k_2$ jusqu'aux termes du second ordre compris. Cependant, en pratique cela conduit à des calculs laborieux. C'est pourquoi nous établirons la formule (18) en partant du cas particulier lorsque la circonférence C_2 coïncide avec l'axe Ox, c'est-à-dire lorsque $k_2 = 0$ (fig. 68). Dans ce cas la formule (17) donne

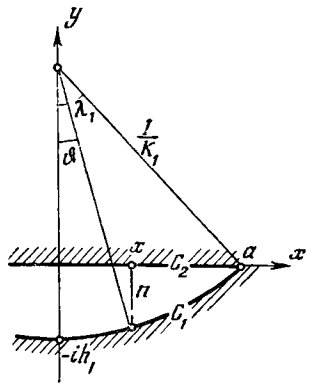

FIG. 68

$$|f'(x)| = \frac{2ah}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2},$$

où $\lambda_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{h_1}{a}$ est la moitié de l'angle au centre de l'arc C_1 (fig. 68). D'autre part, nous avons $\lambda_1 = \arcsin ak_1 = ak_1 + \frac{1}{6} a^3 k_1^3 + \ldots$, $x = \frac{\sin \vartheta}{k_1}$, $n = \frac{\cos \vartheta}{k_1} - \frac{\cos \lambda_1}{k_1}$, donc

$$|f'(x)| = \frac{2ah}{ak_1 + \frac{1}{6} a^3 k_1^3} \cdot \frac{1}{a^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{k_1^2}} + \ldots =$$

$$= \frac{h}{n} \frac{1}{ak_1 + \frac{1}{6} a^3 k_1^3} \cdot \frac{2(\cos \vartheta - \cos \lambda_1)}{ak_1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{ak_1}} + \ldots$$

Ensuite nous avons aux infiniment petits du quatrième ordre près

$$2nk_1 = 2(\cos \vartheta - \cos \lambda_1) \approx \lambda_1^2 - \vartheta^2 - \frac{1}{12}(\lambda_1^4 - \vartheta^4) \approx$$

$$\approx a^2 k_1^2 - \vartheta^2 + \frac{1}{4} a^4 k_1^4 + \frac{1}{12} \vartheta^4 \qquad (19)$$

et

$$\left(ak_1 + \frac{1}{6} a^3 k_1^3\right)\left(ak_1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{ak_1}\right) \approx \left(1 + \frac{1}{6} a^2 k_1^2\right)\left(a^2 k_1^2 - \vartheta^2 + \frac{1}{3} \vartheta^4\right) \approx$$

$$\approx a^2 k_1^2 - \vartheta^2 + \frac{1}{3} \vartheta^4 + \frac{1}{6} a^4 k_1^4 - \frac{1}{6} a^2 k_1^2 \vartheta^2.$$

Divisant le premier de ces développements par le deuxième nous trouvons, aux infiniment petits du second ordre inclus, que

$$|f'(x)| \approx \frac{h}{n} \left\{1 + \left(\frac{a^4 k_1^4}{12} - \frac{\vartheta^4}{4} + \frac{a^2 k_1^2 \vartheta^2}{6}\right) \cdot \frac{1}{a^2 k_1^2 - \vartheta^2}\right\}.$$

Usant de la relation $2nk_1 = 2(\cos\vartheta - \cos\lambda_1) \approx a^2k_1^2 - \vartheta^2$, vraie avec le même degré de précision, nous trouvons :

$$|f'(x)| \approx \frac{h}{n}\left\{1 + \left(\frac{n^2k_1^2}{3} + \frac{2nk_1\vartheta^2}{3}\right)\frac{1}{2nk_1}\right\} = \frac{h}{n}\left\{1 + \frac{nk_1}{6} + \frac{\vartheta^2}{3}\right\}, \tag{20}$$

ce qui coïncide avec la formule (18) lorsque $k_2 = 0$.

Pour passer au cas général lorsque $k_2 \neq 0$, considérons le plan auxiliaire des ζ et la lunule D^* de frontière un segment C_2^* de l'axe

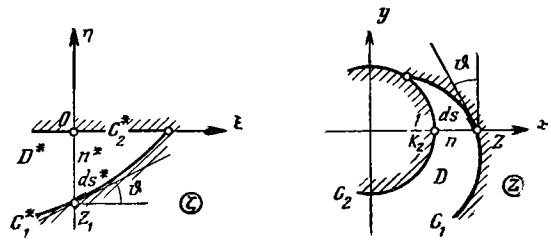

FIG. 69

réel et l'arc de circonférence C_1^* de courbure k_1^* ; désignons par n^* le segment de l'axe imaginaire appartenant à la lunule D^* et par ϑ l'angle formé par l'arc C_1^* et la perpendiculaire à l'axe imaginaire au point de leur intersection (fig. 69). Transformons d'une manière conforme le demi-plan inférieur des ζ sur l'extérieur de la circonférence C_2 de courbure k_2:

$$z = \frac{1}{k_2}\frac{i-\zeta}{i+\zeta}, \qquad \frac{dz}{d\zeta} = -\frac{2i}{k_2}\frac{1}{(i+\zeta)^2}. \tag{21}$$

Par cette transformation la lunule D^* a pour image la lunule D de frontière l'arc C_2 et l'arc de circonférence C_1 de courbure k_1, l'axe imaginaire a pour image l'axe réel et le segment n^* le segment n de l'axe réel, de plus

$$n = \frac{1}{k_2}\frac{1+n^*}{1-n^*} - \frac{1}{k_2} = \frac{2n^*}{k_2(1-n^*)},$$

$$n^* = \frac{k_2 n}{2+k_2 n} = \frac{k_2 n}{2}\frac{1}{1+\dfrac{k_2 n}{2}}, \tag{22}$$

et la circonférence C_1 forme avec la perpendiculaire à l'axe réel au point z_1 de leur intersection l'angle ϑ (fig. 69).

Trouvons maintenant le lien qui existe entre k_1 et les autres paramètres. Pour cela désignons par ds l'élément de longueur de l'arc C_1, par $\alpha(s)$ l'angle de la tangente à C_1 et de l'axe des x (on compte s à

partir du point z_1, de manière que $\alpha(0) = \vartheta + \frac{\pi}{2}$) et par ds^* l'élément d'arc de C_1^* correspondant à ds. Nous avons $k_1 = \frac{d\alpha}{ds}$. Or un accroissement infiniment petit de l'angle α peut être mis sous la forme

$$d\alpha = k_1^* ds^* + d \arg \frac{dz}{d\zeta},$$

où le deuxième terme $d \arg \frac{dz}{d\zeta} = \operatorname{Im} d \ln \frac{dz}{d\zeta}$ désigne l'accroissement de $\arg \frac{dz}{d\zeta}$ sur l'arc $d\zeta = e^{i\vartheta} ds^*$ de la circonférence C_1^* adjacent au point $\zeta_1 = -n^* i$. Cet accroissement, en vertu de la formule (21), est égal à $-2 \operatorname{Im} \frac{e^{i\vartheta} ds^*}{(1-n^*)i} = \frac{2\cos\vartheta}{1-n^*} ds^*$, et nous avons pour la courbure :

$$k_1 = \frac{d\alpha}{ds} = \left(k_1^* + \frac{2\cos\vartheta}{1-n^*}\right) \frac{ds^*}{ds} \approx \left(k_1^* + \frac{2\cos\vartheta}{1-n^*}\right) \frac{(1-n^*)^2}{2} k_2,$$

car selon cette même formule (21) $\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta_1}} = \frac{k_2}{2}(1-n^*)^2$.

De cette équation et de la seconde formule (21), d'après laquelle $\frac{1}{1-n^*} = 1 + \frac{k_2 n}{2}$, nous trouvons :

$$k_1^* \approx \frac{k_1}{k_2} \frac{2}{(1-n^*)^2} - \frac{2\cos\vartheta}{1-n^*} = 2\frac{k_1}{k_2}\left(1+\frac{k_2 n}{2}\right)^2 - 2\cos\vartheta\left(1+\frac{k_2 n}{2}\right). \tag{23}$$

Supposons que la fonction $w = f(z)$ réalise la représentation conforme de la lunule de frontière les arcs de circonférence C_1 et C_2 sur la bande de largeur h. D'après la formule (21) nous avons au point $z_0 = \frac{1}{k_2}$ correspondant au point $\zeta = 0$:

$$|f'(z_0)| = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} \cdot \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_0} = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} \frac{k_2}{2}.$$

La quantité $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}$ peut être calculée d'après la formule (20) en y remplaçant n et k_1 par n^* et k_1^*. Usant des valeurs de n^* et k_1^* données par (22) et (23) nous obtenons aux infiniment petits du second ordre inclus

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = \frac{h}{n^*}\left(1 + \frac{n^* k_1^*}{6} + \frac{\vartheta^2}{3}\right) =$$

$$= \frac{h}{n} \cdot \frac{2}{k_2}\left(1+\frac{k_2 n}{2}\right)\left\{1 + \frac{k_1 n}{6}\left(1+\frac{k_2 n}{2}\right) - \frac{k_2 n}{6}\cos\vartheta + \frac{\vartheta^2}{3}\right\} =$$

$$= \frac{h}{n}\frac{2}{k_2}\left(1 + \frac{k_1 n}{6} + \frac{k_2 n}{3} + \frac{k_1 k_2 n^2}{6} - \frac{k_2^2 n^2}{12} + \frac{\vartheta^2}{3}\right).$$

Or, par hypothèse la différence $k_1 - k_2$ est un infiniment petit, donc $k_1 k_2 n^2 = k_2^2 n^2$ avec le même degré de précision et nous obtenons la formule cherchée

$$|f'(z_0)| \approx \frac{h}{n}\left(1 + \frac{k_1 n}{6} + \frac{k_2 n}{3} + \frac{k_2^2 n^2}{12} + \frac{\vartheta^2}{3}\right).$$

§ 3. PRINCIPE DE SYMÉTRIE ET TRANSFORMATION DES POLYGONES

Ici nous allons étudier des méthodes qui jouent un rôle important dans la construction pratique des représentations conformes. La première de ces méthodes est basée sur le principe de symétrie qui a été énoncé par *B. Riemann* et fondé par *H. Schwarz*. Cette méthode, comme nous le verrons (n° 36), permet dans certains cas de simplifier suffisamment la résolution du problème de la détermination des transformations conformes.

La seconde méthode est particulièrement importante pour les applications, car elle permet d'écrire (il est vrai, en général sous la forme d'une intégrale) la fonction qui réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur sur un domaine arbitraire dont la frontière est un polygone.

35. Le principe de symétrie donne dans un cas particulier une condition suffisante simple d'existence du prolongement analytique de la fonction qui réalise la représentation conforme.

Théorème 1 (B. Riemann, H. Schwarz). *Supposons que la frontière d'un domaine D_1 contienne un arc de circonférence C et soit $w = f_1(z)$ une fonction qui réalise la représentation conforme de ce domaine sur un domaine D_1^* de manière que l'arc C ait pour image la partie C^* de la frontière de D_1^*, qui est également un arc de circonférence. Dans ces conditions la fonction $f_1(z)$ admet un prolongement analytique $f_2(z)$ à travers l'arc C dans le domaine D_2 symétrique de D_1 par rapport à C, de plus la fonction $w = f_2(z)$ réalise la représentation conforme du domaine D_2 sur le domaine D_2^* symétrique de D_1^* par rapport à C^* et la fonction*

$$w = f(z) = \begin{cases} f_1(z) \text{ dans } D_1, \\ f_1(z) = f_2(z) \text{ sur } C, \\ f_2(z) \text{ dans } D_2 \end{cases}$$

réalise la représentation conforme (*) *du domaine $D_1 \cup C \cup D_2$ sur le domaine $D_1^* \cup C^* \cup D_2^*$.*

Pour démontrer ce théorème nous réalisons les transformations homographiques

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d} = l(z), \quad \omega = \frac{a^* w + b^*}{c^* w + d^*} = l_*(w) \tag{1}$$

(*) Pour que cette transformation soit univalente, il faut que les domaines D_1 et D_2 ainsi que D_1^* et D_2^* ne se coupent pas.

transformant C et C^* en les segments Γ et Γ^* des axes réels des plans ζ et ω ; les domaines D_1 et D_1^* ont pour images les domaines Δ_1 et Δ_1^* et la fonction $w = f_1(z)$ se transforme en la fonction $\omega = l_* f_1 l^{-1}(\zeta) = \varphi(\zeta)$, qui réalise la représentation conforme de Δ_1 sur Δ_1^* (fig. 70) (*). Désignons par Δ_2 le domaine symétrique de Δ_1 par rapport à Γ. Construisons dans Δ_2 la fonction

$$\omega = \varphi_2(\zeta) = \overline{\varphi_1(\bar{\zeta})}$$

et montrons qu'elle est le prolongement analytique de $\varphi_1(\zeta)$. Avant tout la fonction $\varphi_2(\zeta)$ est analytique dans le domaine Δ_2. En effet, pour tous points ζ et $\zeta + \Delta\zeta$ de Δ_2 nous avons :

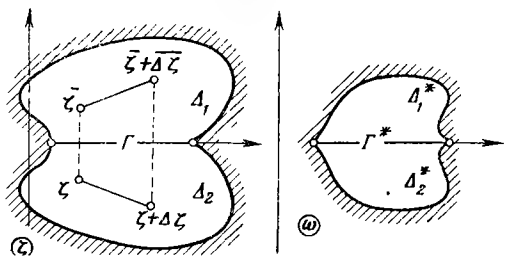

FIG. 70

$$\frac{\varphi_2(\zeta+\Delta\zeta)-\varphi_2(\zeta)}{\Delta\zeta} = \frac{\overline{\varphi_1(\bar{\zeta}+\overline{\Delta\zeta})}-\overline{\varphi_1(\bar{\zeta})}}{\Delta\zeta} = \left(\overline{\frac{\varphi_1(\bar{\zeta}+\overline{\Delta\zeta})-\varphi_1(\bar{\zeta})}{\overline{\Delta\zeta}}}\right),$$

où $\bar{\zeta}$ et $\bar{\zeta}+\overline{\Delta\zeta}$ sont des points de Δ_1. En vertu de l'analyticité de $\varphi_1(\zeta)$ dans Δ_1, le second membre a une limite lorsque $\overline{\Delta\zeta} \to 0$, par conséquent, la dérivée

$$\varphi_2'(\zeta) = \overline{\varphi_1'(\bar{\zeta})} \tag{2}$$

existe en tout point ζ du domaine Δ_2, c'est-à-dire que $\varphi_2(\zeta)$ est analytique dans Δ_2. Par construction les valeurs frontières sur le segment Γ de la fonction $\varphi_2(\zeta)$ existent

$$\varphi_2(x) = \lim_{\zeta \to x} \varphi_2(\zeta) = \lim_{\bar{\zeta} \to x} \overline{\varphi_1(\bar{\zeta})}, \tag{3}$$

car d'après le théorème de la correspondance des frontières dans une représentation conforme (n° 29) $\lim\limits_{\bar{\zeta} \to x} \varphi_1(\bar{\zeta}) = \varphi_1(x)$ existe. La relation (3) prend la forme $\varphi_2(x) = \overline{\varphi_1(x)}$, mais comme les valeurs de $\varphi_1(x)$ sont réelles (Γ^* par hypothèse est un segment de l'axe réel), sur le segment Γ on a

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x). \tag{4}$$

D'après le principe du prolongement continu (n° 25) on peut donc affirmer que $\varphi_2(\zeta)$ est un prolongement analytique de $\varphi_1(\zeta)$ à travers Γ.

(*) Pour ce cas le principe de symétrie a été énoncé par Euler en 1777.

Il découle de la construction de la fonction $\varphi_2(\zeta)$ qu'elle réalise la représentation conforme du domaine Δ_2 sur le domaine Δ_2^* symétrique de Δ_1^* par rapport à Γ^*. La fonction $\varphi(\zeta)$ composée de $\varphi_1(\zeta)$ et de son prolongement analytique $\varphi_2(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} \varphi_1(\zeta) \text{ dans } \Delta_1 \\ \varphi_1(\zeta) = \varphi_2(\zeta) \text{ sur } \Gamma, \\ \varphi_2(\zeta) \text{ dans } \Delta_2 \end{cases}$$

réalise la représentation conforme de $\Delta_1 \cup \Gamma \cup \Delta_2$ sur $\Delta_1^* \cup \Gamma^* \cup \Delta_2^*$.

Revenons maintenant aux anciennes variables z et w à l'aide des substitutions inverses de (1). En vertu des propriétés des transformations homographiques, nous obtenons dans le domaine D_2, symétrique de D_1 par rapport à l'arc C, une fonction $f_2(z)$ qui prolonge analytiquement $f_1(z)$ à travers l'arc C et qui réalise la représentation conforme du domaine D_2 sur le domaine D_2^* symétrique de D_1^* par rapport à l'arc C^*. Le théorème est démontré.

Donnons un exemple d'application du principe de symétrie en démontrant un théorème d'unicité des représentations conformes lorsque la correspondance de trois points frontières est donnée (n° 29).

Théorème 2. *Il existe une et seulement une représentation conforme $w = f(z)$ d'un domaine D sur un domaine D^* qui fait correspondre à trois points frontières z_k du domaine D trois points frontières w_k du domaine D^*. Les points z_k et w_k sont donnés arbitrairement mais en conservant l'ordre de succession lorsqu'on décrit les frontières des domaines.*

Considérons d'abord le cas où D et D^* sont des cercles unités. D'après la formule (2) du n° 32 on peut construire une transformation homographique du cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|w| < 1$ avec les conditions $f(z_k) = w_k$. Démontrons l'unicité de cette transformation. Soit $w = g(z)$, $g(z_k) = w_k$ une autre transformation du cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|w| < 1$. La fonction $g(z)$ vérifie les conditions du principe de symétrie et, par conséquent, elle est prolongeable analytiquement dans le domaine symétrique du cercle $|z| < 1$ par rapport à la circonférence $|z| = 1$, c'est-à-dire dans l'extérieur du cercle $|z| > 1$. La fonction $w = g(z)$, ainsi que son prolongement, réalise la représentation univalente du plan fermé des z et, d'après le théorème 1 du n° 31, elle est une fonction homographique. Mais alors on peut affirmer que $g(z) \equiv f(z)$ car, d'après ce qui a été démontré (n° 32), la transformation homographique est complètement définie par la donnée de trois points qui se correspondent.

Le cas général se ramène très simplement au cas considéré. En effet, soient $\zeta = \varphi(z)$, $\zeta_k = \varphi(z_k)$ et $\omega = \psi(w)$, $\omega_k = \psi(w_k)$ les transformations conformes des domaines D et D^* sur les cercles unités $|\zeta| < 1$ et $|\omega| < 1$ et $\omega = F(\zeta)$, $F(\zeta_k) = \omega_k$ la transforma-

tion du cercle $|\zeta| < 1$ sur le cercle $|\omega| < 1$ (son existence et son unicité ont été démontrées plus haut). Il est clair que la transformation du domaine D sur le domaine D^* avec les conditions données est réalisée par la fonction

$$w = \psi^{-1} F \varphi(z) = f(z),$$

où ψ^{-1} est la transformation inverse de ψ. L'existence d'une seconde transformation $w = g(z)$ du domaine D sur le domaine D^*, avec les mêmes conditions, aurait conduit à l'existence d'une seconde transformation

$$\omega = \psi g \varphi^{-1}(\zeta) = G(\zeta)$$

du cercle $|\zeta| < 1$ sur le cercle $|\omega| < 1$, avec les conditions $G(\zeta_k) = \omega_k$, ce qui contredit les résultats obtenus plus haut. Le théorème est donc démontré.

Considérons encore une application du principe de symétrie au problème d'existence des transformations conformes des *domaines multiplement connexes*. D'après le théorème fondamental du n° 28, deux domaines simplement connexes arbitraires peuvent être transformés d'une manière conforme et univalente l'un sur l'autre. D'autre part, nous avons vu qu'il est impossible de transformer un domaine simplement connexe sur un domaine multiplement connexe. La question se pose de la possibilité de transformer l'un sur l'autre des domaines d'un même ordre de connexion. Il s'avère que cette question en général se résout négativement. En effet, même dans les cas simples de couronnes concentriques on a le théorème suivant :

Théorème 3. *Pour qu'il existe une représentation conforme* $w = f(z)$ *d'une couronne* $r_1 < |z| < r_2$ *sur une couronne* $\rho_1 < |w| < \rho_2$, *il faut et il suffit que la condition*

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r_2}{r_1} \tag{5}$$

soit satisfaite.

Pour démontrer la nécessité de la condition (5) remarquons que la fonction $f(z)$ vérifie les conditions du principe de symétrie et, d'après ce principe, elle se prolonge analytiquement dans les domaines $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1$ et $r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$, symétriques de la couronne $r_1 < |z| < r_2$ respectivement par rapport aux circonférences $|z| = r_1$ et $|z| = r_2$. La couronne dilatée $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$ est transformée par la fonction $f(z)$ (avec son prolongement) sur la couronne $\frac{\rho_1^2}{\rho_2} < |w| < \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$. Appliquant donc encore une fois le principe de symétrie à la fonction $f(z)$, on peut la prolonger dans la couronne $r_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 < |z| < r_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. En réalisant indéfiniment ce prolonge-

ment, nous obtenons que $f(z)$ donne la représentation univalente du domaine $0 < |z| < \infty$ sur le domaine $0 < |w| < \infty$, de plus soit $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$, $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$, soit $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$, selon que la circonférence $|z| = r_1$ correspond à la circonférence $|w| = \rho_1$ ou à $|w| = \rho_2$. On en déduit que $f(z)$ est une fonction homographique de l'une des deux formes

$$f(z) = az, \quad f(z) = \frac{a}{z}, \tag{6}$$

où a est une constante complexe. Dans les deux cas l'égalité (5) est évidemment satisfaite. La condition (5) est suffisante : en effet, si elle est satisfaite, les couronnes sont semblables et peuvent être transformées les unes sur les autres par dilatation.

Pour compléter le théorème que nous venons de démontrer indiquons que tout domaine doublement connexe peut cependant être transformé sur une couronne $\rho_1 < |w| < \rho_2$. En outre, si le rayon ρ_1 est donné, le rayon ρ_2 est défini d'une manière unique pour le domaine donné. On peut transformer de la même manière tout domaine d'ordre de connexion n sur un certain domaine qui s'obtient en retranchant du plan n cercles. Le lecteur trouvera la démonstration de ces propositions dans l'article de M. Keldych [7] ou dans le livre de R. Courant [5].

Pour terminer donnons une généralisation du principe de symétrie dans le cas où les frontières des domaines qui se correspondent contiennent des arcs de courbe analytiques. L'arc de courbe C est dit *analytique* si on peut le donner par des équations paramétriques

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont des *fonctions analytiques de la variable réelle* t dans l'intervalle fermé (α, β), c'est-à-dire des fonctions développables au voisinage de chaque point t_0 de cet intervalle fermé en série entière suivant les puissances de $t - t_0$. De plus, on suppose qu'en aucun point de cet intervalle fermé les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ ne s'annulent simultanément (c'est-à-dire que C ne possède pas de *points singuliers*). La courbe C peut également être fermée si $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$.

On a le *principe du prolongement analytique* :

Théorème 4 (H. Schwarz). *Soit $w = f(z)$ une fonction qui réalise la représentation conforme d'un domaine D, dont la frontière contient un arc de courbe analytique C, sur un domaine D^*, de plus à l'arc C correspond un arc analytique C^* de la frontière du domaine D^*. Dans ces conditions, la fonction $w = f(z)$ peut être prolongée analytiquement à travers l'arc C.*

En effet, soient z_0 un point arbitraire de l'arc C, $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ l'équation de cette courbe et $z_0 = z(t_0)$. Puisque

par hypothèse C est un arc de courbe analytique, alors dans un voisinage $|t - t_0| < \delta$ la fonction $z = z(t)$ peut être développée en série suivant les puissances de $t - t_0$; d'après le théorème d'Abel cette dernière est convergente aussi pour les valeurs complexes de t, que nous désignons par ζ, dans le cercle $|\zeta - t_0| < \delta$. On a donc défini une fonction analytique $z = z(\zeta)$ dans ce cercle. Puisque $z'(t_0) \neq 0$, diminuant δ, s'il est nécessaire, on peut supposer que la transformation $z = z(\zeta)$ est conforme. Par construction $z = z(\zeta)$ transforme le diamètre du cercle $|\zeta - t_0| < \delta$ sur un arc de courbe C qui contient le point z_0; nous supposons que le demi-cercle supérieur se transforme sur l'intérieur du domaine D et le demi-cercle inférieur sur son extérieur.

Exactement de la même manière, si $w = w(\tau)$ est l'équation de la courbe C^*, nous pouvons construire la représentation conforme $w = w(\omega)$ d'un cercle $|\omega - \tau_0| < \delta_1$, de centre sur l'axe réel, sur un voisinage du point $w_0 = w(\tau_0) = f(z_0)$, qui transforme le diamètre de ce cercle sur un arc de courbe C^*. Nous supposons encore que le demi-cercle supérieur se transforme sur l'intérieur du domaine D^* et le demi-cercle inférieur sur l'extérieur.

La fonction $w = f(z)$ réalise la représentation conforme

$$\omega = \omega\{f[z(\zeta)]\} = \varphi(\zeta)$$

($\omega = \omega(w)$ est la fonction inverse de $w = w(\omega)$) du demi-cercle supérieur $|\zeta - t_0| < \delta$ sur une partie du demi-cercle supérieur $|\omega - \tau_0| < \delta_1$, de plus le diamètre du premier demi-cercle a pour image une partie du diamètre du second. D'après le principe de symétrie qui vient d'être démontré (théorème 1), la fonction $\varphi(\zeta)$ admet un prolongement analytique dans le demi-cercle inférieur et (avec son prolongement) réalise la représentation conforme du cercle entier $|\zeta - t_0| < \delta$ sur une partie du cercle $|\omega - \tau_0| < \delta_1$, qui contient un segment du diamètre.

La fonction ainsi construite $\omega = \varphi(\zeta)$ engendre le prolongement analytique de la fonction $f(z)$ à travers un arc de courbe C. En effet, dans la partie de l'extérieur du domaine D qui correspond au demi-cercle inférieur $|\zeta - t_0| < \delta$ la fonction $w = w\{\varphi[\zeta(z)]\}$ ($\zeta(z)$ est la fonction inverse de $z(\zeta)$), dont les valeurs frontières sur l'arc de courbe C coïncident avec les valeurs frontières de $f(z)$, est analytique. D'après le principe du prolongement continu, cette fonction est le prolongement analytique de $f(z)$. Puisque z_0 est un point arbitraire de la courbe C, on peut affirmer que $f(z)$ est prolongeable analytiquement à travers tout l'arc de courbe C. Le théorème est démontré.

En particulier, si les frontières C et C^* des domaines donnés sont des courbes analytiques, alors $f(z)$ est prolongeable analytiquement à travers toute la frontière du domaine D (et, par conséquent, analytique sur le domaine fermé $\bar{D}$).

Nous allons donner maintenant plusieurs exemples de représentations conformes dans lesquels nous appliquons le principe de symétrie.

36. Exemples. 1) Transformation de l'extérieur d'une croix sur l'extérieur du cercle unité (fig. 71). Menons une coupure auxiliaire FAB (en pointillé) suivant l'axe imaginaire et considérons dans la moitié de droite de la figure la transformation $z_1 = z^2$ qui transforme cette moitié sur le plan des z_1 muni d'une coupure suivant le rayon joignant les points A $(-\infty)$ et D (a^2) suivant l'axe réel. Nous appliquons ensuite la transformation

$$z_2 = \sqrt{z_1 - a^2} = \sqrt{z^2 - a^2} \qquad (1)$$

qui transforme le domaine obtenu sur le demi-plan de droite. De plus, la coupure auxiliaire se transforme en un segment de l'axe imaginaire joignant le point $F(-fi)$, où $f = \sqrt{a^2 + c^2}$, au point $B(gi)$, où $g = \sqrt{a^2 + b^2}$ (fig. 71), et contenant le point ∞.

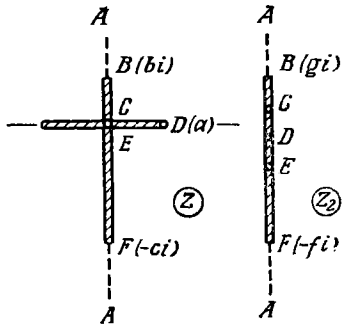

FIG. 71

La fonction $z_2 = \sqrt{z^2 - a^2}$ satisfait aux conditions du principe de symétrie, elle admet donc un prolongement analytique à travers FAB dans le demi-plan de gauche et réalise, avec son prolongement analytique que nous notons de nouveau $z_2 = \sqrt{z^2 - a^2}$, la transformation de l'extérieur de la croix considérée sur l'extérieur du segment BF de l'axe imaginaire du plan des z_2.

Il reste à transformer ce dernier domaine sur l'extérieur du cercle unité. Pour cela, appliquons la transformation linéaire $z_3 = \frac{2i}{f+g} z_2 - \frac{f-g}{f+g}$ transformant l'extérieur du segment BF sur l'extérieur du segment de longueur unité, puis la transformation inverse de Joukovski (cf. n° 7) :

$$w = -i(z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1}) =$$

$$= \frac{2}{f+g}\left\{\sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2 + fg + (f-g)\, i\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{f-g}{2} i\right\}. \qquad (2)$$

En particulier, pour $b = c = a$ nous avons $w = \frac{1}{a\sqrt{2}}(\sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{z^2 + a^2})$, d'où

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{w^4 + 1}}{w} \qquad (3)$$

(comparer avec n° 30, exemple 3).

2) Transformation de l'extérieur du cercle unité duquel on a retranché les segments $1 \leqslant |z| \leqslant 1 + a$, $\arg z = \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ sur l'extérieur du cercle unité (fig. 72). Menons des points B_1 et B_2, jusqu'à l'infini, suivant le prolongement des rayons du cercle des coupures auxiliaires et construisons la représentation conforme du secteur ainsi obtenu sur un secteur semblable mais de manière que les points B_1 et B_2 aient pour images les points A_1 et A_2. A cet

effet, on transforme, à l'aide de la transformation $z_1 = z^{\frac{n}{2}}$, le secteur sur le demi-plan supérieur duquel on a retranché un demi-cercle, puis à l'aide de la fonction de Joukovski $z_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)$ sur le demi-plan supérieur. Les points B_1 et B_2 ont pour images les points

$$\pm(1+a_1) = \pm\frac{1}{2}\left\{(1+a)^{\frac{n}{2}} + (1+a)^{-\frac{n}{2}}\right\}. \qquad (4)$$

Nous contractons ensuite le demi-plan : $z_3 = \frac{z_2}{1+a_1}$ et nous appliquons la transformation inverse de Jouk ovski : $z_4 = z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1}$. Nous obtenons

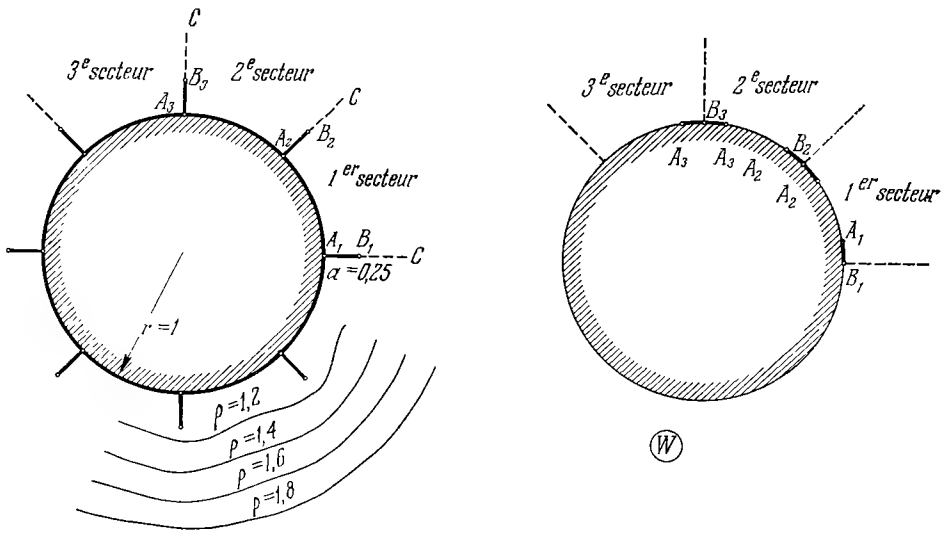

FIG. 72

de nouveau le demi-plan supérieur duquel on a retranché le demi-cercle unité mais les points B_1 et B_2 ont à présent pour images les points ± 1. Il reste à appliquer la transformation $w = z^{\frac{2}{n}}_4$ pour obtenir la transformation cherchée du secteur sur le secteur :

$$w = \frac{(1+a_1)^{-\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{4}}\left\{z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} + \sqrt{(z^{\frac{n}{2}} - z^{-\frac{n}{2}})^2 - 8a_1 - 4a_1^2}\right\}^{\frac{2}{n}}. \qquad (5)$$

La fonction (5) satisfait aux conditions du principe de symétrie ; appliquant ce principe, nous trouvons que cette fonction est prolongeable à travers le rayon B_2C et réalise, avec son prolongement, la transformation de l'ensemble du premier et du deuxième secteur du plan des z sur l'ensemble du premier et du deuxième secteur du plan des w (fig. 72). Le prolongement ainsi obtenu est de nouveau prolongeable à travers le rayon B_3C, et le nouveau prolongement transforme le troisième secteur du plan des z sur le troisième secteur du plan

des w (de manière que le point B_3 appartienne à la circonférence). Répétant ce raisonnement, nous trouvons que la fonction (5) réalise, avec ses prolongements analytiques, la transformation cherchée.

On a indiqué sur la fig. 72 les parties des images réciproques des circonférences $|w| = \rho$ par la transformation considérée dans le cas $n = 8$ et $a = 0{,}25$; on voit que pour $\rho = 1{,}8$ et plus grand les segments enlevés n'ont aucune influence pratique — les images réciproques ne se distinguent pas des circonférences.

Pour $a = 0$ nous avons aussi $a_1 = 0$, par conséquent la formule (5) se transforme en la formule $w \equiv z$. Trouvons la partie principale de la transformation (5) pour les petits a. De la relation (4) nous trouvons : $a_1 \approx \frac{n^2a^2}{8}$. Négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à a^2, de la formule (5) nous obtenons la formule approchée de notre représentation conforme :

$$w \approx \frac{4}{\sqrt[n]{4}}\left(1-\frac{2a_1}{n}\right)\left\{z^{\frac{n}{2}}+z^{-\frac{n}{2}}+(z^{\frac{n}{2}}-z^{-\frac{n}{2}})\left(1-\frac{4a_1}{(z^{\frac{n}{2}}-z^{-\frac{n}{2}})^2}\right)\right\}^{\frac{2}{n}} =$$

$$= z\left(1-2\frac{a_1}{n}\right)\left(1-\frac{2a_1}{z^n-1}\right)^{\frac{2}{n}},$$

ou finalement

$$w \approx z\left(1-\frac{na^2}{4}\frac{z^n+1}{z^n-1}\right) \tag{6}$$

(cf. la formule (10) de l'exemple (4), n° 30). La formule (6) est valable pour les points pas trop voisins des racines n-ièmes de l'unité.

3) Transformation du demi-plan supérieur duquel on a retranché les segments $0 \leqslant y \leqslant h$, $x = ka$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) sur le demi-plan supérieur. Menons à partir des extrémités des segments vers l'infini (en traits mixtes sur la fig. 73) les coupures auxiliaires $A_{-1}C$ et A_0C et transformons la demi-bande ainsi obtenue $CB_{-1}B_0C$ sur une demi-bande semblable mais de manière que les points A_{-1} et A_0 aient pour images les sommets de cette demi-bande. Pour cela, transformons d'abord notre demi-bande dans le demi-plan : $z_1 = \cos\frac{\pi z}{a}$ (cf. n° 9). Contractons ce dernier : $z_2 = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{a}} z_1$ (de manière que les points A_{-1} et A_0 aient pour images les points $z_2 = \pm 1$) et utilisons la transformation inverse de la première : $w = \frac{a}{\pi}\arccos z_2$. Ainsi, nous obtenons la transformation cherchée de la demi-bande sur la demi-bande :

$$w = \frac{a}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{a}}\cos\frac{\pi z}{a}\right). \tag{7}$$

Appliquant une infinité de fois le principe de symétrie à la fonction obtenue nous trouvons qu'elle réalise la transformation cherchée de notre domaine sur le demi-plan supérieur.

On a indiqué sur la fig. 73 les images réciproques des courbes $u = \text{const}$ et $v = \text{const}$ par la transformation considérée pour $h = 0{,}5$ et $a = 2$; on voit que pour $v \geqslant 2$ les segments enlevés n'ont pratiquement aucune influence, les images réciproques considérées ne se distinguent pratiquement pas des droites.

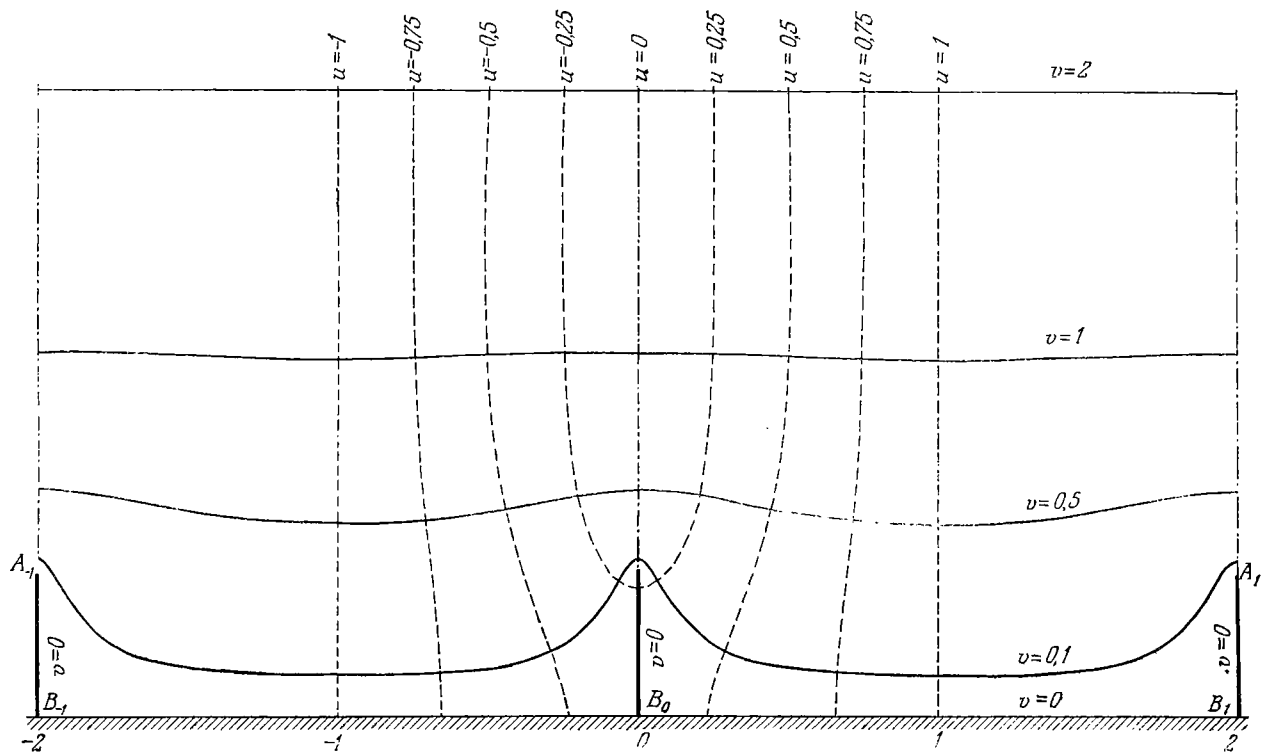
u=-1
u=-0,75
u=-0,5
u=-0,25
u=0
u=0,25
u=0,5
u=0,75
u=1
v=2
v=1
v=0,5
v=0,1
v=0
A-1
A1
B-1
B0
B1
θ=a
θ=a
θ=a
-2
-1
0
1
2

FIG. 73

4) Transformation du plan duquel on a retranché les segments $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = kH$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) sur le plan duquel on a retranché des segments de l'axe réel (fig. 74; les deux domaines sont à connexion infinie).

Menons une coupure auxiliaire (en pointillé) suivant l'axe imaginaire et transformons l'un des deux domaines ainsi formés, par exemple celui de droite, sur le demi-plan supérieur. Pour cela, nous faisons subir au plan des z une rotation de 90° et nous utilisons le résultat de l'exemple précédent: la fonction

$$w = \arccos\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{H}}\operatorname{ch}\frac{\pi z}{H}\right\} \qquad (8)$$

réalise la représentation conforme de la moitié de droite du domaine donné sur le demi-plan supérieur. De plus, le point A_0 ($z = a$) a pour image le point $w = \arccos 1 = 0$; le point B_{-1} ($z = 0$) le point $w = \arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{H}} = b$; le point C_{-1} ($z = -iH$) le point $w = \arccos\dfrac{-1}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{H}} = \pi - b$; A_{-1} a pour image $-\pi$; B_{-2} a pour image $\pi + b$, et en général A_k a pour image le point $w = -k\pi$ et les segments B_kC_k les segments $[-(k+1)\pi + b, -k\pi - b]$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Conformément au principe de symétrie nous prolongeons la fonction (8) à travers l'ensemble des segments B_kC_k et nous obtenons que cette fonction réalise, avec son prolongement, la représentation conforme du domaine donné sur le plan des w coupé suivant les segments $(k\pi - b, k\pi + b)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Le problème est résolu.

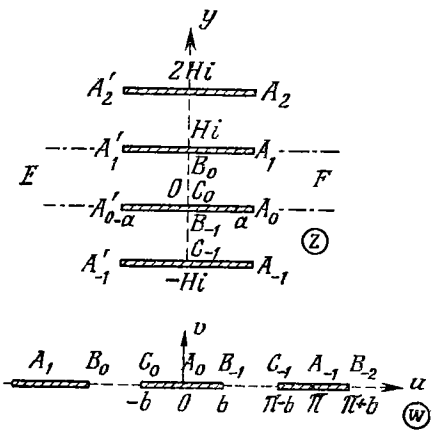

FIG. 74

5) Transformation des domaines dont les frontières sont des courbes du second degré.

a) Parabole. Supposons que l'origine des coordonnées coïncide avec le foyer de la parabole $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ (fig. 75).

1) A l'aide de la fonction $\omega = \sqrt{z}$ l'extérieur de cette parabole est transformé sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > \sqrt{\frac{p}{2}}$. En effet, posant $z = x + iy$, $w = u + iv$, nous trouvons:

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \qquad (9)$$

d'où l'on voit que les droites $v = c$ se transforment en les paraboles $y^2 = 4c^2(x + c^2)$; pour $c = \sqrt{\frac{p}{2}}$ nous retrouvons la parabole donnée. Ainsi, la fonction

$$w = \sqrt{z} - i\sqrt{\frac{p}{2}} \qquad (10)$$

réalise la représentation conforme de l'extérieur de la parabole sur le demi-plan supérieur. A l'intérieur de la parabole, la fonction (10) a un point de branchement.

2) Pour trouver la transformation de l'intérieur de la parabole, faisons une coupure suivant la demi-droite BFG (fig. 75) et remarquons que la moitié supérieure du domaine considéré se transforme à l'aide de la fonction $z_1 = \sqrt{z}$ sur la demi-bande $0 < y_1 < \sqrt{\frac{p}{2}}$, $0 < x_1 < \infty$. A l'aide de la fonction $z_2 = \cos\left\{\sqrt{\frac{2}{p}}\,\pi i z_1\right\}$ cette demi-bande se transforme sur le demi-plan supérieur,

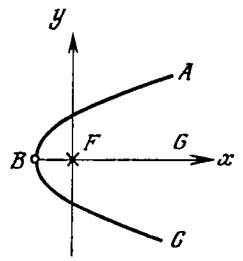

FIG. 75

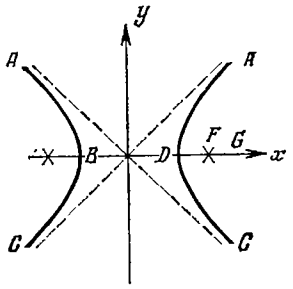

FIG. 76

de plus à la demi-droite BFG correspond la demi-droite $-1 < x < \infty$. Appliquant le principe de symétrie, puis faisant la transformation $w = i\sqrt{1 + z_2}$, nous trouvons la transformation cherchée de l'intérieur de la parabole sur le demi-plan supérieur:

$$w = i\sqrt{2}\cos\frac{\pi i z_1}{\sqrt{2p}} = i\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\pi\sqrt{\frac{z}{2p}}. \tag{11}$$

b) Hyperbole. 1) Pour trouver la transformation conforme du domaine compris entre les branches de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(fig. 76) sur le demi-plan supérieur, nous menons une coupure BD suivant l'axe réel et nous remarquons que la fonction $z_1 = \frac{1}{c}(z + \sqrt{z^2 - c^2})$, où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, transforme la moitié supérieure du domaine donné sur le secteur $\vartheta < \arg z_1 < \pi - \vartheta$, $|z_1| > 1$, où $\vartheta = \arcsin\frac{a}{c}$ (cf. n° 7). A l'aide du principe de symétrie, cette même fonction réalise la représentation conforme du domaine donné sur le secteur $\vartheta < \arg z_1 < \pi - \vartheta$. Ainsi, la fonction

$$w = (e^{-i\vartheta} z_1)^{\frac{\pi}{\pi - 2\vartheta}} = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c e^{i\vartheta}}\right)^{\frac{\pi}{\pi - 2\vartheta}} \tag{12}$$

réalise la transformation conforme du domaine compris entre les branches de l'hyperbole sur le demi-plan supérieur.

2) Pour trouver la transformation de l'intérieur de la branche de droite de l'hyperbole, menons une coupure suivant la demi-droite DFG et remarquons

que la fonction $z_1=\frac{1}{c}\,(z+\sqrt{z^2-c^2})=e^{\operatorname{arch}\frac{z}{c}}$ réalise la transformation conforme du demi-domaine supérieur sur le secteur $0<\arg z_1<\vartheta$, $|z_1|>1$. La fonction $z_2=\frac{1}{2}\left(z_1^{\frac{\pi}{\vartheta}}+z_1^{-\frac{\pi}{\vartheta}}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{\vartheta}\operatorname{arch}\frac{z}{c}\right)$ transforme ce secteur sur le demi-plan supérieur, de plus à la demi-droite DFG correspond la demi-droite $(-1,\ \infty)$ de l'axe réel. Appliquant le principe de symétrie, puis une transformation complémentaire $w=i\sqrt{1+z_2}$, nous trouvons la transformation cherchée de l'intérieur de la branche de droite de l'hyperbole sur le demi-plan supérieur :

$$w=i\sqrt{1+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{\vartheta}\operatorname{arch}\frac{z}{c}\right)}=i\sqrt{2}\ \operatorname{ch}\left\{\frac{\pi}{2\vartheta}\operatorname{arch}\frac{z}{c}\right\}. \qquad (13)$$

c) Ellipse. La transformation conforme de l'extérieur de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sur l'extérieur du cercle unité est donnée par la fonction

$$w=\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}, \qquad (14)$$

où $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (cf. n° 7). A l'intérieur de l'ellipse, cette fonction a des points de branchement (fig. 77).

Pour trouver la transformation de l'intérieur de l'ellipse, nous faisons une coupure suivant le grand axe et nous utilisons la fonction $z_1=\frac{1}{c}\,(z+\sqrt{z^2-c^2})$. Nous avons alors la transformation de la demi-ellipse supérieure sur la demi-couronne supérieure $1<|z_1|<\frac{a+b}{c}$, $\operatorname{Im} z_1>0$, de plus la coupure correspond aux segments AF_1, F_2C de l'axe réel et à la demi-circonférence unité. La fonction $z_2=\ln z_1$ transforme cette demi-couronne sur le rectangle $0<\operatorname{Re} z_2<d$, $0<\operatorname{Im} z_2<\pi$, où $d=\ln\frac{a+b}{c}$. Le principe de symétrie n'est pas applicable car l'image de notre coupure est la ligne brisée à trois côtés AF_1F_2B ; il faut préalablement transformer le rectangle sur le demi-plan supérieur pour que cette ligne brisée ait pour image un segment. La transformation du rectangle sur un plan ne peut être obtenue à l'aide d'une combinaison de fonctions élémentaires, elle est réalisée par une fonction elliptique (cf. n° 39, exemple 1), et par suite, la transformation de l'intérieur de l'ellipse sur le demi-plan ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires.

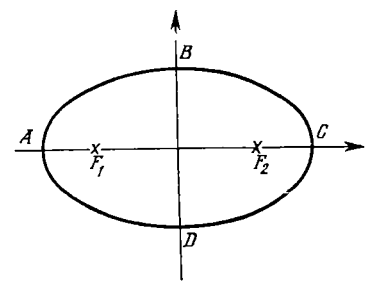

FIG. 77

37. Transformation des polygones. Avant d'établir la formule donnant la transformation du demi-plan sur un polygone (*), étudions le comportement de la transformation conforme au voisinage

(*) Cf. n° 44 pour une démonstration plus constructive de cette formule.

des points anguleux du domaine. Pour plus de commodité, supposons que la frontière du domaine Δ soit composée de segments de droite au voisinage du point anguleux w_0; nous désignons par $\alpha\pi$, en supposant $0 < \alpha \leqslant 2$, l'angle formé par ces segments de droite (fig. 78). Soit $w = f(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur sur le domaine Δ, de plus au point anguleux w_0 correspond le point z_0 de l'axe réel.

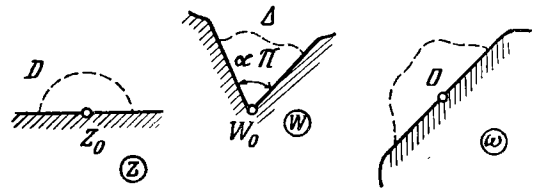

FIG. 78

Introduisons la variable auxiliaire $\omega = (w - w_0)^{\frac{1}{\alpha}}$ pour étudier le caractère de la fonction $f(z)$ au voisinage du point z_0. La fonction composée

$$\omega = \{f(z) - w_0\}^{\frac{1}{\alpha}} = \omega(z) \tag{1}$$

réalise la représentation conforme d'une partie du voisinage du point z_0 appartenant au demi-plan supérieur des z sur une partie du voisinage du point $\omega = 0$ appartenant à l'un des demi-plans, de plus au segment de l'axe réel du plan des z correspond un segment de droite (fig. 78). D'après le principe de symétrie la fonction $\omega(z)$ admet un prolongement analytique dans tout le voisinage du point z_0 et, par conséquent, elle est développable en série de Taylor

$$\omega(z) = c_1'(z - z_0) + c_2'(z - z_0)^2 + \ldots$$

Dans cette série le terme constant est absent, car $\omega(z_0) = 0$, mais $c_1' = \omega'(z_0) \neq 0$ puisque la fonction réalise une transformation biunivoque. Revenant à la fonction $f(z)$ à l'aide de la relation (1) nous trouvons qu'au voisinage du point z_0 la fonction $f(z)$ peut être représentée sous la forme

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^\alpha \{c_1' + c_2'(z - z_0) + \ldots\}^\alpha.$$

Puisque l'expression qui se trouve entre accolades est différente de zéro pour $z = z_0$, on peut choisir une branche analytique uniforme de la fonction $\{c_1' + c_2'(z - z_0) + \ldots\}^\alpha$ dans un certain voisinage de z_0. Développant cette branche en série de Taylor, nous aboutissons à la représentation de la fonction $f(z)$ au voisinage du point z_0 :

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^\alpha \{c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots\}. \tag{2}$$

On voit que lorsque $\alpha > 1$, la dérivée $f'(z_0) = 0$ et lorsque $\alpha < 1$, nous avons $f'(z_0) = \infty$. Pour la transformation inverse $z = \varphi(w)$ nous avons par contre $\varphi'(w_0) = 0$ lorsque $\alpha < 1$ et $\varphi'(w_0) = \infty$ lorsque $\alpha > 1$.

On voit de la même relation (2) que z_0 est un point de branchement de la fonction $f(z)$ lorsque $\alpha \neq 1, \neq 2$.

Dans un cas plus général, remarquons que si la frontière du domaine Δ, au voisinage d'un point w_0, est composée d'arcs une fois continûment différentiables ou même analytiques, qui se coupent

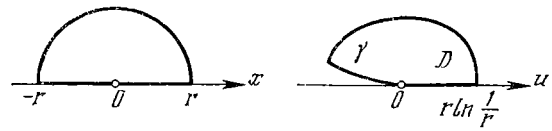

FIG. 79

au point w_0 en formant un angle d'ouverture $\alpha\pi$, la conclusion précédente n'est en général pas vraie. Dans ce cas, la fonction qui réalise la représentation conforme n'a pas obligatoirement la forme (2) : des facteurs qui tendent vers zéro et l'infini plus lentement que toute puissance de $z - z_0$ peuvent apparaître dans le terme principal de son développement.

Considérons, par exemple, dans le demi-cercle supérieur $|z| < r$, $y \geqslant 0$ la fonction

$$w = z \ln \frac{1}{z}, \quad w(0) = 0, \tag{3}$$

où la branche du logarithme est caractérisée par la condition $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$. Il est facile de voir que pour r suffisamment petit, elle transforme le segment $(0, r)$ de l'axe des x sur le segment $\left(0, r \ln \frac{1}{r}\right)$ de l'axe des u, le segment $(-r, 0)$ sur l'arc de courbe γ : $u = x \ln \frac{1}{-x}$, $v = -\frac{x}{\pi}$, et la demi-circonférence $|z| = r$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, sur un arc de courbe de forme voisine d'une demi-circonférence (fig. 79). D'après le principe de la correspondance des frontières, pour les petits r, la fonction (3) transforme d'une manière univalente et conforme ce demi-cercle sur le domaine D représenté sur la fig. 79.

Le raccordement de l'arc de courbe γ au segment $\left(0, r \ln \frac{1}{r}\right)$ au point $w = 0$ s'effectue d'une manière lisse, donc $\alpha = 1$. Néanmoins, le terme principal du développement est « altéré » par le fac-

teur $\ln \frac{1}{z}$. On observe un phénomène analogue pour la fonction

$$w = \frac{z}{\ln \frac{1}{z}}, \qquad w(0) = 0. \tag{4}$$

Passons à la transformation des polygones. Soit donné dans le plan des w un polygone fermé $A_1A_2 \ldots A_n$ sans points multiples et ne contenant pas le point à l'infini (au numéro suivant nous nous libérerons de cette restriction).

D'après le théorème fondamental de Riemann (n° 28), il existe une fonction $w = f(z)$ qui réalise la transformation conforme du demi-plan supérieur des z sur l'intérieur Δ de ce polygone. Donnons-nous la correspondance entre trois points de l'axe réel (p. ex. a_1, a_2 et a_3) et trois points de la frontière de Δ (p. ex. les sommets A_1, A_2, A_3); d'après le théorème 2 du n° 35 la fonction $f(z)$ est définie d'une manière unique. Supposons d'abord que cette fonction soit connue. En particulier, les points $a_4, \ldots, a_n$ (*) de l'axe des x qui ont pour images les sommets $A_4, \ldots, A_n$ du polygone sont connus. Nous devons trouver l'expression analytique de cette fonction.

Etant donné que dans tout tronçon (a_k, a_{k+1}) de l'axe réel la fonction $w = f(z)$ prend des valeurs appartenant au segment de droite A_kA_{k+1}, d'après le principe de symétrie, cette fonction est prolongeable analytiquement à travers ce segment de droite dans le demi-plan inférieur. Le prolongement analytique de cette fonction réalise la représentation conforme du demi-plan inférieur sur le polygone Δ' symétrique du polygone Δ par rapport au segment de droite A_kA_{k+1}. Ce prolongement analytique peut de nouveau être prolongé à travers tout segment $(a_{k'}, a_{k'+1})$ dans le demi-plan supérieur des z, de plus le nouveau prolongement analytique réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur des z sur le polygone Δ'' symétrique du polygone Δ' par rapport au segment de droite $A_{k'}A_{k'+1}$.

Supposons que nous ayons réalisé tous les prolongements analytiques possibles du type décrit ci-dessus. On obtient en général une fonction analytique à une infinité de déterminations $w = F(z)$ pour laquelle la fonction de départ $f(z)$ est une des branches uniformes dans le demi-plan supérieur.

Soient $w = f_*(z)$ et $w = f_{**}(z)$ deux branches arbitraires de la fonction $F(z)$ dans le demi-plan supérieur. D'après notre construction, ces branches réalisent la représentation conforme du demi-plan supérieur sur les deux polygones Δ^* et Δ^{**} qui diffèrent l'un de l'autre par un nombre pair de symétries par rapport aux côtés. Mais comme tout couple de symétries par rapport à deux droites quelconques se ramène à une translation et à une rotation, partout

(*) On suppose pour le moment que $a_k \neq \infty$ $(k = 4, \ldots, n)$.

dans le demi-plan supérieur on a $f_{**}(z) = e^{i\alpha} f_*(z) + a$, où a et α sont des constantes. La même chose est vraie pour toute branche de la fonction $F(z)$ dans le demi-plan inférieur.

La fonction

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{d}{dz} \ln f'(z)$$

est analytique dans le demi-plan supérieur puisque $f'(z)$, en tant que dérivée de la fonction qui réalise la représentation conforme, ne s'annule pas. En vertu de la remarque précédente sur les branches de la fonction $F(z)$ (nous avons : $f'_{**}(z) = e^{i\alpha} f'_*(z)$, $f''_{**}(z) = e^{i\alpha} f''_*(z)$ et, par conséquent, $\frac{f''_{**}(z)}{f'_{**}(z)} = \frac{f''_*(z)}{f'_*(z)}$) cette fonction $g(z)$ est uniforme pour tous les prolongements analytiques possibles de $f(z)$.

Ainsi, nous pouvons dire que $g(z)$ est une fonction uniforme, analytique partout dans le plan fermé des z, excepté aux points $z = a_k$ qui correspondent aux sommets du polygone. L'analyticité de $g(z)$ à l'infini découle de ce que $z = \infty$ correspond à un point d'un côté du polygone et non à l'un de ses sommets.

Pour étudier le caractère de la fonction $g(z)$ au voisinage du point $z = a_k$, considérons une branche quelconque $f(z)$ et utilisons la formule (2). Nous avons

$$f(z) = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k} \{c_0 + c_1 (z - a_k) + \ldots\},$$

d'où on déduit facilement le développement en série de Laurent de $g(z)$ au voisinage du point $z = a_k$:

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1)\,\alpha_k\, c_0 (z - a_k)^{\alpha_k - 2} + \ldots}{\alpha_k c_0 (z - a_k)^{\alpha_k - 1} + \ldots} =$$

$$= \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + c'_0 + c'_1 (z - a_k) + \ldots$$

On voit de ce développement que le point $z = a_k$ est pour $g(z)$ un pôle du premier ordre de résidu $\alpha_k - 1$.

Ainsi, dans le plan fermé, la fonction $g(z)$ n'a que n points singuliers. Retranchant de $g(z)$ la somme des parties principales de son développement au voisinage de ces points nous obtenons la fonction

$$G(z) = g(z) - \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} - \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} - \ldots - \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n},$$

qui est régulière dans le plan fermé, donc constante (cf. l'énoncé du théorème de Cauchy-Liouville du n° 24). Puisque $f(z)$ est régulière au point $z = \infty$, dans le voisinage de ce point

$$f(z) = d_0 + \frac{d_{-p}}{z^p} + \frac{d_{-p+1}}{z^{p+1}} + \ldots$$

et

$$g(z)=\frac{p(p+1)\frac{d_{-p}}{z^{p+2}}+\dots}{-\frac{pd_{-p}}{z^{p+1}}+\dots}=-\frac{p+1}{z}+\frac{d'_{-2}}{z^2}+\dots$$

Par conséquent, $g(\infty)$ et, par suite, $G(\infty)$ sont nulles. Donc

$$g(z)=\frac{d}{dz}\ln f'(z)=\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}+\frac{\alpha_2-1}{z-a_2}+\dots+\frac{\alpha_n-1}{z-a_n}. \qquad (5)$$

Intégrant l'expression (5) suivant un chemin quelconque appartenant au demi-plan supérieur puis se débarrassant de logarithmes, nous trouvons:

$$f'(z)=C(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(z-a_n)^{\alpha_n-1}. \qquad (6)$$

Intégrant une seconde fois, nous trouvons l'expression cherchée de $f(z)$. Ainsi, nous avons démontré le théorème:

Théorème 1. (H. Schwarz, E. Christoffel (*) 1867-1869). *Si une fonction* $w=f(z)$ *réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur* $\operatorname{Im} z>0$ *sur l'intérieur d'un polygone borné* Δ *d'angles* $\alpha_k\pi$ $(0<\alpha_k\leqslant 2,\ k=1,2,\dots,n)$ *aux sommets, de plus si on connaît les points* a_k *de l'axe réel* $(-\infty<a_1<a_2<\dots<a_n<\infty)$ *qui correspondent aux sommets de ce polygone, alors la fonction* $f(z)$ *est donnée par l'intégrale*

$$f(z)=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\,dz+C_1, \qquad (7)$$

où z_0, C *et* C_1 *sont des constantes.*

L'intégrale de Schwarz-Christoffel a été obtenue avec la condition que les points a_k, qui correspondent aux sommets du polygone, sont connus. Cependant, dans les problèmes de représentations conformes, on ne se donne que les sommets A_k du polygone et les points a_k restent inconnus. D'après ce qui a été dit (n° 29), trois d'entre eux (par exemple a_1, a_2 et a_3) peuvent être donnés arbitrairement tandis que les autres points et les constantes C et C_1 doivent être déterminés par les conditions du problème (**). Cette circonstance est la difficulté principale dans les applications pratiques de l'intégrale de Schwarz-Christoffel.

Les procédés de détermination des constantes a_k, C et C_1 seront indiqués plus loin. La possibilité de principe de les déterminer découle en substance de la démonstration du théorème 1 que l'on vient de donner. En effet, supposons que le polygone Δ soit donné. D'après

(*) Elwin Christoffel (1829-1900).

(**) La constante z_0 peut être fixée une fois pour toutes, par exemple en posant $z_0=0$. C'est pourquoi, dans la suite, nous ne la considérerons pas comme un paramètre inconnu dans la formule (7).

le théorème fondamental, nous pouvons affirmer qu'il existe une seule représentation conforme $w = f(z)$ du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le polygone Δ qui fait correspondre à trois points donnés a_1, a_2 et a_3 de l'axe réel trois sommets de Δ, par exemple, A_1, A_2 et A_3. D'après ce qui vient d'être démontré plus haut, la formule (7) est valable pour cette fonction si l'on choisit convenablement les constantes $a_4, \ldots, a_n$, C et C_1. Ainsi, pour les trois a_k donnés, les autres constantes sont déterminées et de plus d'une manière unique. Remarquons encore que, d'après la formule (6), sur l'axe réel du plan des z, lorsque $z = x > a_n$, nous avons $\arg (x - a_k)^{\alpha_k - 1} = 0$ et, par conséquent, $\arg f'(x) = \arg C$, et comme le segment (a_n, a_1) (qui contient $z = \infty$) a pour image le segment de droite $A_n A_1$ par la transformation $w = f(z)$, $\arg C$ est égal à l'angle θ que ce segment de droite fait avec l'axe des u (sur la fig. 80, $\alpha = \theta - \pi$). La constante C_1 se détermine par la donnée de la position d'un des sommets. Pour déterminer les constantes a_k et C on peut utiliser les longueurs connues des côtés du polygone

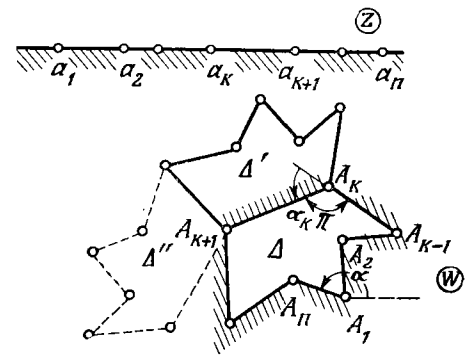

FIG. 80

$$A_k A_{k+1} = \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f'(x)|\, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{8}$$

bien que cette méthode ne soit pas toujours applicable en pratique, et on a fréquemment recours aux méthodes approchées pour déterminer les constantes a_k et C; le lecteur pourra faire connaissance avec celles-ci dans le livre de *P. Filtchakov* [10], les articles de *G. Polojy* [12] et de *N. Sténine* [8].

38. Remarques complémentaires. Considérons plusieurs cas que nous n'avons pas étudiés au numéro précédent.

1) L'un des sommets du polygone est l'image du point à l'infini. Soit par exemple $a_n = \infty$. Pour ramener ce cas au cas considéré, réalisons la transformation linéaire $\zeta = -\frac{1}{z} + a'_n$ du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le demi-plan $\operatorname{Im} \zeta > 0$, qui fait correspondre les points $a_1, a_2, \ldots, a_n = \infty$ aux points $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, tous

à distance finie (*). Appliquant la formule (7) du n° 37 nous avons:

$$w = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - a_1')^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2')^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_n')^{\alpha_n - 1} d\zeta + C_1 =$$

$$= C' \int_{z_0}^{z} \left(a_n' - a_1' - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(a_n' - a_2' - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_2 - 1} \dots$$

$$\dots \left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_n - 1} \frac{dz}{z^2} + C_1.$$

Réduisons chaque parenthèse au même dénominateur et sortons de chaque parenthèse le facteur $a_n' - a_k' (k = 1, 2, \dots, n-1)$; nous avons

$$w = C \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} \times$$

$$\times \frac{dz}{z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n + 2}} + C_1,$$

où $a_k = \dfrac{1}{a_n' - a_k'}$ sont des constantes réelles et C une constante complexe (qui contient tous les termes mis en facteur). D'après une proposition de géométrie élémentaire sur la somme des angles d'un polygone à n côtés:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2, \tag{1}$$

nous trouvons

$$w = C \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + C_1. \tag{2}$$

Ainsi, *si l'un des sommets du polygone* Δ *correspond au point à l'infini, alors le facteur associé à ce sommet disparaît dans la formule de Schwarz-Christoffel.*

Cette circonstance est utilisée en pratique pour simplifier l'intégrale de Schwarz-Christoffel (cf. n° 39 et les suivants).

2) Un ou plusieurs sommets du polygone coïncident avec le point à l'infini. Supposons que le sommet A_k du polygone Δ coïncide avec le point à l'infini. Prenons sur les droites $A_{k-1}A_k$ et A_kA_{k+1} des points arbitraires A_k' et A_k'' et joignons-les par un segment de droite. Considérons le polygone Δ' de $n + 1$ côtés (fig. 81). D'après ce qui précède, la fonction qui

(*) Si l'un des points $a_k = 0$, alors on prend $\zeta = \dfrac{-1}{z - a} + a_n'$, où a diffère de tous les a_k.

transforme le demi-plan sur le polygone Δ' est donnée par la formule

$$w = C \int_{z_0}^{z} (z-a_1)^{\alpha_1-1} \dots (z-a'_k)^{\alpha'_k-1} (z-a''_k)^{\alpha''_k-1} \dots$$

$$\dots (z-a_n)^{\alpha_n-1}\, dz + C_1, \quad (3)$$

où α'_k et α''_k sont des nombres indiquant respectivement combien de fois π est contenu dans les angles aux sommets A'_k et A''_k, a'_k et a''_k les points de l'axe des x correspondant à ces sommets.

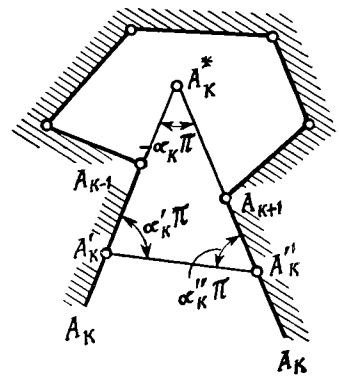

FIG. 81

Supposons que le segment de droite $A'_kA''_k$ s'éloigne à l'infini tout en restant parallèle à lui-même; les points a'_k et a''_k se réduisent au même point a_k correspondant au sommet A_k, et à la limite les termes en a'_k et a''_k de la formule (3) deviennent $(z-a_k)^{\alpha'_k+\alpha''_k-2}$. Désignons par $\alpha_k\pi$ l'angle, *pris avec le signe moins*, de l'intersection en un point à distance finie A^*_k des demi-droites $A_{k-1}A_k$ et $A_{k+1}A_k$. Le triangle $A'_kA''_kA^*_k$ donne: $\alpha'_k + \alpha''_k - \alpha_k = 1$, c'est-à-dire $\alpha'_k + \alpha''_k - 2 = \alpha_k - 1$, et la formule (3) prend la forme ordinaire

$$w = C \int_{z_0}^{z} (z-a_1)^{\alpha_1-1} \dots (z-a_k)^{\alpha_k-1} \dots (z-a_n)^{\alpha_n-1}\, dz + C_1. \quad (4)$$

Ce raisonnement est également valable dans le cas où l'infini coïncide avec plusieurs sommets du polygone.

Ainsi, la *formule de Schwarz-Christoffel reste valable aussi pour les polygones dont un ou plusieurs sommets coïncident avec le point à l'infini si l'angle de deux droites de sommet à l'infini est défini comme l'angle, précédé du signe moins, de leur intersection à distance finie* (cf. n° 31).

La relation (1) pour la somme des angles d'un polygone reste en vigueur dans le cas de notre définition de l'angle au point à l'infini. En effet, pour un polygone Δ' de $n+1$ côtés dont tous les sommets se trouvent à distance finie, d'après la formule (1) nous avons: $\sum' + \alpha'_k + \alpha''_k = n - 1$, où $\sum'$ désigne la somme de tous les angles de Δ', excepté l'angle correspondant au sommet $A_k = \infty$ (nous conservons les notations adoptées ci-dessus). Remplaçant $\alpha'_k + \alpha''_k = \alpha_k + 1$, nous obtenons ainsi la relation (1) pour le polygone Δ.

3) Transformation de l'extérieur d'un polygone. Ce cas se distingue du cas étudié au n° 37. En effet, certain point a à distance finie (*) du demi-plan supérieur qui correspond au point à l'infini du polygone est un pôle du premier ordre (l'existence d'un pôle d'ordre supérieur est incompatible avec l'univalence) de la fonction $f(z)$. De la même manière qu'au numéro 37, on démontre que la fonction $g(z)$ possède un pôle du premier ordre de résidu -2 en ce point. La même chose a lieu pour le point $\bar{a}$ du demi-plan inférieur car $\bar{a}$ est un pôle du premier ordre pour le prolongement analytique de la fonction $f(z)$. Ainsi, pour la fonction $g(z)$ nous avons le développement

$$g(z)=\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}+\frac{\alpha_2-1}{z-a_2}+\ldots+\frac{\alpha_n-1}{z-a_n}-\frac{2}{z-a}-\frac{2}{z-\bar{a}}.$$

Nous en déduisons la formule suivante pour la fonction qui réalise la *représentation conforme du demi-plan supérieur sur l'extérieur d'un polygone*

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{(z-a)^2(z-\bar{a})^2}+C_1. \qquad (5)$$

Ici α_k sont des nombres indiquant combien de fois π est contenu dans les angles *extérieurs* du polygone, a_k les points de l'axe réel qui correspondent aux sommets, a un point du demi-plan supérieur correspondant au point à l'infini du polygone, z_0, C et C_1 des constantes.

4) Transformation de l'intérieur (resp. extérieur) du cercle unité sur l'intérieur (resp. extérieur) d'un polygone. Cette transformation est réalisée par la fonction

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_1. \qquad (6)$$

Ici α_k sont des nombres indiquant combien de fois π est contenu dans les angles intérieurs (resp. extérieurs) du polygone, a_k, $|a_k|=1$ les points de la circonférence unité qui correspondent aux sommets, C et C_1 des constantes. Pendant la transformation de l'extérieur du cercle sur l'extérieur du polygone, on suppose de plus que les points à l'infini dans les plans des z et des w se correspondent.

Pour la transformation de *l'intérieur du cercle unité sur l'extérieur du polygone* on a la formule

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{z^2}+C_1, \qquad (7)$$

(*) Si le point à l'infini du polygone correspond au point à l'infini du plan des z, alors ce point est un point frontière du polygone et nous retrouvons le cas déjà étudié dans 2).

où les notations sont les mêmes que celles de la formule (6) et on suppose que le point à l'infini du polygone correspond au centre du cercle.

Les formules (6) et (7) se ramènent aux précédentes à l'aide d'une transformation homographique complémentaire du plan des z, comme nous l'avons fait au début du n° 38 pour établir la formule (2).

5) Problème inverse. Supposons maintenant que l'on se donne des ensembles de nombres réels a_k et α_k vérifiant les conditions $-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \infty$, $-2 \leqslant \alpha_k \leqslant 2$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$ et des nombres complexes arbitraires C et C_1. Construisons l'intégrale de Schwarz-Christoffel

$$w = C \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \, dz + C_1. \qquad (8)$$

Dans ces conditions, il s'avère que l'*intégrale de Schwarz-Christoffel définit une fonction qui réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur sur un polygone* (*) *d'angles* $\alpha_k \pi$ *aux sommets.*

En effet, l'argument de la dérivée de la fonction (8)

$$\arg \frac{dw}{dz} = \arg C + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) \arg (z - a_k) \qquad (9)$$

conserve une valeur constante sur tout segment (a_k, a_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, de l'axe réel (**), et la dérivée $\frac{dw}{dz}$ ne s'annule pas à l'intérieur d'un tel segment. Par conséquent, la fonction (8) transforme d'une manière biunivoque le segment (a_k, a_{k+1}) sur un certain segment de droite $A_k A_{k+1}$. La même chose est vraie pour le segment (a_n, a_1) de l'axe réel, qui contient le point $z = \infty$. En effet, premièrement, en vertu de la condition $\sum \alpha_k = n - 2$ les segments (a_n, ∞) et $(-\infty, a_1)$ subissent des rotations d'angles égaux et, deuxièmement, l'intégrale (8) converge au point $z = \infty$ (***); par conséquent, lorsque $z \to \pm\infty$, la fonction w tend vers la même limite.

(*) Ce polygone n'est pas obligatoirement fermé.

(**) Nous prenons $\arg (x - a_k)$ égal à zéro ou à π selon que $x > a_k$ ou $x < a_k$, par conséquent, sur chaque segment (a_k, a_{k+1}) tous les termes de la somme (9) sont constants.

(***) La première affirmation découle de ce que $\arg \frac{dw}{dz}$ sur le segment (a_n, ∞) est égal à $\arg C$ et sur le segment $(-\infty, a_1)$ à $\arg C + (\Sigma \alpha_k - n)\pi = \arg C - 2\pi$, et la deuxième de ce que le terme principal de la fonction à intégrer au voisinage du point $z = \infty$ est de la forme $z^{\Sigma \alpha_k - n} = z^{-2}$.

Ainsi, la fonction (8) réalise une correspondance entre l'axe réel et le contour d'un certain polygone $A_1A_2 \ldots A_n$. Remarquons que certains des sommets de ce polygone peuvent coïncider avec le point à l'infini : ce sera le cas des sommets A_k pour lesquels $\alpha_k \leqslant 0$ (en effet, lorsqu'on approche des points correspondants a_k, la fonction $w \to \infty$, car l'intégrale (8) diverge puisque l'ordre de l'infini de la fonction à intégrer est $\geqslant 1$). Mais dans ce cas aussi, nous appliquons le principe de la correspondance des frontières et on peut affirmer que la fonction (7) réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur des z sur l'intérieur du polygone $A_1A_2 \ldots A_n$. L'angle au sommet A_k de ce polygone est égal à $\alpha_k\pi$ car, comme on le voit de (9), lorsqu'on passe par chaque point a_k dans le sens qui va de gauche à droite, $\arg \frac{dw}{dz}$ varie de $-\pi(\alpha_k - 1) = \pi - \alpha_k\pi$, par conséquent, le segment de droite correspondant $A_{k-1}A_k$ subit une rotation d'angle $\pi - \alpha_k\pi$ dans le sens positif. Notre proposition est donc démontrée.

La proposition reste aussi en vigueur dans le cas où la condition $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$ n'est pas satisfaite. Dans ce cas, un terme supplémentaire surgit : le $(n+1)$-ième sommet du polygone, qui correspond au point $z = \infty$. Le lecteur vérifiera que ce sommet se trouve à distance finie si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < n-2$, et coïncide avec le point à l'infini si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k > n - 2$.

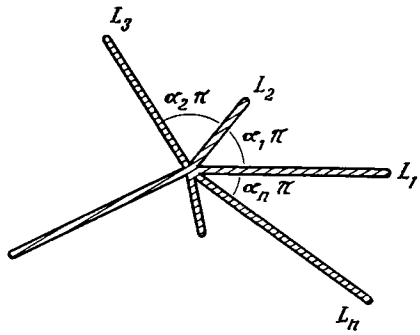

FIG. 82

6) Transformation de l'extérieur d'une «étoile». Pour terminer, suivant le procédé de *L. Lakhtine*, nous donnons la formule générale de la transformation de l'extérieur du cercle $|z| > 1$ sur l'extérieur d'une « étoile » formée de n segments de droite L_k issus de l'origine des coordonnées (fig. 82).

Nous désignons par $\alpha_k\pi$ l'angle formé par L_k et L_{k+1}, par a_k et b_k ($k = 1, 2, \ldots, n$; $L_{n+1} = L_1$) les points des circonférences qui correspondent respectivement au sommet de cet angle et à l'extrémité de L_k.

Considérons d'abord la transformation du demi-plan supérieur des ζ sur le domaine donné. Soient a'_k et b'_k les points de l'axe réel du plan des ζ qui correspondent aux sommets des angles L_kL_{k+1} et aux extrémités des segments de droite L_k, a_0 le point du demi-plan supérieur qui correspond à $w = \infty$. La fonction $w = f(\zeta)$ réalisant la transformation est évidemment, au voisinage du point $\zeta = a'_k$, de la forme

$$f(\zeta) = (\zeta - a'_k)^{\alpha_k} \varphi_k(\zeta), \quad \varphi_k(a'_k) \neq 0,$$

et au voisinage de $\zeta = b_k'$

$$f(\zeta) = c_k + (\zeta - b_k')^2 \psi_k(\zeta), \quad c_k \neq 0, \quad \psi_k(b_k') \neq 0,$$

où $\varphi_k(\zeta)$ et $\psi_k(\zeta)$ sont des fonctions régulières dans les voisinages mentionnés. Enfin, elle doit avoir des pôles du premier ordre aux points a et $\bar{a}$ et être régulière en tous les autres points du plan des ζ. Comme précédemment, nous en concluons que la dérivée logarithmique de la fonction qui réalise la transformation doit avoir des pôles du premier ordre de résidus α_k aux points $\zeta = a_k'$, des pôles du premier ordre de résidus -1 aux points $\zeta = a$ et $\zeta = \bar{a}$ et être régulière aux points $\zeta = b_k'$ et aux autres points du plan des ζ. Ainsi

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\zeta - a_k'} - \frac{1}{\zeta - a} - \frac{1}{\zeta - \bar{a}}$$

et, par conséquent, après avoir intégré et fait disparaître les logarithmes nous trouvons

$$f(\zeta) = C' \frac{\prod_{k=1}^{n} (\zeta - a_k')^{\alpha_k}}{(\zeta - a)(\zeta - \bar{a})},$$

où C' est une constante.

Faisant la transformation complémentaire $z = \dfrac{\zeta - \bar{a}}{\zeta - a}$ du demi-plan supérieur sur l'extérieur du cercle unité $|z| > 1$ nous trouvons la transformation cherchée sous la forme

$$w = C \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k}, \tag{10}$$

où C et a_k ($|a_k| = 1$) sont des constantes (*).

De même que la formule de Lakhtine (10) il est commode d'utiliser la formule ordinaire de la transformation de l'extérieur du cercle sur l'extérieur d'un polygone, qui, dans notre cas, est de forme

$$w = C_1 \int \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} (z - b_k) \frac{dz}{z^2}. \tag{11}$$

On évite des intégrations laborieuses en considérant simultanément les formules (10) et (11).

Considérons le cas particulier $n = 2$ lorsque le polygone est l'extérieur de deux segments qui se coupent à l'origine des coordonnées sous l'angle $\alpha_1 = \alpha$. Nous avons $\alpha_2 = 2 - \alpha$, et les formules (10) et (11) prennent respectivement la forme:

$$w = \frac{C}{z} (z - a_1)^{\alpha} (z - a_2)^{2-\alpha} \tag{12}$$

(*) Nous avons $\zeta = \dfrac{az - \bar{a}}{z - 1}$, $\zeta - a_k' = a_k'' \dfrac{z - a_k}{z - 1}$ (a_k'' sont des constantes), $\zeta - a = \dfrac{a - \bar{a}}{z - 1}$, $\zeta - \bar{a} = \dfrac{(a - \bar{a})z}{z - 1}$ et de plus $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

et

$$w = C_1 \int \left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\alpha-1} (z-b_1)(z-b_2)\frac{dz}{z^2}. \tag{13}$$

En égalant les dérivées et après de simples transformations nous avons:

$$\frac{C_1}{C}(z-b_1)(z-b_2) = z^2 - (\alpha-1)(a_2-a_1)z - a_1a_2,$$

d'où, pour déterminer les constantes b_1 et b_2, nous aboutissons à l'équation

$$z^2 - (\alpha-1)(a_2-a_1)z - a_1a_2 = 0.$$

On peut prendre par exemple $b_1 = 1$; alors $(\alpha-1)(a_2-a_1) = 1 - a_1a_2$ et $b_2 = -a_1a_2$. La formule (12) contient quatre paramètres réels ($C = C_1 + iC_2$, $a_1 = e^{i\varphi_1}$, $a_2 = e^{i\varphi_2}$); en les choisissant convenablement on peut faire se correspondre les points b_1, b_2 et les extrémités des segments de droite L_1 et L_2.

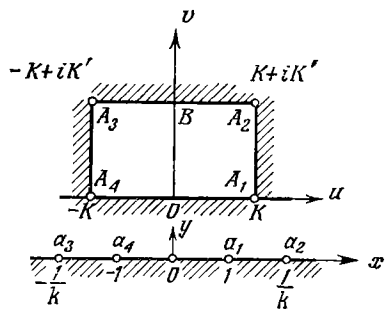

FIG. 83

Au numéro suivant, nous donnons plusieurs exemples d'application de la formule de Schwarz-Christoffel à la représentation des polygones.

39. Exemples. 1) Transformation du demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ sur le rectangle $A_1A_2A_3A_4$ (fig. 83). Considérons d'abord la transformation du premier quadrant du plan des z sur la moitié de droite OA_1A_2B du rectangle donné avec correspondance des points $O \longleftrightarrow 0$, $A_1 \longleftrightarrow 1$, $B \longleftrightarrow \infty$. Désignons par $\frac{1}{k}$, où $0 < k < 1$, l'image réciproque du point A_2. La transformation cherchée peut être considérée comme le prolongement de cette transformation selon le principe de symétrie à travers le demi-axe positif des y, donc on peut considérer que $A_3 \longleftrightarrow -\frac{1}{k}$. Ainsi, la transformation cherchée s'écrit sous la forme

$$w = C' \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\left(z^2-\frac{1}{k^2}\right)}} + C_1 = C \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

(la constante $C_1 = 0$ en vertu de la correspondance des points $O \longleftrightarrow 0$). Pour déterminer les constantes C et k utilisons la correspondance des points $A_1 \longleftrightarrow 1$:

$$K = C \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{1}$$

ainsi que celle des points $A_2 \longleftrightarrow \frac{1}{k}$:

$$K + iK' = C \int_0^1 + C \int_1^{\frac{1}{k}} = K + iC \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

(nous avons mis l'intégrale de 0 à $\frac{1}{k}$ sous la forme de la somme de deux intégrales respectivement de 0 à 1 et de 1 à $\frac{1}{k}$ et nous avons utilisé l'égalité (1)). D'où

$$K' = C \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \qquad (2)$$

Nous supposons que la constante k ($0 < k < 1$) est donnée et que les dimensions K et K' du rectangle sont choisies de manière que la constante C, dans les formules (1) et (2), soit égale à 1 :

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \quad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \qquad (3)$$

Alors la transformation du demi-plan sur le rectangle est réalisée par la fonction

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \qquad (4)$$

L'intégrale (4) ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires ; c'est une *intégrale elliptique* et sa fonction inverse (c'est-à-dire la fonction qui réalise la transformation du rectangle sur le demi-plan) est une *fonction elliptique de Jacobi* que l'on note comme suit :

$$z = \operatorname{sn} w = \operatorname{sn}(w, k) \qquad (5)$$

(on doit lire « s n w » ou « s n w, k ») et qui s'appelle *sinus elliptique*. Nous l'étudierons en détail dans le dernier chapitre du livre (cf. n° 102) ; on y considérera également la solution du problème de la représentation d'un rectangle quelconque (dont les dimensions ne seront pas fixées comme ici) sur un demi-plan.

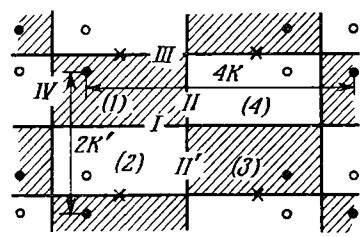

FIG. 84

Nous ne donnerons ici qu'une propriété fort intéressante de la fonction sn z (*) : elle est une fonction méromorphe possédant deux périodes dont le rapport est purement imaginaire.

Pour démontrer cette proposition, nous notons (*1*) notre rectangle et ses côtés *I*, *II*, *III*, *IV* comme cela est indiqué sur la fig. 84. La fonction $w = \operatorname{sn} z$ est initialement définie dans le rectangle (*1*) ; à l'aide du principe de symétrie nous la prolongeons, par exemple, à travers le côté *I* dans le rectangle (*2*). Ce prolongement réalise la représentation de (*2*) sur le demi-plan inférieur. Prolongeant ensuite cette transformation à travers le côté *II'* du rectangle (*2*) nous trouvons que $w = \operatorname{sn} z$ réalise la représentation du rectangle (*3*) de nouveau sur le demi-plan supérieur, etc. (les rectangles hachurés de la fig. 84 sont transformés sur le demi-plan supérieur et les rectangles non hachurés sur le demi-plan inférieur).

(*) Nous avons changé la notation des variables.

Ainsi, nous prolongeons la fonction $w = \operatorname{sn} z$ dans tout le plan des z. De plus, il s'avère que cette fonction est uniforme, car si, en décrivant une courbe fermée quelconque, nous retombons par exemple dans le rectangle (*I*), alors les nouvelles valeurs de sn z coïncideront avec les anciennes (elles transforment (*I*) sur un demi-plan avec les mêmes conditions que précédemment). Cette fonction est régulière dans les rectangles et sur les frontières partout, excepté au point iK' et en tous les points qui lui correspondent par les prolongements (ils sont indiqués sur la fig. 84 par une croix) en lesquels elle possède des pôles puisque par la transformation conforme ces points ont pour image $w = \infty$. Ainsi sn z est une fonction méromorphe.

Nous avons noté, sur la fig. 84, par des cercles noirs un point arbitraire z du rectangle (*I*) et tous les points que l'on obtient à partir de celui-là par un nombre pair de prolongements (*). En tous ces points, qui sont de la forme $z + 4nK + 2n'K'i$, où n, $n' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la fonction sn prend les mêmes valeurs :

$$\operatorname{sn}(z + 4nK + 2n'K'i) = \operatorname{sn} z. \qquad (6)$$

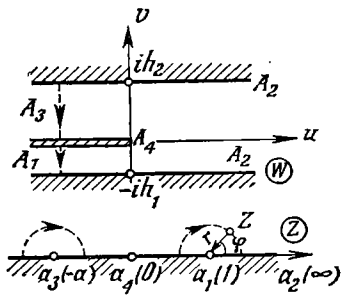

FIG. 85

Cette propriété signifie justement que sn z possède deux périodes $\tau = 4K$ et $\tau' = 2K'i$.

On déduit des prolongements considérés de sn z que cette fonction est impaire

$$\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z. \qquad (7)$$

2) La bande munie d'une coupure horizontale (fig. 85) représente un quadrilatère dont trois sommets A_1, A_2 et A_3 coïncident avec le point à l'infini et d'angles $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Nous supposons que $a_4 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = \infty$ et nous prenons aussi $z_0 = 0$ (alors la correspondance des points a_4 et A_4 nous permet de trouver immédiatement que $C_1 = 0$). Par conséquent, au point A_3 correspond un certain point $a_3 = -a$ du demi-axe négatif. L'intégrale de Schwarz-Christoffel prend alors la forme

$$w = C \int_0^z \frac{z\,dz}{(z-1)(z+a)} = C' \left\{ \ln(1-z) + a \ln\left(1 + \frac{z}{a}\right) \right\} \qquad (8)$$

(le facteur correspondant au point A_2 disparaît ; cf. 1) du numéro précédent). Pour déterminer les constantes C' et a nous avons recours à la considération suivante : quand le point z décrit autour du point $a_1 = 1$ une demi-circonférence c_r, de rayon r suffisamment petit (c'est-à-dire quand le vecteur $1 - z = re^{i\varphi}$ tourne de manière que son argument varie de 0 à $-\pi$), le point correspondant w doit passer du rayon A_4A_1 au rayon A_1A_2 et l'accroissement de w doit peu différer de $-ih_1$:

$$\Delta w = -ih_1 + O(r),$$

où $O(r)$ est un infiniment petit lorsque $r \to 0$. Cette considération est justifiée par le fait que l'image de la demi-circonférence c_r, pour les petits r, diffère peu du segment de droite réunissant les rayons A_4A_1 et A_1A_2 et qui leur est perpendiculaire.

(*) Nous désignons par les cercles blancs les points en lesquels la fonction prend les valeurs $\overline{\operatorname{sn} z}$.

D'autre part, pour un petit accroissement Δz, l'accroissement du second terme entre accolades de la formule (8) est aussi petit, car ce terme est continu au point $z = 1$. L'accroissement du premier terme $\ln(1 - z) = \ln r + i\varphi$ est égal à $-i\pi$, donc

$$\Delta w = -C' i\pi + O(r).$$

Egalant les expressions obtenues pour Δw et passant à la limite lorsque $r \to 0$ nous trouvons

$$C' = \frac{h_1}{\pi}.$$

D'une manière analogue, lorsque z décrit autour du point $a_3 = -a$ la circonférence $z + a = re^{i\varphi}$ (φ varie de π à 0), l'accroissement $\Delta w = -C' ai\pi + O(r)$

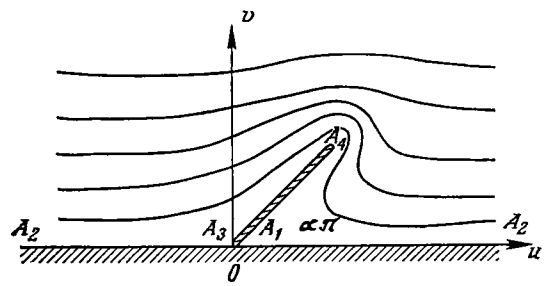

FIG. 86

doit peu différer de $-ih_2$; d'où

$$a = \frac{h_2}{h_1}.$$

La fonction qui réalise la représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur la bande munie d'une coupure (fig. 85) a donc la forme

$$w = \frac{h_1}{\pi} \ln(1 - z) + \frac{h_2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{h_1}{h_2} z\right). \tag{9}$$

Faisant la transformation complémentaire de ce domaine sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} \omega > 0$ coupé suivant un segment de droite incliné de longueur unité (fig. 86) :

$$\omega = e^{\frac{\pi}{H}(m + h_1 i)},$$

où $H = h_1 + h_2$, et utilisant la formule (9), nous trouvons la transformation du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur ce domaine :

$$\frac{H}{\pi} \ln w - h_1 i = \frac{h_1}{\pi} \ln(1 - z) + \frac{h_2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{h_1}{h_2} z\right)$$

(nous avons remplacé ω par w). Après de simples transformations nous avons

$$w = (z - 1)^{\frac{h_1}{H}} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} z\right)^{\frac{h_2}{H}}.$$

Le segment de droite suivant lequel le domaine est coupé fait l'angle $\pi\frac{h_1}{H}$ avec l'axe positif, que nous notons $\alpha\pi$ (fig. 86); introduisant le paramètre α, nous obtenons la transformation du demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} w > 0$ coupé suivant le segment $(0, e^{i\alpha\pi})$:

$$w=(z-1)^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{\alpha-1}z\right)^{1-\alpha}. \tag{10}$$

On a indiqué sur la fig. 86 les courbes qui correspondent par cette transformation aux droites $\operatorname{Im} z = \text{const}$.

Pour $\alpha=\frac{1}{2}$ nous retrouvons l'ancien résultat (cf. n° 33, exemple 2).

3) Le polygone de la fig. 87 est un quadrilatère dont deux sommets coïncident avec le point à l'infini. Ayant en vue l'application du principe de symétrie, nous nous limitons à la considération de sa moitié supérieure, c'est-à-dire au triangle $A_1A_2A_3$ d'angles $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha$, $\alpha_3 = 1 + \alpha$ ($\sum \alpha_k = 1$). Notons $a_1 = 0$, $a_2 = \infty$, $a_3 = -1$ les points de l'axe des x qui correspondent aux sommets; ayant en vue la correspondance des points a_3 et A_3 nous avons

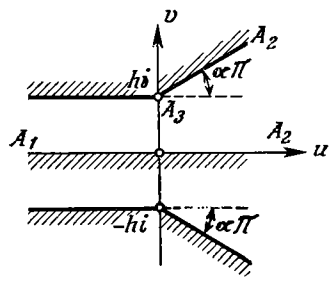

FIG. 87

$$w=C\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}\,dz+ih.$$

Pour déterminer la constante C, nous utilisons le fait que lorsque le point z décrit la demi-circonférence c_r: $z = re^{i\varphi}$ (φ varie de π à 0), la fonction définie par la dernière intégrale accuse l'accroissement

$$\Delta w=C\int_{C_r}\frac{dz}{z}+O(r)=-C\pi i+O(r)$$

(la fonction $(z+1)^{\alpha}$ sur la circonférence c_r diffère peu de l'unité: $(z+1)^{\alpha} = 1 + O(r)$). D'autre part, pour ce parcours, le point correspondant w passe du rayon A_1A_3 au rayon A_1A_2, donc Δw diffère peu de $-ih$. Ainsi, $C=\frac{h}{\pi}$, et la fonction qui réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur sur la moitié supérieure du polygone (fig. 87) a la forme

$$w=\frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}\,dz+ih. \tag{11}$$

Substituant ici e^z à z nous trouvons la transformation de la bande $0 < y < \pi$ sur la moitié supérieure du polygone:

$$w=\frac{h}{\pi}\left\{\int_{i\pi}^{z}(e^z+1)^{\alpha}\,dz+i\pi\right\}. \tag{12}$$

Puisque, conformément à notre choix des points qui se correspondent, le bord inférieur de la bande a pour image la ligne moyenne du polygone, d'après le principe de symétrie, cette même fonction (12) réalise la représentation conforme de la bande $-\pi < y < \pi$ sur le polygone.

Pour α rationnel l'intégrale (12) s'exprime par des fonctions élémentaires (elle se ramène à l'intégrale de la différentielle binôme). Pour $\alpha = 1$ nous retrouvons une transformation connue (cf. n° 30, exemple 5):

$$w = \frac{h}{\pi}\{e^z + z + 1\}. \tag{13}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ nous avons

$$w = \frac{2h}{\pi}\left\{\sqrt{e^z+1} + \ln\left(\sqrt{e^z+1}-1\right) - \frac{z}{2}\right\}. \tag{14}$$

4) Trouvons la représentation conforme de la bande $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ sur le plan coupé suivant deux rayons (fig. 88, $0 < \alpha < 1$). Le principe de

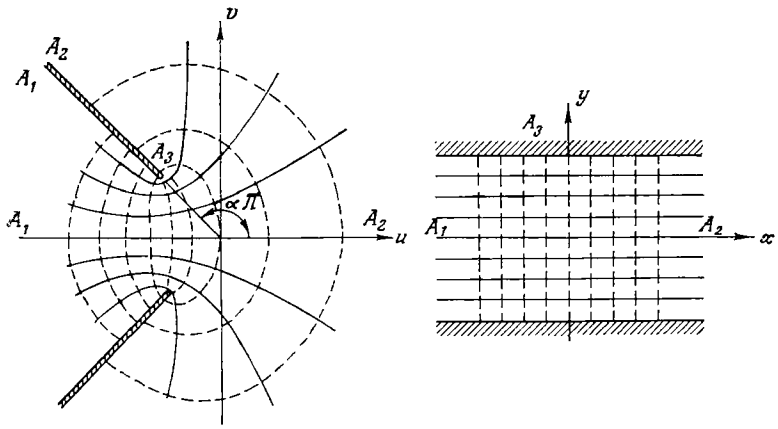

FIG. 88

symétrie est applicable: la moitié supérieure du domaine dans le plan des w est un triangle dont deux sommets coïncident avec le point à l'infini et d'angles $\alpha_1 = \alpha - 1$, $\alpha_2 = -\alpha$, $\alpha_3 = 2$. Pour pouvoir utiliser la formule de Schwarz-Christoffel, transformons la bande $0 < y < \pi$ sur un demi-plan: $\zeta = e^z$. Tenant compte de la correspondance des points indiquée sur la fig. 88, nous pouvons prendre $a_1 = 0$, $a_2 = -\infty$, alors le point a_3 appartient au demi-axe négatif et nous posons $a_3 = -a$, où a est un nombre positif indéterminé. La formule de Schwarz-Christoffel prend alors la forme:

$$w = C\int \zeta^{\alpha-2}(\zeta + a)\,d\zeta + C_1 = C\left(\frac{\zeta^\alpha}{\alpha} + \frac{a}{\alpha-1}\zeta^{\alpha-1}\right) + C_1; \tag{15}$$

ici C est une constante positive, car le rayon A_1A_2 ne tourne pas par la transformation, donc $\arg C = 0$ (cf. la remarque à la fin du n° 37), C_1 est réel. car la substitution dans (15) des valeurs positives de ζ doit donner des w réels (cf. fig. 88). Pour donner à la formule (15) une forme plus simple, posons

$\frac{1}{\alpha} = -\frac{a}{\alpha-1}$, c'est-à-dire $a = \frac{1-\alpha}{\alpha}$; nous avons

$$w = \frac{C}{\alpha}(\zeta^{\alpha} - \zeta^{\alpha-1}) + C_1. \tag{16}$$

La correspondance des points $\zeta = -a$ et $w = le^{i\alpha\pi}$ donne

$$\frac{C}{\alpha}(e^{i\alpha\pi}a^{\alpha} + e^{i\alpha\pi}a^{\alpha-1}) + C_1 = le^{i\alpha\pi},$$

d'où, tenant compte de ce que les constantes C et C_1 sont réelles, nous trouvons $C_1 = 0$ et $C = \frac{\alpha l}{a^{\alpha-1}(a+1)} = l\alpha^{1+\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}$. Faisant dans (16) $\zeta = e^z$ nous trouvons la transformation cherchée

$$w = l\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}(e^{\alpha z} - e^{(\alpha-1)z}). \tag{17}$$

On a aussi indiqué sur la fig. 88 la correspondance des courbes par cette transformation.

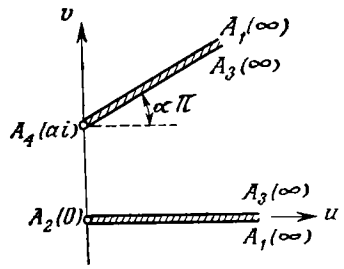

FIG. 89

5) Le polygone de la fig. 89 $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{3}{2}\right)$ est un quadrilatère dont deux sommets coïncident avec le point à l'infini et d'angles $\alpha_1 = \alpha - 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -\alpha$, $\alpha_4 = 2$. Posons $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$; alors a_4 appartient à l'axe négatif et nous pouvons prendre $a_4 = -b$. L'intégrale de Schwarz-Christoffel prend la forme

$$w = C\int_1^z z^{\alpha-3}(z-1)(z+b)\,dz =$$

$$= C\left[\frac{1}{\alpha}z^{\alpha} + \frac{b-1}{\alpha-1}z^{\alpha-1} - \frac{b}{\alpha-2}z^{\alpha-2} + \frac{\alpha(1+b)-2}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}\right] \tag{18}$$

($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$). Pour déterminer les constantes C et b nous utilisons: 1) le fait que le rayon A_2A_3 se transforme en demi-axe positif, donc $\arg C = 0$, c'est-à-dire que C est constante positive; 2) la correspondance des points $z = -b$ et $w = ai$. Après avoir fait la substitution $z = be^{i\pi}$ et $w = ai$ dans (18), séparons les parties réelles et imaginaires; nous trouvons deux équations:

$$b^{\alpha-1}\cos\pi\alpha = \frac{2-\alpha(1+b)}{2b-\alpha(1+b)}; \quad C = \frac{ab^{1-\alpha}}{\sin\pi\alpha}\,\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2b-\alpha(1+b)}, \tag{19}$$

qui permettent (au moins approximativement) de trouver les constantes inconnues.

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ nous obtenons $b = 3$, $C = \frac{3\sqrt{3}}{32}a$ et la fonction qui réalise la transformation prend la forme

$$w = \frac{3a}{16}\sqrt{3z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2. \tag{20}$$

Pour $\alpha = 1$, à la place de l'expression (18), nous trouvons

$$w = C\left\{z + \frac{b}{z} + (b-1)\ln z - 1 - b\right\}; \tag{21}$$

pour déterminer les constantes nous avons les équations

$$\ln b = 2\frac{b+1}{b-1}, \quad C = \frac{a}{\pi(b-1)}. \tag{22}$$

6) Le polygone de la fig. 90 est un pentagone. Considérons sa moitié de droite, le quadrilatère d'angles $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = \frac{3}{2}$ ($\sum \alpha_k = 2$). La représentation conforme du demi-plan supérieur des ζ sur ce quadrilatère, si l'on prend $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = a^2$, $a_4 = \infty$, est réalisée par la fonction

$$w = C\int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{\zeta - a^2}{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta - 1}.$$

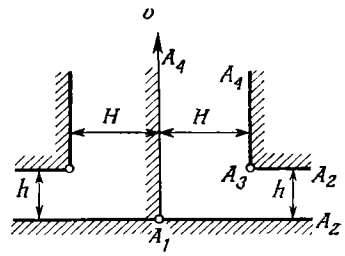

FIG. 90

Pour calculer les constantes a et C considérons l'accroissement de w lorsque z décrit les demi-circonférences C_R et c_r de centre $\zeta = 1$ et respectivement de rayons infiniment grand et infiniment petit. Au premier parcours correspond le passage du rayon A_1A_4 au rayon A_3A_4, donc $\Delta w = H + O\left(\frac{1}{R}\right)$; d'autre part, pour les grands $|\zeta|$ la racine de la fonction à intégrer est voisine de l'unité, donc $\Delta w = C\Delta\int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - 1} + O\left(\frac{1}{R}\right) = -i\pi C + O\left(\frac{1}{R}\right)$; comparant ces expressions, nous trouvons $C = \frac{Hi}{\pi}$. Au deuxième parcours correspond le passage du rayon A_1A_2 au rayon A_3A_2, donc $\Delta w = ih + O(r)$, et l'intégrale de Schwarz-Christoffel donne $\Delta w = C\sqrt{1 - a^2}\,(-i\pi) + O(r)$; la comparaison de ces deux expressions nous conduit à l'égalité $a^2 = \frac{H^2 + h^2}{H^2}$.

La substitution $\frac{\zeta - a^2}{\zeta} = \frac{1}{\omega^2}$ ramène notre intégrale à la forme

$$w = 2C\int_0^{\omega} \left\{\frac{a^2 - 1}{1 + (a^2 - 1)\omega^2} + \frac{1}{1 - \omega^2}\right\} d\omega,$$

après quoi l'intégrale se calcule facilement. Substituant les valeurs trouvées de a et de C et intégrant nous trouvons :

$$w = \frac{2i}{\pi}\left(h\,\mathrm{arctg}\,\frac{h}{H}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta - a^2}} + H\,\mathrm{arth}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta - a^2}}\right).$$

A la coupure auxiliaire suivant l'axe imaginaire dans le plan des w correspond la coupure suivant le demi-axe négatif dans le plan des ζ, donc, d'après le principe de symétrie, la fonction obtenue réalise la transformation du plan des ζ coupé suivant le demi-axe positif sur le pentagone donné.

Posant $\zeta = z^2$, nous trouvons la transformation du demi-plan supérieur des z sur le pentagone :

$$w = \frac{2i}{\pi}\left(h \operatorname{arctg} \frac{hz}{H\sqrt{z^2-a^2}} + H \operatorname{arth} \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\right). \tag{23}$$

7) Les angles du polygone de la fig. 91 sont $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_4 = \frac{3}{2}$. Soient $a_1 = -a$, $a_2 = -1$, $a_3 = -b$, $a_4 = 0$, $a_5 = \infty$ les

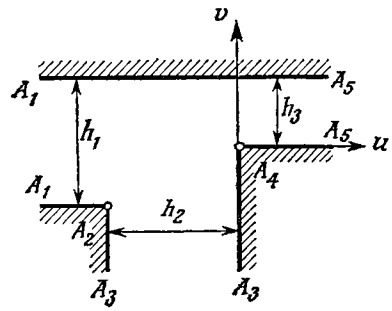

FIG. 91

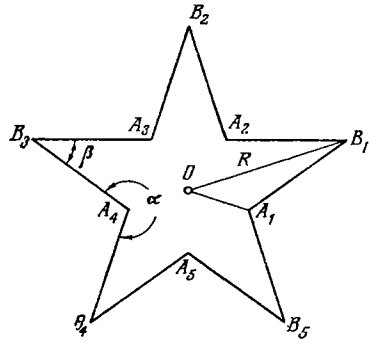

FIG. 92

points qui correspondent aux sommets, alors la fonction qui transforme le demi-plan supérieur sur ce polygone a la forme

$$w = C \int_0^z \frac{\sqrt{z(z+1)}}{(z+a)(z+b)}\, dz. \tag{24}$$

Intégrant suivant une demi-circonférence infiniment grande de centre à l'origine des coordonnées, nous trouvons $C(-i\pi) = -ih_3$, d'où $C = \frac{h_3}{\pi}$. Intégrant suivant des demi-circonférences infiniment petites de centres aux points $z = -a$ et $z = -b$, nous trouvons (*)

$$-C\frac{\sqrt{a(a-1)}}{-a+b}(-i\pi) = -h_1 i$$

et

$$C\frac{i\sqrt{b(1-b)}}{a-b}(-i\pi) = h_2,$$

d'où $\frac{\sqrt{a(a-1)}}{a-b} = \frac{h_1}{h_3}$, $\frac{\sqrt{b(1-b)}}{a-b} = \frac{h_2}{h_3}$. Les deux dernières équations permettent de trouver a et b ; l'intégrale (24) s'exprime par des fonctions élémentaires.

8) Pour terminer, donnons l'exemple de la transformation du cercle $|z| < 1$ sur l'intérieur d'un polygone, l'étoile à cinq branches représentée

(*) Il n'est pas difficile de vérifier qu'il faut prendre ici la valeur négative de la racine.

sur la fig. 92. Ce domaine est un décagone dont cinq angles sont égaux à $\alpha=\frac{7}{5}$ et cinq autres à $\beta=\frac{1}{5}$. Nous utilisons la formule (6) du n° 38. Pour trouver les points de la circonférence qui correspondent aux sommets de l'étoile considérons sa dixième partie, le triangle A_1B_1O (fig. 92). On peut transformer ce triangle sur le secteur $0<\arg z<\frac{\pi}{5}$, $|z|<1$, de manière que le point A_1 ait pour image 1 et B_1 $e^{i\frac{\pi}{5}}$. D'après le principe de symétrie, cette transformation se prolonge dans toute l'étoile, de plus les points A_k ont pour images $a_k=e^{i\frac{2\pi}{5}(k-1)}$ (la racine cinquième de l'unité) et B_k, $b_k=e^{i\frac{k\pi}{5}}$ (la racine cinquième de -1); $k=1, 2, \ldots, 5$. En vertu de l'unicité de la transformation on peut la trouver aussi à l'aide de la formule (6) du n° 38. qui prend donc la forme

$$w=C'\int_0^z \frac{\Pi(z-a_k)^{2/5}}{\Pi(z-b_k)^{4/5}}\,dz=C\int_0^z \frac{(1-z^5)^{2/5}}{(1+z^5)^{4/5}}\,dz \tag{25}$$

(nous utilisons les identités évidentes $\Pi(z-a_k)=z^5-1$, $\Pi(z-b_k)=z^5+1$, Π est le symbole du produit).

Nous prenons la constante C réelle, elle est déterminée par la dimension $OB_k=R$ de l'étoile: puisque le point $z=-1$ a pour image le sommet de l'étoile et $z=0$ le centre, alors

$$R=C\int_{-1}^{0}\frac{(1-x^5)^{2/5}}{(1+x^5)^{4/5}}\,dx;$$

après substitution $t=\left(\frac{1+x^5}{1-x^5}\right)^2$ cette intégrale se transforme en une intégrale qui s'exprime par la fonction gamma d'Euler:

$$\frac{1}{5\cdot 2^{2/5}}\int_0^1 t^{-9/10}(1-t)^{-4/5}\,dt=\frac{1}{5\cdot 2^{2/5}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{10}\right)\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{10}\right)}$$

(cf. n° 90). Ainsi

$$C=\frac{5\sqrt[5]{4}\,\Gamma\left(\frac{3}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{10}\right)\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}R. \tag{26}$$

40. Arrondissement des angles. Dans de nombreuses questions pratiques on doit avoir en vue que les angles des polygones considérés sont en réalité arrondis. Nous donnons ici des méthodes approchées de calcul de l'influence de ces arrondissements.

1) Arrondissement des angles inférieurs à π. Trouvons d'abord la fonction qui réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur des z sur le demi-plan supérieur des ζ duquel on a retranché une petite aire limitée par le segment $(-1, 1)$ et un

arc de courbe s'appuyant sur ce segment et tangent à l'axe réel en ses extrémités (*) (fig. 93). Pour cela nous considérons la transformation $z_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ du demi-plan supérieur des ζ sur le demi-plan supérieur des z_1 duquel on a retranché le demi-cercle unité et prenons pour courbe l'image réciproque de la demi-ellipse de demi-axes 1 et $1+h$ voisine de la demi-circonférence (fig. 93). Il reste à présent à trouver la transformation du demi-plan supérieur des z_1 duquel on a retranché la moitié de l'ellipse sur le demi-plan supérieur des z. Ce dernier problème se résout d'une manière élémentaire. L'homothétie $z_2 = \frac{z_1}{c}$, où $c = \sqrt{(1+h)^2 - 1} = \sqrt{h(2+h)}$, fait correspondre aux foyers de l'ellipse les points $\pm i$, puis nous appliquons la transformation $z_2 = \frac{1}{2}\left(z_3 - \frac{1}{z_3}\right)$, ce qui donne dans le plan des z_3, à la place de l'ellipse, un cercle de rayon $r = \frac{1+\sqrt{1+c^2}}{c} = \sqrt{\frac{2+h}{h}}$, et enfin la transformation $z = \frac{1}{2}\left(\frac{z_3}{r} + \frac{r}{z_3}\right)$ donne le demi-plan supérieur. Nous avons : $z_3 = r(z + \sqrt{z^2-1})$, $z_1 = \frac{c}{2}\left[\left(r - \frac{1}{r}\right)z + \left(r + \frac{1}{r}\right)\sqrt{z^2-1}\right]$, ou, ayant en vue les expressions de r et c, $z_1 = z + (1+h)\sqrt{z^2-1}$.

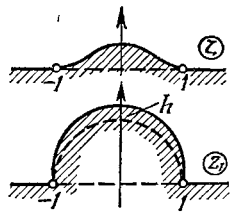

FIG. 93

Enfin négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à h nous trouvons :

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) \approx z - h\left\{\sqrt{(z^2-1)^3} - z(z^2-1)\right\}. \qquad (1)$$

A l'aide de transformations linéaires complémentaires $\widetilde{\zeta}_1 = a\zeta + b$, $\widetilde{z} = az + b$, nous trouvons un résultat plus général : la fonction (**)

$$\zeta \approx z - \frac{h}{a^2}\left\{\sqrt{(z-b_1)^3(z-b_2)^3} - (z-b_1)(z-b_2)(z-b)\right\} = g_b(z), \qquad (2)$$

où $b_1 = b - a$, $b_2 = b + a$, réalise la transformation du demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} \zeta > 0$ duquel on a retranché une petite aire limitée par le segment $(b-a,\ b+a)$ et un arc de courbe qui s'appuie sur ce segment et qui lui est tangent en ses extrémités ; la quantité h, proportionnelle au maximum de l'ordonnée de la courbe, est supposée être un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à a (fig. 94).

Supposons maintenant que la fonction $w = f(\zeta)$ réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur $\operatorname{Im} \zeta > 0$ sur un poly-

(*) La fonction de l'exemple 2) du n° 34 n'est pas valable, car l'arc n'est pas tangent à l'axe.

(**) Nous écrivons z et ζ au lieu de $\widetilde{z}$ et $\widetilde{\zeta}$.

gone Δ, de plus le point b correspond au sommet B d'angle inférieur à π du polygone. Faisant la transformation complémentaire $\zeta = g_b(z)$ à l'aide de la fonction (2) nous trouvons la représentation conforme

$$w = f[g_b(z)] \tag{3}$$

du demi-plan supérieur des z sur un domaine $\tilde{\Delta}$ qui s'obtient de Δ en arrondissant l'angle B dans un voisinage suffisamment petit du sommet de cet angle (fig. 94). En itérant ce procédé, on peut arrondir tous les angles de Δ inférieurs à π.

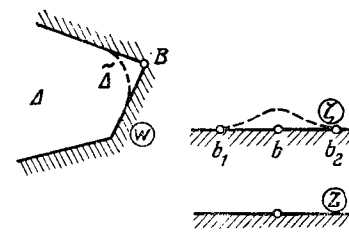

FIG. 94

2) Arrondissement des angles supérieurs à π. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que le sommet A_1 du polygone Δ, dont nous arrondissons l'angle, coïncide avec le point $w = 0$, que le côté A_1A_2 se trouve sur le demi-axe positif et $a_1 = 0$ et que les images réciproques $-a_2, -a_3, \ldots, -a_n$ des autres sommets de Δ sont négatives (on peut toujours y arriver par des transformations homographiques complémentaires). Dans ces conditions, la fonction qui réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur des z sur le polygone Δ peut être écrite à l'aide de l'intégrale de Schwarz-Christoffel sous la forme

$$w = C \int_0^z z^{\alpha_1 - 1} \varphi(z)\, dz, \tag{4}$$

où $\varphi(z) = (z + a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z + a_n)^{\alpha_n - 1}$ et C est une constante positive ($\arg C = 0$ en vertu du choix du segment de droite A_1A_2).

Pour arrondir l'angle au sommet A_1, au lieu de (4), considérons la fonction

$$w = f(z) = C \int_0^z \{z^{\alpha_1 - 1} + \gamma (z + \beta)^{\alpha_1 - 1}\} \varphi(z)\, dz, \tag{5}$$

où β et γ sont des constantes positives à déterminer; nous supposons que β est un nombre petit (dans tous les cas, $\beta < a_n$). D'après 5) du n° 38, la fonction

$$w = f_2(z) = C\gamma \int_0^z (z + \beta)^{\alpha_1 - 1} \varphi(z)\, dz$$

réalise la représentation du demi-plan Im $z > 0$ sur un polygone dont les côtés sont parallèles aux côtés de Δ, de plus le point $z = -\beta$ correspond au sommet B'' qui se trouve sur le demi-axe négatif des u (d'angle $\alpha_1\pi$), et aux sommets restants A_2'', . . ., A_n'' correspondent les points $-a_2$, . . ., $-a_n$ (sur la fig. 95 ce polygone est indiqué en pointillé).

Considérons encore la fonction

$$w = f_1(z) = C \int_0^z z^{\alpha_1 - 1} \varphi(z)\, dz,$$

qui réalise la représentation du demi-plan Im $z > 0$ sur le polygone de sommets A_1, A_2', . . ., A_n' (sur la fig. 95 il est indiqué en trait continu fin). Pour chaque z fixe, le vecteur w, défini par la formule (5), est la somme des vecteurs $f_1(z)$ et $f_2(z)$. En faisant cette somme, nous voyons que lorsque z décrit l'axe réel, le point w décrit le chemin fermé $A_1A_2 \ldots A_nBA_1$ qui tout entier, excepté la portion BA_1, est constitué de segments de droite parallèles aux côtés correspondants du polygone donné (sur la fig. 95, en trait gras).

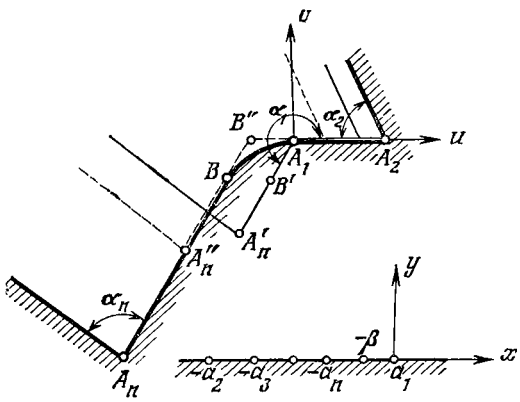

FIG. 95

Pour obtenir les équations paramétriques de la portion BA_1 nous introduisons le paramètre positif $t = -z$ $(0 < t < \beta)$. La formule (5) donne alors

$$\frac{dw}{dt} = \frac{du}{dt} + i\,\frac{dv}{dt} = C\left\{e^{i\alpha_1\pi} t^{\alpha_1 - 1} - \gamma(\beta - t)^{\alpha_1 - 1}\right\} \varphi(-t),$$

d'où, pour la tangente de l'angle formé par l'axe des u et la tangente à BA_1, nous avons :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{\sin\alpha_1\pi \cdot t^{\alpha_1 - 1}}{\cos\alpha_1\pi t^{\alpha_1 - 1} - \gamma(\beta - t)^{\alpha_1 - 1}} = \frac{\sin\alpha_1\pi}{\cos\alpha_1\pi - \gamma\left(\frac{\beta}{t} - 1\right)^{\alpha_1 - 1}}.$$

On voit de cette expression que, dans le cas d'un angle supérieur à π (c'est-à-dire pour $1 < \alpha_1 < 2$), tg φ est nulle au point $t = 0$ correspondant à A_1 et égale à tg $\alpha_1\pi$ au point $t = \beta$ correspondant à

B. Ainsi, dans le cas d'un angle supérieur à π l'arc BA_1 arrondit réellement l'angle au sommet A_1 (*).

D'après le principe de la correspondance des frontières la fonction (5) réalise la représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le domaine Δ de frontière le contour $A_1A_2 \ldots A_nBA_1$. Faisant varier les constantes C, β et γ, nous pouvons faire de manière que le domaine Δ diffère aussi peu qu'on le veut du polygone donné Δ.

Montrons comment on doit s'y prendre sur un exemple simple. Considérons le polygone représenté sur la fig. 96, c'est un cas particulier du triangle de l'exemple 3) du numéro précédent. Nous supposons que les points A_1, A_2 et A_3 ont pour images les points 0, 1 et ∞ de l'axe réel ; l'intégrale de Schwarz-Christoffel s'écrit alors sous la forme

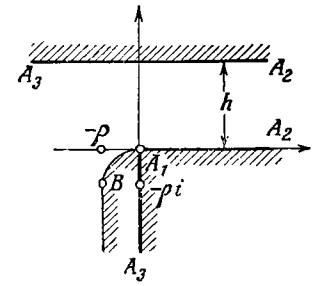

FIG. 96

$$w = C \int_0^z \frac{\sqrt{z}\,dz}{1-z}, \qquad (6)$$

où C est une constante positive (sur le tronçon (0, 1) w doit prendre des valeurs positives). Conformément à ce qui a été exposé ci-dessus, nous posons

$$w = C \int_0^z \frac{\sqrt{z}+\gamma\sqrt{z+\beta}}{1-z}\,dz. \qquad (7)$$

Cette fonction fait correspondre au segment (0, 1) le demi-axe positif, et nous exigeons que lorsqu'on passe par le point $z = 1$, elle ait l'accroissement ih ; d'où, de la même manière qu'au numéro 39, nous obtenons :

$$C\pi\,(1 + \gamma\sqrt{1+\beta}) = h. \qquad (8)$$

Ensuite, nous exigeons que le point $z = -\beta$ corresponde au point $B = -\rho - i\rho$ de manière que, pour les petits β, l'arc BA_1 soit voisin

---

(*) Lorsque $\alpha_1 < 1$, nous avons $\left.\frac{dv}{du}\right|_{t=0} = \operatorname{tg} \alpha_1\pi$, $\left.\frac{dv}{du}\right|_{t=\beta} = 0$ et l'arc A_1B n'arrondit pas l'angle. L'arrondissement dans ce cas peut être réalisé si, au lieu de (5), on prend la fonction

$$w = C \int_0^z \{z^{\alpha_1-1} + \gamma\,(z-\beta)^{\alpha_1-1}\}\,\varphi\,(z)\,dz,$$

où $\beta > 0$, néanmoins ce procédé est moins commode que celui décrit au début de ce numéro.

de l'arc de circonférence de rayon ρ. Après le changement de variable $z = -t$ nous aboutissons à l'équation

$$\rho + i\rho = C \int_0^{\beta} \frac{i\sqrt{t} + \gamma\sqrt{\beta - t}}{1+t}\, dt.$$

Séparant les parties réelles et imaginaires et intégrant nous trouvons les deux relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= 2C\{\sqrt{\beta} - \operatorname{arctg}\sqrt{\beta}\}, \\ \rho &= 2C\gamma\left\{\sqrt{1+\beta}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}} - \sqrt{\beta}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Les trois relations (8) et (9) ainsi obtenues permettent de trouver ρ, C et γ en fonction du paramètre β. Pour les petits β, nous avons:

$$\rho \approx \frac{h}{3\pi}\beta^{\frac{3}{2}}, \quad C \approx \frac{h}{2\pi}\left(1 - \frac{3}{4}\beta\right), \quad \gamma \approx 1 + \beta. \tag{10}$$

La fonction qui réalise la transformation prend alors la forme (aux infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à β près)

$$w = \frac{2h}{\pi}\left\{\operatorname{arth}\sqrt{z} - \sqrt{z} + \left(\frac{\beta}{4} - 1\right)\sqrt{z}\right\}. \tag{11}$$

* * *

Dans ce chapitre, nous avons fait connaissance avec plusieurs problèmes de la théorie des représentations conformes se rapportant à l'ensemble des problèmes énoncés au début du n° 28. Dans les deux chapitres qui vont suivre, le lecteur trouvera d'autres exemples de ces problèmes. Dans le chapitre III nous aurons recours aux représentations conformes dans la mesure où elles seront nécessaires à la résolution de différents problèmes aux limites de la théorie des champs vectoriels plans, qui sont intimement liés aux applications. Le chapitre IV est consacré aux principes variationnels de la théorie des représentations conformes; nous y étudierons le comportement des représentations conformes pour des variations de la frontière des domaines à transformer (problème 3) et nous y établirons certaines formules approchées.

Nous ne donnerons pas les méthodes de calculs approchés des représentations conformes (exception faite pour la méthode des réseaux du n° 45). Le lecteur pourra prendre connaissance des méthodes analytiques de ces calculs dans le chapitre V du livre de L. Kantorovitch et V. Krylov [9]. En pratique, on a recours aux procédés de calcul qui utilisent des analogies physiques — les méthodes de ces calculs avec application d'instruments spécialisés simples et

de papier électroconducteur sont décrites par P. Filtchakov et V. Pantchichine [11].

Le lecteur pourra également prendre connaissance de certaines méthodes pratiques dans le livre de W. Koppenfels et F. Stallmann [13] et D. Gaier [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Smirnov, Cours de mathématiques supérieures, t. III, deuxième partie, Editions Mir, 1972.
[2] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
[3] М. А. Лаврентьев, Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, Гостехиздат, 1947.
[4] C. Carathéodory, Conformal representation, 2-d. ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge 1952.
[5] R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience Publ., London 1950.
[6] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952.
[7] М. В. Келдыш, Конформные отображения многосвязных областей на канонические области, Успехи мат. наук, **6** (1939), 90-119.
[8] Г. М. Голузин, Л. В. Канторович и др., Конформное отображение односвязных и многосвязных областей, ОНТИ, 1937.
[9] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962.
[10] П. Ф. Фильчаков, Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, т. I., Изд-во АН УССР, Киев, 1959.
[11] П. Ф. Фильчаков и В. И. Панчишин, Интеграторы. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге, Изд-во АН УССР, Киев, 1961.
[12] Г. Н. Положий, Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двухсвязных областей и определение постоянных Кристоффеля-Шварца при помощи электрогидродинамических аналогий, Укр. матем. журн. **7**, № 4 (1956), 423-432.
[13] W. Koppenfels und F. Stallmann, Praxis der konformen Abbildung, Brl., Springer, 1959.
[14]. D. Gaier, Konstructive Methoden der konformen Abbildung, Brl., Springre, 1964.

CHAPITRE III

Problèmes aux limites de la théorie des fonctions et leurs applications

Nous avons déjà dit que la théorie des fonctions de la variable complexe, et en particulier sa partie géométrique, la théorie des représentations conformes, a pris naissance et s'est développée sur la base de représentations physiques. *Leonhard Euler* et *Jean d'Alembert* ont été conduits aux conditions d'analyticité des fonctions de la variable complexe grâce à des considérations hydrodynamiques; dans ses recherches, *Bernhard Riemann* avait constamment recours à des interprétations des fonctions analytiques se rapportant aux courants plans de fluide et aux flux de chaleur.

D'autre part, inversement, le développement de la théorie des fonctions de la variable complexe a permis de créer de nouvelles méthodes de résolution des importants problèmes pratiques appartenant aux différents chapitres des sciences naturelles (hydrodynamique et aérodynamique, théorie de l'élasticité, champs électrostatiques, magnétiques et thermiques, etc.). De grands mérites dans les applications de la théorie des fonctions de la variable complexe reviennent aux savants russes et soviétiques.

Au début du XX^{e} siècle, *Nikolaï Joukovski* et *Serguéi Tchaplyguine* (1869-1942) sont parvenus à de nombreux résultats fondamentaux dans l'application de la théorie des fonctions en hydrodynamique et aérodynamique. Les méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe jouent un rôle du premier plan dans leurs remarquables articles, ainsi que dans le livre de Joukovski « Les fondements théoriques de l'aéronautique » (1911). De nos jours, des applications importantes et profondes de la théorie des fonctions en hydrodynamique et aérodynamique ont été données par *M. Keldych*, *S. Khristianovitch*, *V. Goloubev*, *L. Sédov* et d'autres.

En 1909, *G. Kolossov* (*) a posé les bases d'une application sérieuse de la théorie des fonctions de la variable complexe au problème plan de la théorie de l'élasticité. Dans les années vingt, *N. Mouskhélichvili* a donné la résolution brillante de ce problème par des méthodes s'appuyant sur la théorie des fonctions. Ces méthodes sont exposées dans son livre [10] dont la première édition est parue en 1933. Les méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe

(*) *Gouri Kolossov* (1867-1936), spécialiste de la théorie de l'élasticité.

occupent une place de choix dans les recherches faites dans les différents domaines de la physique (*V. Fock* et d'autres).

Dans ce chapitre, nous considérons les principales représentations physiques liées à la théorie des fonctions de la variable complexe et des applications simples de cette théorie. Nous commençons par la théorie des fonctions harmoniques de deux variables qui sont intimement liées aux potentiels des champs vectoriels plans, par les principaux problèmes aux limites de la théorie des fonctions harmoniques et analytiques, puis, sur la base de la théorie développée, nous exposons les questions fondamentales des applications.

§ 1. FONCTIONS HARMONIQUES

On appelle *fonction harmonique dans un domaine D* toute fonction réelle $u(x, y)$ de deux variables réelles qui possède dans ce domaine des dérivées partielles secondes continues et qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles (*)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le symbole de l'opérateur différentiel). Il est d'usage d'appeler cette équation *équation de Laplace*. Laplace l'avait considérée en 1782, mais, bien avant lui, cette équation avait été utilisée par Euler dans ses travaux d'hydrodynamique et d'autres branches de la physique mathématique. Vu que l'équation de Laplace est linéaire, remarquons tout de suite que toute combinaison linéaire

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k (x, y)$$

de fonctions harmoniques $u_k (x, y)$ à coefficients réels et constants α_k est une fonction harmonique.

Comme nous le verrons dans les paragraphes de ce chapitre, les potentiels des principaux champs vectoriels considérés en physique sont des fonctions harmoniques, et toute fonction harmonique, du point de vue de la physique, peut être représentée comme le potentiel d'un certain champ. C'est pour cette raison que, dans le cas général, les fonctions harmoniques sont souvent appelées *potentiels* et la théorie des fonctions harmoniques *théorie du potentiel*.

(*) Partout ici il sera question de fonctions harmoniques de deux variables car ce sont précisément elles qui sont intimement liées aux fonctions analytiques. Les fonctions harmoniques de trois variables $u(x, y, z)$ vérifiant l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

que nous ne considérerons toutefois pas, sont non moins importantes en pratique.

41. Propriétés des fonctions harmoniques. Avant tout, trouvons la relation qui existe entre la notion de fonction analytique et la notion de fonction harmonique. Cette relation est exprimée par les deux théorèmes simples qui suivent :

Théorème 1. *Les parties réelle et imaginaire d'une fonction* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *uniforme et analytique dans un domaine D sont des fonctions harmoniques dans ce domaine.*

La démonstration découle immédiatement des conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

En effet, puisque les fonctions analytiques possèdent des dérivées de tous les ordres, on peut dériver les équations (1) par rapport à x et y. Dérivant la première par rapport à x, la seconde par rapport à y et utilisant le théorème sur l'égalité des dérivées croisées, il vient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

d'où

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

La démonstration est analogue pour la fonction $v(x, y)$.

Deux fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ harmoniques dans un domaine D, qui vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, sont dites *conjuguées.*

Théorème 2. *Pour toute fonction* $u(x, y)$ *harmonique dans un domaine simplement connexe D, on peut trouver une fonction harmonique conjuguée* $v(x, y)$.

En effet, considérons l'intégrale

$$v_0(x, y) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy,$$

où $z_0 = x_0 + iy_0$ est un point fixe et $z = x + iy$ un point variable dans le domaine D. En vertu de l'équation de Laplace $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, cette intégrale ne dépend pas du chemin d'intégration et n'est fonction que du point z ; nous notons cette fonction $v_0(x, y)$. D'après les propriétés des intégrales curvilignes, il vient

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{v_0(x+h, y) - v_0(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

(nous pouvons prendre l'intégrale de z à $z + h$ suivant un segment de droite horizontal sur lequel $dy = 0$) ; d'une manière analogue

$\frac{\partial v_0}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$. Par conséquent, $v_0(x, y)$ est précisément la fonction cherchée, conjuguée de la fonction $u(x, y)$. Vu qu'une fonction n'est définie par ses dérivées partielles qu'à une constante près, l'ensemble de toutes les fonctions harmoniques conjuguées de $u(x, y)$ est donné par la formule

$$v(x, y)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C, \tag{2}$$

où C est une constante (réelle) arbitraire.

Remarquons que dans un *domaine multiplement connexe* D, l'intégrale (2)

$$v(x, y)=\int_{z_0}^{z}{}_{L}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C$$

définit en général une fonction *multiforme*. Elle peut prendre des valeurs différentes suivant deux chemins L et $\widetilde{L}$, réunissant les points z_0 et z, si ces chemins ne peuvent être déformés de manière à coïncider l'un avec l'autre tout en restant dans le domaine D (c'est-à-dire si dans le domaine de frontière L et $\widetilde{L}$ il y a des points qui n'appartiennent pas à D). Il est évident que tous les raisonnements du n° 13 sont valables dans notre cas, et on peut affirmer que, dans un domaine multiplement connexe, la formule générale pour la fonction $v(x, y)$, donnée par l'intégrale (2), est la suivante:

$$v(x, y)=\int_{z_0}^{z}{}_{L^0}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+N_1\Gamma_1+N_2\Gamma_2+\ldots+N_n\Gamma_n+C, \tag{3}$$

où N_k sont des nombres entiers arbitraires et Γ_k les intégrales prises le long des contours fermés γ_k dont chacun contient à son intérieur une portion connexe de la frontière de D:

$$\Gamma_k=\int_{\gamma_k}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \tag{4}$$

(cf. formules (2) et (3), n° 13). Les constantes Γ_k sont appelées *périodes* de l'intégrale (2) ou *constantes cycliques*.

Si on peut choisir dans un domaine D' appartenant à D une branche uniforme et continue de la fonction $v(x, y)$, donnée par la formule (3), alors cette branche est évidemment une fonction harmonique conjuguée de $u(x, y)$. C'est pour cette raison que la fonction $v(x, y)$ est une *fonction harmonique multiforme*. Remarquons que les dérivées partielles de cette fonction sont uniformes: $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$; ceci découle de la formule (3).

Le théorème 2 peut évidemment être énoncé comme suit.

Théorème 2'. *Toute fonction harmonique dans un domaine D peut être considérée comme la partie réelle ou la partie imaginaire d'une fonction analytique $f(z)$; cette dernière est définie à une constante, imaginaire ou réelle respectivement, près.*

Nous n'excluons pas le cas des domaines multiplement connexes, et c'est pourquoi la fonction analytique $f(z)$ peut être multiforme.

Exemple. Le calcul des dérivées partielles de la fonction

$$u = \ln(x^2+y^2) = 2\ln|z|$$

montre qu'elle est harmonique dans la couronne $0 < |z| < \infty$. L'intégrale (2) prend la forme :

$$v(x, y) = 2\int_{z_0}^{z}{}_{L} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} + C = 2\operatorname{Arg} z + C$$

et représente dans la couronne $0 < |z| < \infty$ une fonction à une infinité de déterminations. La fonction analytique correspondante

$$f(z) = u + iv = 2\ln|z| + 2i\operatorname{Arg} z + iC = 2\operatorname{Ln} z + iC$$

possède également une infinité de déterminations.

Théorème 3. *Toute fonction harmonique $u(x, y)$ est une fonction analytique de x et y, c'est-à-dire qu'au voisinage de chaque point $z_0 = x_0 + iy_0$ du domaine D, elle est la somme d'une série absolument convergente*

$$u(x, y) = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} c_{mn}(x-x_0)^m (y-y_0)^n. \tag{5}$$

En effet, $u(x, y)$ peut être considérée, d'après le théorème 2', comme la partie réelle de la fonction $f(z)$, uniforme et analytique dans un voisinage $|z - z_0| < R$ du point z_0. Supposons que dans ce voisinage

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (z-z_0)^n, \tag{6}$$

où $c_n = \alpha_n + i\beta_n$. La partie réelle du terme général de la série (6)

$$\alpha_n\left\{(x-x_0)^n - \frac{n(n-1)}{2!}(x-x_0)^{n-2}(y-y_0)^2 + \ldots\right\} +$$

$$+\beta_n\left\{-n(x-x_0)^{n-1}(y-y_0) +\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x-x_0)^{n-3}(y-y_0)^3 + \ldots\right\} \tag{7}$$

n'est pas supérieure en valeur absolue à

$$|c_n|\,\{|x-x_0| + |y-y_0|\}^n,$$

et comme d'après le théorème d'Abel (n° 19) la série (6) converge absolument dans tout cercle $|z - z_0| \leqslant r < R$, c'est-à-dire que

la série $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ converge pour $r < R$, lorsque $|x - x_0| + |y - y_0| < R$, la série de terme général (7) converge absolument (*). Cette série représente précisément la série de $u(x, y)$. Après regroupement de ses termes (ce qui est légitime en vertu de la convergence absolue), nous obtenons la série (5) cherchée. Le théorème est démontré.

Il découle en particulier du théorème qui vient d'être démontré que les fonctions harmoniques possèdent des dérivées partielles de tous les ordres. Il n'est pas difficile de montrer que ces dernières sont aussi des fonctions harmoniques (cf. théorème 1 du n° 17).

En se basant sur le théorème 3, on peut obtenir un procédé pratique commode pour retrouver la fonction analytique $f(z)$ si l'on connaît sa partie réelle $u(x, y)$. Par une transformation élémentaire de l'expression (7) du terme général de la série donnant $u(x, y)$, nous obtenons la représentation de cette fonction au voisinage du point z_0 :

$$u(x, y) = \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n [(x - x_0) + i(y - y_0)]^n + \\ + \bar{c}_n [(x - x_0) - i(y - y_0)]^n\}.$$

D'après le théorème d'Abel, cette série converge aussi pour les valeurs complexes de x et y suffisamment voisines de x_0 et y_0. On peut donc y poser $x - x_0 = \frac{\zeta - z_0}{2}$, $y - y_0 = \frac{\zeta - z_0}{2i}$, où ζ est un point suffisamment voisin de z_0. Il vient

$$u\left(x_0 + \frac{\zeta - z_0}{2}, \; y_0 + \frac{\zeta - z_0}{2i}\right) = \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\zeta - z_0)^n = \\ = \alpha_0 + \frac{1}{2} [f(\zeta) - c_0].$$

Remplaçant ici ζ par z, nous aboutissons après de simples transformations à la formule définitive

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \; \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{c}_0. \tag{8}$$

La formule (8) a été obtenue pour les points z voisins de z_0, mais, d'après le théorème d'unicité, cette formule est vraie dans tout le domaine de définition de $f(z)$, car dans ce domaine les deux membres de (8) sont des fonctions analytiques de z.

En particulier, si $f(z)$ est analytique à l'origine des coordonnées, on peut alors poser $z_0 = 0$, et la formule (8) devient particulièrement simple :

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \; \frac{z}{2i}\right) - \bar{c}_0. \tag{9}$$

(*) Sous cette condition, la série des valeurs absolues des termes de (7) converge également.

Donnons plusieurs exemples où l'on applique les formules (8) et (9) :

1) $u=x+y$, $f(z)=z+\frac{z}{i}+C=(1-i)\,z+C$

(formule (9)) ;

2) $u=\ln(x^2+y^2)$, $f(z)=2\ln\left\{\frac{(z+1)^2}{4}-\frac{(z-1)^2}{4}\right\}+C=2\ln z+C$

(formule (8), $z_0=1$) ;

3) $u=\frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y-\cos 2x}$, $f(z)=\frac{2\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch} i\left(\frac{\pi}{2}-|z\right)-\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}+C=\operatorname{ctg} z+C$

$\left(\text{formule (8), } z_0=\frac{\pi}{2}\right)$.

Dans les trois formules C est une constante imaginaire.

Passons à l'étude des propriétés des fonctions harmoniques. En partant des théorèmes 1 et 2, ces propriétés s'obtiennent facilement des propriétés correspondantes des fonctions analytiques. Pour plus de commodité, nous écrirons parfois $u(z)$ au lieu de $u(x, y)$, tout comme on écrit $u(P)$ à la place de $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour les fonctions de plusieurs variables, sous-entendant par P le point de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Théorème 4 (de la moyenne). *Si une fonction $u(z)$ est continue dans un cercle fermé de rayon r et de centre au point z et harmonique à l'intérieur de ce cercle, alors*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{10}$$

La démonstration découle immédiatement de la formule (5) du n° 14, en séparant les parties réelles.

Théorème 5. *Une fonction harmonique non constante ne peut atteindre un extrémum en un point intérieur au domaine de définition.*

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas d'un maximum car un point de minimum pour la fonction harmonique $u(z)$ est un point de maximum pour la fonction $-u(z)$, également harmonique. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la fonction harmonique $u(z)$ atteint son maximum en un point z_0 intérieur au domaine.

Construisons dans un voisinage de z_0 une fonction analytique uniforme $f(z)$ telle que $u=\operatorname{Re} f(z)$. La fonction $e^{f(z)}$ est analytique et son module $e^{u(z)}$, en vertu de notre supposition, atteint un maximum au point z_0 intérieur au domaine. Ceci est en contradiction avec le principe du maximum (n° 15). Le théorème est démontré.

On aurait pu démontrer directement le théorème 5, à partir du théorème de la moyenne, exactement comme on l'a fait (n° 15) pour le principe du maximum.

Théorème 6. *Si une fonction $u(z)$ harmonique dans tout le plan ouvert est bornée au moins supérieurement ou inférieurement, elle est alors constante.*

En effet, soit $u(z)$ bornée supérieurement : $u(z) < M$. Construisons une fonction $f(z)$ analytique dans tout le plan ouvert telle que $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Par hypothèse, toutes les valeurs de la fonction $w = f(z)$ appartiennent au demi-plan $u < M$. Par conséquent, d'après la remarque faite à la fin du n° 28, la fonction $f(z)$ est constante et, par suite, $u(z)$ aussi.

Les deux théorèmes suivants établissent le caractère des *lignes de niveau* des fonctions harmoniques, c'est-à-dire de l'ensemble des points en lesquels $u(z) = \text{const}$.

Théorème 7. *Si une fonction harmonique $u(z)$ non constante a une ligne de niveau fermée $u(z) = u_0$, alors, à l'intérieur de cette dernière, il existe au moins un point singulier* (*) *de cette fonction.*

En effet, dans le cas contraire, la fonction $u(z)$, continue sur le domaine fermé de frontière la ligne de niveau, doit atteindre sa plus grande valeur $u(z_1)$ et sa plus petite valeur $u(z_2)$. D'après le théorème 5, les points z_1 et z_2 doivent se trouver sur la frontière du domaine, c'est-à-dire sur la ligne de niveau ; par conséquent, $u(z_1) = u(z_2)$, donc $u(z)$ est constante.

Théorème 8. *Tout voisinage suffisamment petit du point z_0 de la ligne de niveau $u(z) = u_0$ est partagé par cette ligne en un nombre pair $2n$ ($n \geqslant 1$) de secteurs dans lesquels $u(z)$ prend alternativement des valeurs supérieures et inférieures à u_0.*

La fonction $u(z) - u_0$ est nulle au point z_0 ; choisissant une fonction conjuguée $v(z)$ telle que $v(z_0) = 0$, nous obtenons une fonction analytique $f(z) = u(z) - u_0 + iv(z)$ également nulle au point z_0. Désignons par n l'ordre de ce zéro. Alors, dans le voisinage du point z_0, on a $f(z) = c_n (z - z_0)^n + c_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \ldots$, $c_n \neq 0$ et, par conséquent,

$$u(z) = u_0 + \operatorname{Re} f(z) = u_0 + Ar^n \sin(n\varphi + B) + o(r^n), \quad (11)$$

où l'on a posé $z - z_0 = re^{i\varphi}$, $A \neq 0$ et B sont des constantes et $o(r^n)$ désigne un infiniment petit d'ordre supérieur à r^n lorsque $r \to 0$. On voit que pour r suffisamment petit et φ variant de 0 à 2π, la différence $u - u_0$ s'annule $2n$ fois en changeant de signe. Le théorème est démontré.

On démontre de la même manière que la ligne de niveau de la fonction harmonique $v(z)$ conjuguée de $u(z)$ passant par le point z_0 se décompose dans le voisinage de ce point en n branches tangentes en z_0 aux bissectrices des secteurs dont il est question dans le théorème 8.

(*) C'est ainsi que l'on appelle le point en lequel la condition d'harmonicité de la fonction cesse d'avoir lieu.

Il découle du théorème 8 que la ligne de niveau de toute fonction harmonique ne peut avoir que des points simples ($n = 1$) ou des points multiples (*) à tangentes distinctes ($n > 1$) ; les cas des points isolés, des points d'arrêt ou des points de rebroussement sont exclus.

Pour la suite, il est utile de donner la proposition suivante réciproque du théorème de la moyenne.

Théorème 9. *Si une fonction $u(z)$ est continue dans un domaine D et si pour tout point z et r suffisamment petit*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\, d\varphi,$$

alors, la fonction $u(z)$ est harmonique dans D.

Notre démonstration est basée sur le théorème d'existence d'une fonction harmonique qui prend des valeurs données sur la frontière d'un domaine simplement connexe ; ce théorème sera démontré au n° 43. Soit z_0 un point arbitraire de D et soit $\overline{D}_0$ un domaine simplement connexe fermé appartenant à D et contenant à son intérieur le point z_0. Construisons d'après le théorème cité une fonction harmonique $u_0(z)$ prenant sur la frontière C_0 du domaine $\overline{D}_0$ les mêmes valeurs que la fonction $u(z)$ et posons $U(z) = u_0(z) - u(z)$.

Par construction et d'après les conditions du théorème à démontrer, la fonction $U(z)$ est continue sur $\overline{D}_0$ et nulle sur la frontière de ce domaine. De plus, la valeur de $U(z)$ au centre de tout cercle appartenant à $\overline{D}_0$ est égale à la moyenne arithmétique de ses valeurs sur la circonférence de ce cercle, car les deux fonctions $u(z)$ et $u_0(z)$ possèdent cette propriété, la première par hypothèse, la seconde d'après le théorème de la moyenne.

Il en découle que la fonction $U(z)$ ne peut atteindre un extrémum aux points intérieurs à D_0 ; la démonstration de cette propriété est basée sur la continuité de la fonction et sur le théorème de la moyenne (cf. la remarque qui suit le théorème 5). Mais en tant que fonction continue sur un domaine fermé, $U(z)$ doit atteindre ses valeurs extrémales, ce qui ne peut se produire que sur la frontière de $\overline{D}_0$. Or, comme sur la frontière $U(z)$ est partout nulle, les valeurs maximale et minimale de $U(z)$ sont nulles, donc $U(z)$ est identiquement nulle sur $\overline{D}_0$. Cela signifie que partout sur $\overline{D}_0$ la fonction $u(z)$ coïncide avec la fonction harmonique $u_0(z)$ et, en particulier, elle est harmonique au point z_0. Le théorème est donc démontré, étant donné que z_0 est un point arbitraire de D.

(*) Dans tout domaine fermé d'harmonicité de la fonction $u(z)$ il existe un nombre fini de points multiples de la ligne de niveau (en de tels points, $f'(z) = 0$) ; dans le cas contraire, d'après le théorème d'unicité (n° 20), on doit avoir $f'(z) \equiv 0$.

Donnons maintenant un théorème analogue au théorème de Weierstrass du n° 19.

Théorème 10. *Soit donnée une suite de fonctions* $u_0(z)$, $u_1(z)$, ..., $u_n(z)$, ..., *harmoniques dans un domaine* D *et continues sur* $\overline{D}$. *Si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ *converge uniformément sur la frontière du domaine* D, *elle converge alors uniformément dans le domaine* D *et, de plus, sa somme est une fonction harmonique dans* D.

La convergence uniforme de la série dans D découle du principe de l'extrémum. En effet, d'après le critère connu de convergence de Cauchy (*), la convergence uniforme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ sur la frontière du domaine D entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre entier N tel que pour tout $n > N$, pour tout p entier positif et pour tous les points ζ de la frontière

$$| u_{n+1}(\zeta) + u_{n+2}(\zeta) + \ldots + u_{n+p}(\zeta) | < \varepsilon.$$

Etant donné que la somme dont on a pris la valeur absolue est une fonction harmonique, d'après le principe de l'extrémum, nous avons :

$$| u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots + u_{n+p}(z) | < \varepsilon$$

en tous les points du domaine. Mais, d'après le même critère de Cauchy, il en découle la convergence uniforme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$. Il reste à démontrer que la somme $u(z)$ de cette série est une fonction harmonique. Pour cela, nous avons recours aux théorèmes 9 et 4. Pour tout r suffisamment petit, nous avons

$$\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z + re^{i\varphi})\, d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} u_k(z + re^{i\varphi})\, d\varphi$$

(l'intégration terme à terme de la série est légitime vu sa convergence uniforme). D'après le théorème 4, les intégrales de droite sont égales à $2\pi u_k(z)$, donc

$$\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\, d\varphi = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) = 2\pi u(z)$$

et, d'après le théorème 9, la fonction $u(z)$ est harmonique au point z. Le théorème est démontré puisque z est un point arbitraire du domaine D.

Pour terminer, donnons encore deux théorèmes qui seront utiles dans la suite. Le premier établit qu'une fonction harmonique reste

(*) Cf. *Fikhtengoltz*, t. II, p. 309.

harmonique lors d'une transformation analytique de la variable indépendante.

Théorème 11. *Si $u(z)$ est une fonction harmonique dans un domaine D et si $z = g(\zeta)$ est une fonction analytique dans un domaine Δ, dont les valeurs appartiennent à D, alors la fonction composée $u[g(\zeta)] = U(\zeta)$ est harmonique dans Δ.*

En effet, construisons une fonction analytique (peut-être multiforme) $f(z)$ telle que $u = \operatorname{Re} f(z)$. La fonction $f[g(\zeta)] = F(\zeta)$ est évidemment analytique dans le domaine Δ et, par conséquent, $U(\zeta) = \operatorname{Re} f[g(\zeta)] = \operatorname{Re} F(\zeta)$ est harmonique dans ce domaine.

Le deuxième théorème exprime une propriété de l'intégrale de la dérivée normale d'une fonction harmonique.

Théorème 12. *Si une fonction $u(z)$ est harmonique dans un domaine simplement connexe D et continue, ainsi que ses dérivées partielles, sur $\overline{D}$, alors*

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0, \tag{12}$$

où C est la frontière du domaine D, $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée suivant la direction de la normale à C et ds l'élément d'arc.

Construisons dans $\overline{D}$ une fonction harmonique v conjuguée de u ; elle est uniforme, étant donné que le domaine D est simplement connexe. D'après la remarque faite à la fin du n° 5, les conditions de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}, \tag{13}$$

où $\frac{\partial}{\partial s}$ désigne la dérivée suivant la direction de la tangente à la courbe et $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée suivant sa normale (de sorte que la rotation qui fait coïncider le vecteur $\mathbf{n}^0$ avec le vecteur $\mathbf{s}^0$ est exécutée dans le sens positif). Vu la continuité des dérivées partielles et donc de leurs combinaisons linéaires $\frac{\partial u}{\partial n}$ et $\frac{\partial u}{\partial s}$, l'égalité (13) a lieu aussi sur la frontière C du domaine D. Donc, le long du contour fermé C

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_C \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = \int_C dv = 0,$$

en vertu de l'uniformité de la fonction $v(z)$.

42. Propriétés des fonctions harmoniques (suite). Nous considérons ici les questions se rapportant aux points singuliers, aux théorèmes d'unicité et au prolongement analytique des fonctions harmoniques. Commençons par l'étude du comportement des fonctions harmoniques uniformes $u(z)$ au voisinage d'un point singulier isolé. Soit $u(z)$ une fonction uniforme et harmonique dans un voisinage $0 < |z - a| < R$

du point a. Désignons par Γ la constante cyclique de la fonction harmonique $v(z)$ conjuguée de $u(z)$ dans ce voisinage. Puisque l'accroissement d'une branche quelconque de la fonction $iv(z)$, lorsqu'on décrit un contour fermé autour du point a dans le sens positif, est égal à $i\Gamma$ et que l'accroissement, suivant ce même contour, d'une branche quelconque de $\operatorname{Ln}(z-a)$ est égal à $2\pi i$, la fonction

$$f(z) = u(z) + iv(z) - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln}(z-a)$$

se décompose dans notre voisinage en un ensemble de fonctions analytiques uniformes dont les déterminations en tout point fixe se distinguent les unes des autres d'un multiple entier de $i\Gamma$. Donc, la fonction

$$e^{\frac{2\pi}{\Gamma}(u+iv)} = (z-a)\, e^{\frac{2\pi}{\Gamma} f(z)} = g(z)$$

est une fonction analytique uniforme et nous avons ainsi la représentation de la fonction harmonique uniforme u dans un voisinage du point a:

$$u(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |g(z)|. \tag{1}$$

Une représentation du même type est valable également dans le cas de $\Gamma = 0$, car, dans ce cas, la fonction $f(z) = u + iv$ est uniforme et, posant $e^{f(z)} = g(z)$, nous avons

$$u(z) = \ln |g(z)|. \tag{2}$$

La classification des points singuliers isolés des fonctions harmoniques uniformes est basée sur les formules (1) et (2). Les trois théorèmes suivants donnent tous les cas possibles du comportement de ces fonctions au voisinage des points singuliers.

Théorème 1. *Si $u(z)$ est bornée au voisinage d'un point a, alors $\lim\limits_{z \to a} u(z) = b$ existe; posant $u(a) = b$, nous avons une fonction harmonique aussi au point a (point singulier éliminable).*

En effet, dans ce cas, la fonction $g(z)$ dans l'expression (1) ou (2) a au point a un point singulier éliminable, c'est-à-dire que $\lim\limits_{z \to a} g(z)$ existe; cette limite est manifestement non nulle, d'où découle le théorème.

Théorème 2. *Si $u(z)$ tend vers l'infini lorsque $z \to a$, alors au voisinage du point a elle admet une représentation de la forme*

$$u(z) = k \ln |z - a| + U(z), \tag{3}$$

où $k \neq 0$ est une constante et $U(z)$ une fonction harmonique au point a (pôle).

En effet, dans ce cas, la fonction $g(z)$ ne peut avoir au point a qu'un pôle ou un zéro (si $u \to -\infty$). Par conséquent, on peut la

mettre sous la forme

$$g(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

où n est un nombre positif ou négatif et $\varphi(z)$ une fonction analytique au point a avec $\varphi(a) \neq 0$. Substituant dans l'expression (1) ou (2), nous avons la représentation cherchée (3).

Enfin, le théorème suivant est vrai.

Théorème 3. *Si $u(z)$, lorsque $z \to a$, ne tend vers aucune limite, elle est alors entièrement indéterminée au point a : pour tout nombre réel b, on peut trouver une suite de points $z_n \to a$ pour laquelle* $\lim_{n\to\infty} u(z_n) = b$ (*point singulier essentiel*).

En effet, dans ce cas, $g(z)$ ne peut avoir en a qu'un point singulier essentiel, et le théorème est une conséquence immédiate du théorème de Sokhotski (n° 22).

Exemple : $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Tout ce qui vient d'être dit est valable pour le point à l'infini après avoir remplacé le voisinage $0 < |z - a| < R$ par le voisinage $R < |z| < \infty$ et la représentation (3) par la représentation

$$u(z) = k \ln |z| + U(z).$$

L'harmonicité d'une fonction à l'infini signifie que $z = \infty$ est un point singulier éliminable de cette fonction.

Nous ne considérons pas les points singuliers de caractère multiforme $\left(\text{un exemple en est le point } z = 0 \text{ pour la fonction } u = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}\right)$, ainsi que les points singuliers non isolés.

Passons aux théorèmes d'unicité des fonctions harmoniques. Le théorème d'unicité intérieur de la théorie des fonctions analytiques (n° 20) ne s'applique pas entièrement aux fonctions harmoniques, puisque des fonctions harmoniques qui coïncident sur une courbe ne coïncident pas obligatoirement dans un domaine contenant cette courbe. En effet, les fonctions harmoniques prennent chacune de leurs valeurs sur certaines courbes (lignes de niveau) et, par conséquent, coïncident avec des constantes sur des courbes sans être constantes dans un domaine. Toutefois, on a le théorème suivant :

Théorème 4. *Si deux fonctions harmoniques dans un domaine D coïncident dans un domaine d appartenant à D, alors elles coïncident partout dans le domaine D.*

En effet, la différence $u(z)$ de ces fonctions est une fonction harmonique et identiquement nulle dans le domaine d. Construisons dans le domaine D une fonction analytique (peut-être multiforme) $f(z)$ telle que $u = \operatorname{Re} f(z)$. Dans le domaine d, la fonction harmonique $v(z)$ conjuguée de u doit être constante car, en vertu des condi-

tions de Cauchy-Riemann, on a $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ dans ce domaine. Par conséquent, $f(z)$ est constante dans d et, par suite, dans tout le domaine D. Mais alors $u(z)$ est constante dans D et, par conséquent, y est égale à zéro (puisqu'elle est nulle dans d). Le théorème est démontré.

Le théorème d'unicité frontière de la théorie des fonctions analytiques qui stipule qu'une fonction analytique dans un domaine est définie par ses valeurs sur la frontière (cf. n° 14) reste vrai pour les fonctions harmoniques. Pour les fonctions harmoniques, ce théorème est une conséquence immédiate du principe de l'extrémum (théorème 5 du numéro précédent). Pour l'avoir sous des conditions suffisamment générales et commodes pour la pratique, nous démontrons préalablement le *principe généralisé de l'extrémum.*

Théorème 5. *Si une fonction $u(z)$ harmonique et bornée dans un domaine D possède en chaque point ζ de la frontière C de ce domaine, excepté peut-être en un nombre fini de points, une valeur frontière* (*) $u(\zeta)$, *alors, les valeurs de $u(z)$ dans D sont comprises entre les bornes supérieure et inférieure de ses valeurs frontières.*

Soient $M = \sup_C u(\zeta)$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ les points en lesquels $u(\zeta)$ n'existe pas et δ le diamètre du domaine D, c'est-à-dire le maximum de la distance entre deux points du domaine D. Fixons un nombre positif arbitraire ε et considérons la fonction

$$U(z) = M + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{\delta}{|z - \zeta_k|}. \tag{4}$$

Manifestement, la fonction $U(z)$ est harmonique dans le domaine D, partout supérieure à M et continue partout sur $\overline{D}$, sauf aux points ζ_k, en lesquels elle tend vers $+\infty$ lorsqu'on s'approche de ces points. En prenant chacun des points ζ_k pour centre, décrivons un cercle de rayon r suffisamment petit et notons D_r le domaine obtenu du domaine D en retranchant tous ces cercles.

La fonction $U(z) - u(z)$ est non négative sur la partie commune des frontières de D et de D_r et, pour des r suffisamment petits, sur les circonférences $|z - \zeta_k| = r$, car, par hypothèse, la fonction $u(z)$ est bornée et, lorsque $r \to 0$, les valeurs de $U(z)$ sur les circonférences croissent indéfiniment. On en conclut, à l'aide du principe ordinaire de l'extrémum (théorème 5 du numéro précédent), qu'en tout point de D_r et, par conséquent, en tout point de D (**), la fonc-

(*) On dit que la fonction $u(z)$, définie dans un domaine D, *prend la valeur* $u(\zeta)$ au point frontière ζ de ce domaine si, lorsque $z \to \zeta$ suivant des points du domaine, $\lim_{z \to \zeta} u(z) = u(\zeta)$ existe.

(**) En effet, tout point z du domaine D appartient à un domaine D_r pour r suffisamment petit.

tion $U(z) - u(z)$ est non négative. Mais puisque pour z fixe et lorsque $\varepsilon \to 0$, la fonction $U(z) \to M$, il en découle que pour tout point de D on a $|u(z)| \leqslant M$. Or, d'après le théorème 5 du n° 41, la fonction $u(z)$ ne peut prendre dans D de valeur égale à sa valeur maximale M, donc partout dans D on a l'inégalité stricte $u(z) < M$. D'une manière analogue, on démontre que partout dans D l'inégalité $u(z) > m$, où $m = \inf_C u(\zeta)$, est vraie.

Remarque. Pour les fonctions $u(z)$ non bornées le théorème n'est pas vrai. Par exemple, la fonction

$$u(z) = \frac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2} = \operatorname{Re}\left(1 - \frac{2}{z}\right) \tag{5}$$

est harmonique dans le cercle $x^2 + y^2 < 2x$ et nulle partout sur la circonférence de ce cercle, excepté au point $z = 0$, et, néanmoins, elle est différente de zéro dans le cercle.

A présent, on peut démontrer facilement le *théorème d'unicité frontière* dont il a été question plus haut :

Théorème 6. *Soit donnée sur la frontière C d'un domaine D une fonction $u(\zeta)$ continue par morceau avec un nombre fini de points de discontinuité de première espèce $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Il existe au plus une fonction $u(z)$ harmonique et bornée dans le domaine D qui aux points $\zeta \neq \zeta_k$ de la frontière prend des valeurs données $u(\zeta)$.*

En effet, supposons qu'il existe deux fonctions $u_1(z)$ et $u_2(z)$ vérifiant les conditions du théorème. Leur différence

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z)$$

est une fonction harmonique dans le domaine D, bornée et s'annule en tous les points frontières $\zeta \neq \zeta_k$. D'après le théorème 5, toutes les valeurs de $u(z)$ dans D sont comprises entre $\sup u(\zeta)$ et $\inf u(\zeta)$ aux points $\zeta \neq \zeta_k$, c'est-à-dire qu'elles sont nulles. Le théorème est démontré.

Remarquons que dans le théorème 6 le domaine D peut contenir le point à l'infini comme point intérieur ou comme point frontière. Pour des fonctions non bornées, le théorème n'est évidemment pas vrai. Par exemple, dans le cas du cercle $x^2 + y^2 < 2x$ et pour des valeurs frontières nulles (partout excepté en $z = 0$), il existe deux fonctions harmoniques prenant les valeurs données : la fonction (5) et $u \equiv 0$.

Pour terminer, examinons la question du prolongement analytique des fonctions harmoniques. Le principe du prolongement continu (n° 25) ne s'étend pas aux fonctions harmoniques. Par exemple, soient $u_1(z) = y$ dans le demi-cercle unité supérieur, $u_2(z) \equiv 0$ dans le demi-cercle unité inférieur ; alors $u_1 = u_2$ sur le segment $(-1, 1)$. Néanmoins, la fonction $u(z)$ qui coïncide avec u_1 dans le demi-cercle supérieur et avec u_2 dans le demi-cercle inférieur n'est pas harmonique car elle n'a pas de dérivée pour les points du dia-

mètre $y = 0$. Cependant, le principe de symétrie et celui du prolongement analytique (n° 35) restent en vigueur.

Théorème 7. (Principe de symétrie.) *Soit* $u_1(z)$ *une fonction harmonique dans un domaine* D_1 *dont la frontière contient un segment* (α, β) *de l'axe réel et nulle sur ce segment. Alors la fonction*

$$u_2(z) = -u_1(\bar{z}) \tag{6}$$

est harmonique dans le domaine D_2 *symétrique de* D_1 *par rapport à l'axe réel et donne le prolongement analytique de la fonction* $u_1(z)$ *dans* D_2.

En effet, l'harmonicité de $u_2(z)$ dans le domaine D_2 est évidente. Elle découle de l'équation (6) écrite sous la forme $u_2(x, y) = -u_1(x, -y)$, d'où il vient

$$\frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x, -y)}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x, -y)}{\partial y^2}.$$

Il reste à montrer que la fonction

$$u(z) = \begin{cases} u_1(z) & \text{dans } D_1, \\ 0 & \text{sur } (\alpha, \beta), \\ u_2(z) & \text{dans } D_2 \end{cases}$$

est harmonique dans le domaine $D = D_1 \cup (\alpha, \beta) \cup D_2$. La fonction $u(z)$ est continue dans D et sa valeur en un point quelconque z est égale à la moyenne arithmétique de ses valeurs sur une circonférence de rayon suffisamment petit et de centre en z. Pour les points des domaines D_1 et D_2, ceci découle de l'harmonicité de $u_1(z)$ et de $u_2(z)$, pour les points du segment (α, β), où $u(z) = 0$, des considérations de symétrie. Mais alors, d'après le théorème 9 du n° 41, la fonction $u(z)$ est harmonique dans D.

Théorème 8. (Principe du prolongement analytique.) *Si une fonction* $u(z)$ *est harmonique dans un domaine* D *dont la frontière contient un arc de courbe analytique* γ *et si les valeurs de* $u(z)$ *sur cet arc constituent une fonction analytique réelle par rapport à un paramètre, on peut alors prolonger analytiquement la fonction* $u(z)$ *à travers l'arc* γ.

Supposons d'abord que γ soit un segment de l'axe réel des x. Puisque, par hypothèse, la fonction réelle $u(x)$ est analytique sur γ, elle peut être prolongée analytiquement dans le plan complexe (cf. la démonstration du principe du prolongement analytique du n° 35). Désignons ce prolongement par $f_1(z)$; c'est une fonction analytique (complexe) dans un voisinage Δ du segment (α, β) et sa partie réelle $u_1(z)$, fonction harmonique dans Δ, est égale à $u(x)$ sur le segment γ. D'après le théorème 7, la différence $u(z) - u_1(z)$ peut être prolongée analytiquement au-delà de ce segment, précisément

dans un domaine symétrique de l'intersection des domaines D et Δ par rapport au segment γ. Puisque $u_1(z)$ est déjà définie dans ce domaine, ce prolongement donne aussi le prolongement analytique de la fonction $u(z)$ dans ce même domaine. Dans ce cas particulier, le théorème est démontré.

Passant au cas général, supposons que l'arc de courbe γ soit donné par une équation paramétrique $z = z(t)$, où $z(t)$ est une fonction analytique sur le segment (α, β) de l'axe réel et $z'(t) \neq 0$. Par hypothèse, la fonction $u(z(t)) = U(t)$ est aussi analytique sur ce segment. Prolongeons la fonction $z = z(t)$ dans le domaine des valeurs complexes de t contenant le segment (α, β); les valeurs de t seront désignées par ζ et le prolongement obtenu par $z = z(\zeta)$. La fonction $u\{z(\zeta)\} = U(\zeta)$ est harmonique d'un côté du segment (α, β) (cf. le théorème 11 du n° 41) et sur ce segment, où $\zeta = t$, elle prend des valeurs analytiques $U(t)$. Donc, d'après le cas particulier démontré, $U(\zeta)$ se prolonge à travers le segment (α, β) et, en revenant (*) à la variable z, nous obtenons le prolongement analytique de la fonction $u(z)$ à travers l'arc de courbe γ. Le théorème est démontré.

Pour terminer, notons que pour des domaines D_1 et D_2 donnés et pour la partie commune γ donnée de leurs frontières, le prolongement analytique de la fonction harmonique (**) $u_1(z)$ à travers γ dans D_2 est déterminé d'une manière unique. Ceci découle du théorème 4 appliqué aux domaines $d = D_1$ et $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$.

43. Problème de Dirichlet. L'ensemble des fonctions harmoniques n'est autre que l'ensemble de toutes les solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

qui est une des équations aux dérivées partielles du second ordre les plus simples. Tout comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, pour définir complètement une solution de l'équation de Laplace on se donne des conditions complémentaires qui s'énoncent sous forme de *conditions aux limites*, c'est-à-dire sous forme de relations que doit vérifier la solution cherchée sur la frontière du domaine.

La plus simple de ces conditions se ramène à se donner les valeurs de la fonction harmonique inconnue en chaque point de la frontière

---

(*)Pour revenir à la variable z, il faut dans $U(\zeta)$ remplacer ζ par $\zeta(z)$, où $\zeta(z)$ est la fonction inverse de $z(\zeta)$. La fonction $\zeta(z)$ est uniforme et analytique dans un voisinage de γ car, sur (α, β), par hypothèse $z'(t) \neq 0$.

(**) Pour le prolongement analytique des fonctions harmoniques la définition du n° 25 est conservée si l'on remplace « analytique » par « harmonique ».

d'un domaine. Ainsi, nous sommes conduits au premier problème aux limites ou *problème de Dirichlet* (*):

Trouver une fonction $u(z)$ harmonique dans un domaine D et continue sur $\overline{D}$, qui sur la frontière de D prend des valeurs continues $u(\zeta)$ données.

On retrouve le problème de Dirichlet si, par exemple, on veut déterminer la température d'un champ thermique ou le potentiel d'un champ électrostatique dans un domaine lorsqu'on se donne la température ou le potentiel sur la frontière du domaine. Comme nous le verrons plus loin, s'y ramènent aussi des problèmes aux limites d'autres types.

Dans les applications, la condition de continuité des valeurs frontières $\widetilde{u}(\zeta)$ est trop restrictive et on est amené à considérer le *problème généralisé de Dirichlet*:

On se donne une fonction $u(\zeta)$ continue partout sur la frontière C d'un domaine D, excepté en un nombre fini de points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, en lesquels elle a des points de discontinuité de première espèce. Trouver une fonction $u(z)$ harmonique et bornée dans le domaine D, qui prend les valeurs $u(\zeta)$ en tous les points de continuité de cette fonction (**).

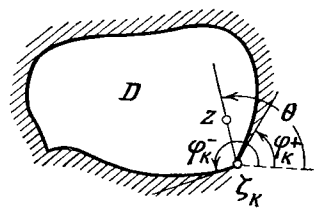

FIG. 97

Le théorème 6 du n° 42 peut à présent être énoncé comme un *théorème d'unicité* de la solution du problème généralisé de Dirichlet.

Théorème 1. *Dans un domaine donné, pour les valeurs données de la fonction $u(\zeta)$ sur la frontière, il existe au plus une solution du problème généralisé de Dirichlet.*

La résolution du problème généralisé de Dirichlet peut être ramenée à l'aide d'un procédé à la résolution du problème classique; pour plus de simplicité, nous considérons le cas des domaines simplement connexes. Désignons par $u^-(\zeta_k)$ et $u^+(\zeta_k)$ les valeurs limites de $u(\zeta)$, lorsque ζ tend vers le point ζ_k le long de C respectivement dans le sens positif et négatif, et par $h_k = u^+(\zeta_k) - u^-(\zeta_k)$ le saut de $u(\zeta)$ au point ζ_k. Pour plus de généralité, supposons que ζ_k soit un point anguleux du contour C et désignons par φ_k^- et φ_k^+ les angles formés par l'axe des x et les tangentes à C au point ζ_k (fig. 97); soit encore $\alpha_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-$ (si ζ_k n'est pas un point anguleux, alors $\alpha_k = -\pi$). Considérons la fonction $u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k} \arg(z - \zeta_k)$, où

(*) Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

(**) Si la fonction donnée $u(\zeta)$ est continue, alors le problème généralisé de Dirichlet coïncide avec le problème classique puisque la condition d'après laquelle la fonction $u(z)$ est bornée découle automatiquement de sa continuité sur $\overline{D}$.

arg désigne une branche de l'argument choisie de manière convenable. Cette fonction est évidemment harmonique dans le domaine D et continue partout sur $\overline{D}$, excepté au point $\zeta = \zeta_k$. Lorsque $z \to \zeta_k$ suivant un chemin dont la tangente au point ζ_k fait avec l'axe des x un angle θ (la valeur de θ est comprise entre φ_k^- et φ_k^+), cette fonction tend vers la limite $\frac{h_k}{\alpha_k}\theta$. Lorsqu'en décrivant la courbe C dans le sens positif on passe par le point ζ_k, la fonction $u_k(\zeta)$ a un saut $\frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^+ - \frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^- = h_k$.

Soit maintenant $u(z)$ la solution du problème généralisé de Dirichlet pour les valeurs frontières $u(\zeta)$. Considérons la fonction

$$U(z) = u(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\alpha_k} \arg(z - \zeta_k); \tag{2}$$

elle est harmonique dans le domaine D et continue sur $\overline{D}$. En effet, la fonction $u(z)$ et toutes les fonctions $u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k)$ sont harmoniques dans D. Les valeurs limites de $U(z)$, lorsque $z \to \zeta \neq \zeta_k$, sont

$$U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta), \tag{3}$$

et la fonction $U(\zeta)$ est continue en chaque point ζ_k, car, par construction de $U(\zeta)$, nous avons retranché de la fonction $u(\zeta)$, de saut h_k au point ζ_k, la fonction $u_k(\zeta)$ de même saut, et les autres termes de la somme (3) sont continus en ce point.

Ainsi, la solution du problème généralisé de Dirichlet $u(z)$ peut réellement être représentée comme la somme de la fonction $U(z)$, donnant la solution du problème de Dirichlet avec des valeurs frontières continues $U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta)$, et de la fonction $\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$:

$$u(z) = U(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\alpha_k} \arg(z - \zeta_k). \tag{4}$$

D'après le théorème 1, la solution trouvée est unique.

Le théorème suivant qui caractérise le comportement de la solution au voisinage du point ζ_k découle de la formule (4).

Théorème 2. *Lorsque le point z tend vers un point de discontinuité ζ_k de la fonction $u(\zeta)$ sur la frontière suivant différents chemins, la solution $u(z)$ du problème généralisé de Dirichlet peut tendre vers toute limite comprise entre $u^-(\zeta_k)$ et $u^+(\zeta_k)$.*

En effet, soit $z \to \zeta_k$ suivant un chemin dont la tangente au point ζ_k forme avec l'axe des x l'angle θ. Il découle de la formule (4) que $u(z)$ tend alors vers la limite

$$u_\theta(\zeta_k) = \tilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}\theta, \tag{5}$$

où $\tilde{u}(\zeta_k)$ est la valeur limite de la somme de $U(z)$ et de toutes les fonctions $u_\nu(z)$, excepté $u_k(z)$, ne dépendant pas de la façon dont le point z tend vers le point ζ_k. En particulier, tendant vers le point ζ_k le long de la courbe C dans le sens négatif, nous avons $u^+(\zeta_k) = \tilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^+$, ce qui nous permet d'écrire la formule (5) sous la forme

$$u_\theta(\zeta_k) = u^+(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}(\theta - \varphi_k^+).$$

D'où il découle le théorème 2 (cf. fig. 97).

Passons à la résolution du problème de Dirichlet pour un domaine simplement connexe quelconque D. Considérons d'abord le cas où D est le cercle unité $|z| < 1$. Dans ce cas, la résolution est basée sur le lemme suivant:

Lemme. *Soit $U(z, \zeta)$ une fonction réelle, avec*

$$z = re^{i\varphi}, \quad \zeta = e^{it}, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi, \quad t < 2\pi,$$

1) *continue et non négative,*
2) *pour tout z*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z, \zeta)\, dt = 1, \tag{6}$$

3) *lorsque $z \to \zeta_0 = e^{it_0}$ (ζ_0 est un point quelconque de la circonférence) et $\zeta \neq \zeta_0$, la fonction $U(z, \zeta)$ tend vers zéro uniformément en ζ (*).*

Alors, pour toute fonction réelle $u(\zeta)$ continue par morceau avec des points de discontinuité de première espèce, en tout point de continuité ζ_0, la limite

$$\lim_{z \to \zeta_0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\, U(z, \zeta)\, dt = u(\zeta_0) \tag{7}$$

existe.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons avant tout recours à la condition 2) et nous représenterons la différence entre l'intégrale

(*) Le sens exact de la condition 3) est le suivant : pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe des nombres $\rho < 1$ et $\delta > 0$ tels que pour $r > 1 - \rho$ et $|\varphi - t_0| < \delta$, pour tous les t vérifiant l'inégalité $|t - t_0| > 2\delta$, l'inégalité $0 \leqslant U(z, \zeta) < \varepsilon$ est vraie.

du premier membre de (7) et sa limite supposée sous la forme

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u(\zeta) - u(\zeta_0)\}\, U(z, \zeta)\, dt.$$

Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$ et, en vertu de la continuité de $u(\zeta)$ au point ζ_0, choisissons $\delta > 0$ de manière que pour $|t - t_0| < 2\delta$ on ait $|u(\zeta) - u(\zeta_0)| < \varepsilon$ (fig. 98). Nous avons

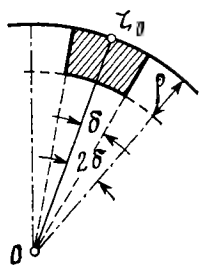

FIG. 98

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0|<2\delta} + \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0|\geq 2\delta},$$

où les intégrales sont prises le long des arcs de la circonférence unité dont les arguments des points satisfont aux inégalités correspondantes. Appliquant à la première intégrale le théorème de la moyenne (*) et en utilisant de nouveau les conditions 1) et 2), nous obtenons :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0|<2\delta} \{u(\zeta) - u(\zeta_0)\}\, U(z, \zeta)\, dt \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|t-t_0|<2\delta} U(z, \zeta)\, dt < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z, \zeta)\, dt = \varepsilon. \qquad (8)$$

Supposons maintenant que $|\varphi - t_0| < \delta$, alors, pour toutes les valeurs de t dans les intervalles $|t - t_0| > 2\delta$, nous avons $|\varphi - t| > \delta$ et, en vertu de la condition 3), il existe un nombre $\rho < 1$ tel que pour tous les t et $r > 1 - \rho$ l'inégalité $U(z, \zeta) < \varepsilon$ est satisfaite (cf. le renvoi de la page 219). Ainsi, pour tous les z dans le domaine hachuré sur la fig. 98 (tels que $|\varphi - t_0| < \delta$, $r > 1 - \rho$) nous avons :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0|>2\delta} \{u(\zeta) - u(\zeta_0)\}\, U(z, \zeta)\, dt \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2M(2\pi - 2\delta) < 2\varepsilon M, \qquad (9)$$

où M est le maximum de $|u(\zeta)|$ sur la circonférence. En additionnant les inégalités obtenues (8) et (9), nous trouvons que pour tous les z dans le domaine hachuré $|\Delta| \leqslant (1 + 2M)\,\varepsilon$, et le lemme est démontré.

(*) Cf. *Fikhtengoltz*, t. II, p. 133 ; le théorème peut être appliqué car $U(z, \zeta) \geqslant 0$.

Passons à la résolution du problème de Dirichlet pour le cercle. Pour cela remarquons que la fonction $U(z, \zeta)$ du lemme peut être obtenue géométriquement comme la partie réelle de la représentation conforme du cercle $|z|<1$ sur le demi-plan de droite $\operatorname{Re} w > 0$:

$$U(z, \zeta) = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \varphi) + r^2}. \qquad (10)$$

En effet, les conditions 1) et 3) sont évidemment vérifiées et la condition 2) aussi si on sépare les parties réelles dans l'égalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,\frac{d\zeta}{\zeta} = 1,$$

que l'on démontre simplement à l'aide du théorème des résidus (n° 23) (la fonction $\frac{\zeta + z}{(\zeta - z)\zeta}$ a dans le cercle unité deux pôles: $\zeta = 0$ de résidu -1 et $\zeta = z$ de résidu 2).

Maintenant il n'est pas difficile de démontrer que la *solution du problème généralisé de Dirichlet pour le cercle unité est donnée par l'intégrale* (S. Poisson, 1823):

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\,\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \varphi) + r^2}\, dt \quad (z = re^{i\varphi}). \qquad (11)$$

En effet, la fonction $u(z)$, définie par l'intégrale (11), est la partie réelle de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, dt + iC \quad (\zeta = e^{it}), \qquad (12)$$

qui est analytique dans le cercle unité en vertu du théorème 4 du n° 16; donc, $u(z)$ est harmonique dans le cercle unité. Elle est bornée, car de (11) il découle que

$$|u(z)| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \varphi) + r^2}\, dt = M,$$

où M est le maximum de $|u(\zeta)|$ sur la circonférence (d'après la propriété 2) de la fonction (10)). Enfin d'après le lemme précédent, lorsque z tend vers un point de continuité quelconque ζ de $u(\zeta)$, la fonction $u(z)$ tend vers $u(\zeta)$, ce qu'il fallait démontrer.

A présent il n'est plus difficile de démontrer que le problème généralisé de Dirichlet est résoluble pour les domaines simplement connexes quelconques.

Théorème 3. *Pour tout domaine simplement connexe D et pour toute fonction continue par morceau $u(\zeta)$ sur la frontière avec des points de discontinuité de première espèce, la solution du problème généralisé de Dirichlet existe.*

En effet, en vertu du théorème fondamental du n° 28 il existe une représentation conforme $w = w(z)$ du domaine D sur le cercle unité $|w| < 1$. Les valeurs continues par morceau $u(\zeta)$ données sur la frontière de D deviennent des valeurs continues par morceau $u[z(\omega)] = U(\omega)$ sur la circonférence unité, où $z = z(w)$ est la fonction inverse de $w = w(z)$. Avec ces valeurs frontières et à l'aide de l'intégrale de Poisson (11) on peut construire une fonction $U(w)$ harmonique dans le cercle $|w| < 1$. Alors, d'après le théorème 11 du n° 41, la fonction

$$u(z) = U[w(z)] \tag{13}$$

est harmonique dans le domaine D. Elle est bornée en même temps que $U(w)$ et, lorsque z tend vers un point de continuité ζ de la fonction donnée $u(\zeta)$, elle tend vers la valeur $u(\zeta) = U[w(\zeta)]$, car le point $w = w(z)$ tend vers le point de continuité $\omega = w(\zeta)$ de la fonction $U(\omega)$. Ainsi, la fonction (13) donne la solution du problème généralisé de Dirichlet pour le domaine D. Le théorème est démontré.

Si la frontière C du domaine D n'a pas de branches infinies et possède une courbure continue, alors la solution du problème généralisé de Dirichlet peut être exprimée par une formule compacte. Pour établir cette formule, fixons un point arbitraire z_0 dans le domaine D et notons

$$w = f(z, z_0); \quad f(z_0, z_0) = 0 \tag{14}$$

la fonction qui réalise la transformation de D sur le cercle unité $|w| < 1$. En passant, comme dans la démonstration du théorème 3, à un plan des w, nous pouvons représenter la solution du problème de Dirichlet à l'aide de l'intégrale de Poisson. En particulier, usant des notations introduites dans cette démonstration, nous avons au centre du cercle $w = 0$

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\omega)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|=1} U(\omega)\,d\sigma, \tag{15}$$

où $\omega = e^{i\tau}$ et $d\sigma = d\tau$ est la longueur de l'élément d'arc de circonférence $|\omega| = 1$.

Dans nos conditions, d'après le théorème 1 du n° 29, la fonction (14) possède une dérivée continue sur la frontière et, par conséquent,

$$d\sigma = |f'(\zeta; z_0)|\,ds,$$

où ds est la longueur de l'élément d'arc de C correspondant à $d\sigma$. Désignons par dn l'élément de la normale *intérieure* à C et par $d\rho$ l'élément du rayon de la circonférence $|\omega| = 1$ qui lui correspond; alors nous avons $|f'(\zeta, z_0)|\, dn = -d\rho$. Puisque $\rho = |f(\zeta; z_0)| = 1$ sur C, on peut écrire $d\rho = \frac{d\rho}{\rho} = d \ln \rho$ et $|f'(\zeta; z_0)| = -\frac{d\rho}{dn} = -\frac{d \ln \rho}{dn} = \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\rho}$, où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée suivant la normale intérieure à C. Substituant cette dernière dans l'expression de $d\sigma$, trouvée ci-dessus, nous avons:

$$d\sigma = \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|f(\zeta; z_0)|}\, ds. \tag{16}$$

Revenons maintenant à la variable z dans la formule (15). Tenant compte des conditions (14), d'après lesquelles le point $w = 0$ correspond à z_0, et de la relation (16), nous obtenons:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|f(\zeta; z_0)|}\, ds. \tag{17}$$

La fonction

$$g(z; z_0) = \ln \frac{1}{|f(z; z_0)|} \tag{18}$$

est la *fonction de Green* (1793-1841) associée au domaine D. Elle est évidemment harmonique partout dans D, excepté au point z_0, en lequel elle a un pôle. Introduisant cette fonction dans (17) et remplaçant z_0 par z, nous trouvons la formule cherchée qui résout le problème généralisé de Dirichlet:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n}\, ds \tag{19}$$

($\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée suivant la normale *intérieure*).

La formule de Green (1828) donne la solution du problème de Dirichlet pour un domaine D par l'intermédiaire du logarithme du module de la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine D sur le cercle unité, c'est-à-dire qu'elle ramène la solution du problème de Dirichlet à un problème de représentation conforme. Inversement, il s'avère que si pour un domaine D on connaît la solution du problème de Dirichlet, on peut alors construire la représentation conforme de ce domaine sur le cercle unité.

En effet, d'après le théorème fondamental, une telle représentation $w = f(z, z_0)$, $f(z_0, z_0) = 0$ existe. Supposons d'abord que nous connaissons cette représentation et considérons la fonction

$$F(z) = \frac{f(z, z_0)}{z - z_0}, \qquad F(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z, z_0)}{z - z_0} = f'(z_0, z_0).$$

Elle est évidemment analytique et différente de zéro partout dans le domaine D (la fonction $f(z, z_0)$ n'est nulle que pour $z = z_0$ et $f'(z, z_0) \neq 0$ puisqu'elle réalise une transformation conforme). Donc la fonction $U(z) = \ln |F(z)|$ est harmonique dans le domaine D. Ses valeurs sur la frontière C de ce domaine

$$U(\zeta) = \ln \left| \frac{f(\zeta, z_0)}{\zeta - z_0} \right| = \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|}$$

ne dépendent pas de la forme de la fonction $f(z, z_0)$, car $|f(\zeta, z_0)| = 1$ sur C.

Supposons maintenant que la fonction $f(z, z_0)$ soit inconnue. D'après les valeurs frontières données de la fonction harmonique $U(\zeta)$, nous pouvons construire les valeurs de $U(z)$ dans D (problème de Dirichlet) d'une manière unique. Ensuite, à l'aide d'une intégration, on construit une fonction harmonique conjuguée $V(z)$; on la trouve à une constante additive α près. Ainsi, nous trouvons la fonction $\ln G(z) = U(z) + iV(z) + i\alpha$, puis la représentation conforme cherchée

$$f(z, z_0) = (z - z_0)\, e^{G(z)} = e^{i\alpha}\, (z - z_0)\, e^{U(z) + iV(z)}. \qquad (20)$$

Elle est définie à une rotation près, ce qui correspond aux conditions (14).

Ainsi, le *problème de la représentation conforme d'un domaine sur le cercle unité et le problème de Dirichlet pour ce même domaine sont équivalents*: *ils se ramènent l'un à l'autre à l'aide de simples opérations de dérivation et d'intégration.*

Le problème de la transformation du domaine D sur la bande $0 < v < 1$:

$$w = f(z); \quad f(z_1) = -\infty, \quad f(z_2) = 0, \quad f(z_3) = \infty$$

se ramène d'une manière encore plus simple au problème généralisé de Dirichlet. Nous cherchons une fonction harmonique $v(z)$ vérifiant les conditions: $v(\zeta) = 0$ sur l'arc $z_1 z_2 z_3$ de la frontière C et $v(\zeta) = 1$ sur la partie restante de C, puis nous construisons une fonction conjuguée $u(z)$ vérifiant la condition $u(z_2) = 0$. La fonction $f(z) = u(z) + iv(z)$ est la fonction cherchée.

44. Exemples. Compléments. 1) Intégrale de Schwarz. L'intégrale (12) du numéro précédent

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, dt + iC \qquad (\zeta = e^{it}), \qquad (1)$$

où C est une constante réelle, résout le problème suivant: *détermine*r *une fonction analytique dans le cercle* $|z| < 1$ *dont la partie réelle sur la circonférence prend des valeurs données* $u(\zeta)$ *en chaque point de continuité de la fonction* $u(\zeta)$ (H. Schwarz, 1869).

En effet, d'après le théorème d'unicité de la solution du problème de Dirichlet, la partie réelle $u(z)$ de la fonction $f(z)$ est complètement déterminée par ses valeurs frontières, et il découle des équations de Cauchy-Riemann que la partie imaginaire $v(z)$ de cette fonction est définie à une constante additive près. Ainsi, la formule (1), pour différentes C, renferme toutes les solutions du problème posé.

Faisant dans cette formule $z = 0$ et usant du théorème de la moyenne, nous obtenons que le terme qui contient l'intégrale est égal à $u(0)$; nous pouvons donc affirmer que $C = v(0)$.

En séparant dans l'intégrale de Schwarz les parties imaginaires nous obtenons l'*expression de la fonction harmonique $v(z)$ au moyen des valeurs frontières de la fonction conjuguée* :

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{2r \sin(\varphi - t)}{1 - 2r\cos(\varphi - t) + r^2}\, dt + C. \tag{2}$$

Si nous utilisons la méthode du n° 41 pour construire une fonction analytique en partant de sa partie réelle (formule (9) du n° 41) ; nous obtenons alors une intégrale qui résout le même problème que l'intégrale de Schwarz mais qui en diffère un peu. Conformément à ce qui a été dit (n° 41) faisons $z_0 = 0$; nous avons alors :

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 0,$$

$$2r\cos(\varphi - t) = \frac{re^{i\varphi}}{e^{it}} + \frac{re^{it}}{e^{i\varphi}} = \frac{z}{\zeta} + \frac{r^2\zeta}{z} = \frac{z}{\zeta}, \qquad dt = -i\frac{d\zeta}{\zeta}$$

(tout comme plus haut nous prenons $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = e^{it}$). Substituant dans l'intégrale de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - t)}\, dt,$$

d'après la formule (9) du n° 41, nous trouvons :

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \overline{f(0)} = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=1} u(\zeta) \frac{-i\, d\zeta}{\zeta\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)} - \overline{f(0)},$$

ou finalement

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{u(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \overline{f(0)}. \tag{3}$$

2) Problème de Dirichlet pour un demi-plan. Soit donnée sur l'axe réel une fonction $u(t)$ bornée et possédant un nombre fini de points de discontinuité. Pour trouver la valeur au point z d'une fonction $u(z)$ harmonique dans le demi-plan

supérieur et qui prend des valeurs données sur l'axe, nous réalisons la représentation conforme

$$\omega = \frac{\zeta - z}{\zeta - \bar{z}}$$

du demi-plan Im $\zeta > 0$ sur le cercle $|\omega| < 1$. Puisque par cette transformation le point z a pour image le point $\omega = 0$, d'après le théorème de la moyenne,

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega)\, d\tau, \tag{4}$$

où $u[\zeta(\omega)] = U(\omega)$ et τ est l'argument d'un point de la circonférence :

$$e^{i\tau} = \frac{t - z}{t - \bar{z}}.$$

Différentiant cette dernière égalité, nous trouvons $e^{i\tau} d\tau = \frac{2y}{(t-\bar{z})^2}\, dt$, d'où $d\tau = \frac{2y\, dt}{(t-z)(t-\bar{z})} = \frac{2y\, dt}{(t-x)^2 + y^2}$; en revenant dans (4) aux anciennes variables z et t nous aboutissons à l'*intégrale de Poisson pour le demi-plan supérieur* :

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{y\, dt}{(t-x)^2 + y^2}. \tag{5}$$

Comme il est évident que

$$\frac{y}{(t-x)^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{i(t-z)},$$

on peut écrire l'*intégrale de Schwarz pour le demi-plan* sous la forme suivante :

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{dt}{t-z} + iC, \tag{6}$$

où C est une constante réelle. Il faut cependant avoir en vue que l'intégrale (5) converge pour les fonctions bornées $u(t)$, alors que le fait que la fonction $u(t)$ soit bornée est insuffisant pour la convergence de l'intégrale (6) (*). Pour la convergence de cette intégrale il suffit, par exemple, que la fonction $u(t)$ tende vers 0 au moins comme $\frac{1}{|t|^{\alpha}}$, où $\alpha > 0$ est une constante arbitraire, lorsque $|t| \to \infty$.

Donnons quelques exemples. On obtient directement de la formule (5) une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur

(*) Cela s'explique par le fait que l'intégrale de la partie imaginaire de la fonction à intégrer dans (6) converge plus lentement que l'intégrale (5).

égale à 1 sur le segment (α, β) de l'axe réel et à 0 sur l'autre partie de cet axe :

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{y\,dt}{(t-x)^2+y^2} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta - x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha - x}{y} \right).$$

Si l'on introduit les angles φ_α et φ_β formés par les vecteurs $z - \alpha$ et $z - \beta$ et l'axe réel des x, on peut alors écrire :

$$u(z) = \frac{\varphi_\beta - \varphi_\alpha}{\pi} = \frac{\omega}{\pi} \tag{7}$$

(on voit de la fig. 99 que $\varphi_\beta = \varphi_\alpha + \omega$). Ainsi, la fonction $u(z)$ est égale à l'angle ω, sous lequel on voit du point z le segment de droite $\overline{\alpha\beta}$, divisé par π. On peut appliquer ici la formule de Schwarz et elle donne

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{\beta - z}{\alpha - z}. \tag{8}$$

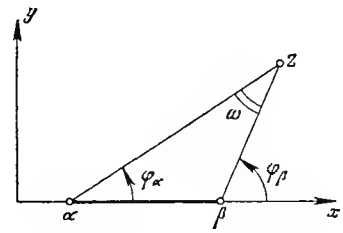

FIG. 99

Soient donnés maintenant des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \infty)$ de l'axe réel et on demande de déterminer une fonction $u(z)$ harmonique dans le demi-plan supérieur prenant respectivement sur les segments $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_n, \infty)$ des valeurs constantes $u_0, u_1, \ldots, u_n$. Le problème se résout en appliquant la formule (7) :

$$u(z) = \frac{\varphi_1 u_0}{\pi} + \frac{u_1}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + \frac{u_n}{\pi}(\pi - \varphi_n),$$

ou, après regroupement des termes,

$$u(z) = \frac{\varphi_1}{\pi}(u_0 - u_1) + \frac{\varphi_2}{\pi}(u_1 - u_2) + \ldots + \frac{\varphi_n}{\pi}(u_{n-1} - u_n) + u_n. \tag{9}$$

3) Intégrale de Schwarz-Christoffel. Comme exemple d'application des formules obtenues donnons une démonstration beaucoup plus simple de l'intégrale de Schwarz-Christoffel que celle du n° 37 ; nous conservons les notations qui y ont été adoptées. Considérons une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur

$$u(z) = \arg f'(z) = \operatorname{Im} \ln f'(z).$$

Il vient de l'interprétation géométrique de la dérivée de la fonction qui réalise la représentation conforme que sur les segments $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_n, \infty)$ cette fonction prend des valeurs constantes $u_0, u_1, \ldots, u_n$ puisque ces segments ont pour images

des segments de droite qui ne sont autres que les côtés du polygone. Sur les segments $(-\infty, a_1)$ et (a_n, ∞) $u_0 = u_n = \alpha - \pi = \theta$, où α est l'angle du segment de droite A_1A_n et de l'axe des u. Lorsqu'on passe par le point a_k, la fonction $u(t)$ augmente de $(1 - \alpha_k)\pi$, car le segment de droite A_kA_{k+1} s'obtient du segment de droite $A_{k-1}A_k$ par une rotation de cet angle dans le sens positif (cf. fig. 80), donc, $u_{k-1} - u_k = (\alpha_k - 1)\pi$. D'après la formule (9), nous trouvons alors

$$u(z) = (\alpha_1 - 1)\varphi_1 + (\alpha_2 - 1)\varphi_2 + \ldots + (\alpha_n - 1)\varphi_n + \theta = \theta + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) \arg (z - a_k).$$

Connaissant la partie imaginaire on construit facilement la fonction analytique

$$\ln f'(z) = \ln C_0 + i\theta + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) \ln (z - a_k),$$

d'où, en se libérant des logarithmes et en intégrant, nous trouvons la représentation conforme cherchée

$$f(z) = C_0 e^{i\theta} \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}\, dz + C_1 \qquad (10)$$

(C_0 est une constante positive, C_1 une constante complexe).

4) Intégrale de Schwarz pour la bande $-h < \operatorname{Im} z < h$. L'intégrale de Schwarz pour le cercle $|w| < 1$ a la forme

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\omega) \frac{\omega + w}{\omega - w}\, d\tau + iC, \qquad (11)$$

où $\omega = e^{i\tau}$ (cf. formule (1)). Considérons la représentation conforme $w = w(z) = \operatorname{th} \frac{\pi z}{4h}$ du cercle $|w| < 1$ sur la bande $-h < \operatorname{Im} z < h$ qui fait respectivement correspondre aux demi-circonférences inférieure et supérieure les bords inférieur et supérieur de la bande (cf. la formule (5) du n° 33) et notons $F[w(z)] = f(z)$, $U[w(z)] = u(z)$. Nous avons sur le bord inférieur de la bande, lorsque $\zeta = t - hi$,

$$\omega = e^{i\tau} = \operatorname{th} \frac{\pi}{4h} (t - hi) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2h} - i}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h}} \qquad (-\pi < \tau < 0),$$

d'où $\tau = \frac{1}{i} \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2h} - i}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h}}$ et $d\tau = \frac{\pi dt}{2h \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h}}$. D'une manière analogue,

nous avons sur le bord supérieur $\omega = e^{i\tau} = \operatorname{th}\frac{\pi}{4h}(t+hi) = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2h}+i}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}}$ $(0<\tau<\pi)$, d'où $d\tau = -\dfrac{\pi dt}{2h\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}}$. En substituant dans la formule (11), nous avons:

$$f(z) = \frac{1}{4h}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u_-(t)\,\frac{s_t - i + t_z\cdot c_t}{s_t - i - t_z\cdot c_t}\,\frac{dt}{c_t} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} u_+(t)\,\frac{s_t + i + t_z c_t}{s_t + i - t_z c_t}\,\frac{dt}{c_t}\right\} + iC,$$

où $u_\pm(t)$ désignent les valeurs de $u(\zeta)$ aux points $\zeta = t \pm ih$, s_t et c_t sont les sinus et cosinus hyperboliques de $\frac{\pi t}{2h}$, $t_z = \operatorname{th}\frac{\pi z}{4h}$. Après de simples transformations nous obtenons (*):

$$f(z) = \frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_+(t)+u_-(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2h}(t-z)}\,dt -$$

$$-\frac{i}{4h}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_+(t)-u_-(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\operatorname{ch}\frac{\pi(t-z)}{2h}}\,dt + iC. \qquad (12)$$

Pour la bande $0<y<1$ cette formule peut être écrite également sous la forme

$$f(z) = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t)\operatorname{cth}\frac{\pi(t-z)}{2}\,dt + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)\operatorname{th}\frac{\pi(t-z)}{2}\,dt. \qquad (13)$$

5) Formule de Cisotti (1921). Cette formule donne l'expression de la représentation conforme $w = f(z)$ du cercle $|z|<1$ sur un domaine simplement connexe quelconque D de frontière C si en chaque point $z = e^{it}$ de la circonférence on se donne l'angle $\vartheta = \vartheta(t)$ de la tangente à C au point w qui correspond à z et de l'axe des x. Soient $dz = ie^{it}dt$ et $dw = |dw|\,e^{i\vartheta}$ les éléments des arcs de circonférence et de courbe C qui se correspondent par la représentation conforme. Alors sur la circonférence $i\frac{dw}{dz} = e^{i(\vartheta-t)}\frac{|dw|}{dt}$.

(*) D'ordinaire cette formule est connue sous le nom de formule de *Palatini*. Ce dernier l'a publiée en 1915 ; sous une forme modifiée on la trouve dans un travail de *Д. А. Граве*, «Об основных задачах математической теории построения географических карт» (Петербург, 1896).

Puisque $f(z)$ réalise la représentation conforme, $\frac{dw}{dz} \neq 0$ et la fonction $-i \ln \left[i \frac{dw}{dz}\right]$ est régulière dans le cercle $|z| < 1$; de plus, d'après ce qui vient d'être dit, sa partie réelle sur la circonférence $|z| = 1$ est égale à $\vartheta - t$. D'autre part, d'après des considérations géométriques élémentaires, on voit facilement que sur la circonférence

$$\operatorname{Re}\{-i \ln [-(1-z)^2]\} = \pi + 2\arg(1-z) = t$$

(cf. la fig. 100, où on a posé $\arg(1-z) = \varphi$). Donc, la partie réelle de la fonction régulière dans le cercle $|z| < 1$

$$g(z) = -i \ln\left[-i(1-z)^2 \frac{dw}{dz}\right] \tag{14}$$

coïncide avec ϑ sur la circonférence $|z| = 1$. Si la fonction $\vartheta(t)$ est connue, alors la fonction $g(z)$ est donnée par l'intégrale de Schwarz

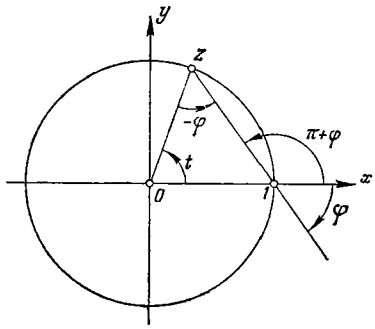

FIG. 100

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vartheta(t) \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dt + iA, \tag{15}$$

où A est une constante réelle. Connaissant $g(z)$, nous trouvons de (14) la représentation conforme cherchée

$$w = f(z) = i \int_{z_0}^{z} \frac{e^{ig(z)}\, dz}{(1-z)^2} + w_0. \tag{16}$$

En général, la fonction $\vartheta(t)$ n'est pas connue et la formule de Cisotti (16) ne donne pas une solution effective du problème de représentation conforme. Certes, cette formule s'avère utile chaque fois que l'on connaît la fonction $\vartheta(t)$ à partir de certaines considérations. Par exemple, pour le problème de la représentation d'un cercle sur un polygone, $\vartheta(t)$ est égale à une constante connue sur chaque arc de circonférence qui correspond à un côté du polygone, et pour cette raison la formule de Schwarz-Christoffel s'obtient très facilement à partir de la formule de Cisotti.

6) Problème de Neumann. De même que le problème de Dirichlet, on doit pour certaines applications importantes considérer le *deuxième problème aux limites* ou *problème de Neumann* (1832-1925).

Déterminer une fonction $u(z)$ harmonique dans un domaine D connaissant les valeurs de sa dérivée normale sur la frontière C :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha = g(\zeta) \tag{17}$$

et $u(z_0)$ en un point quelconque z_0 du domaine $\overline{D}$.

Pour fixer les idées nous supposons que l'on considère dans (17) la normale *extérieure* et que α désigne l'angle formé par cette normale et l'axe des x. La fonction $g(\zeta)$ peut avoir sur C un nombre fini de points de discontinuité de première espèce, la fonction u et ses dérivées partielles premières sont supposées bornées.

Il découle du théorème 12 du n° 41 que pour que le problème de Neumann soit résoluble, il est nécessaire que la relation

$$\int_C g(\zeta)\, ds = 0 \tag{18}$$

soit satisfaite. Démontrons l'unicité de la solution du problème de Neumann. Remarquons d'abord qu'à l'aide d'une représentation conforme auxiliaire $z = f(z_1)$ du demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z_1 > 0$ sur le domaine D, le problème de Neumann pour D se ramène au même problème pour le demi-plan supérieur. En effet, soit $u(z)$ la solution du problème de Neumann pour le domaine D et avec la fonction donnée $g(\zeta)$ sur la frontière. La fonction

$$u_1(z_1) = u[f(z_1)]$$

est harmonique dans le demi-plan supérieur. Puisque par la représentation conforme la direction de la normale intérieure à C coïncide avec celle de l'axe positif $y_1 = \operatorname{Im} z_1$ (partout, sauf aux points anguleux du contour C qui, d'après notre supposition, sont en nombre fini) et comme le rapport de l'élément de longueur de la normale dn à l'élément correspondant dy_1 est égal à la dilatation de la transformation, c'est-à-dire à $|f'(x_1)|$, sur l'axe $x_1 = \operatorname{Re} z_1$ nous avons

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{f(x_1)} \cdot |f'(x_1)| = g[f(x_1)] \cdot |f'(x_1)| = g_1(x_1).$$

La fonction $g_1(x_1)$ est partout continue sur l'axe des x_1, excepté en un nombre fini de points qui correspondent aux points anguleux de la courbe C et en un nombre fini de points de discontinuité de la fonction $g[f(x_1)]$; elle est entièrement définie par la représentation conforme et la fonction donnée sur la frontière. Si maintenant, ne connaissant pas $u(z)$, on résout le problème de Neumann pour le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z_1 > 0$ et la fonction $g_1(x_1)$, il est alors évident que $u_1[\varphi(z)]$, où $z_1 = \varphi(z)$ est la transformation inverse de $z = f(z_1)$, est la solution du problème de Neumann pour le domaine D.

Le raisonnement que l'on vient de donner montre que, pour la démonstration de l'unicité de la solution du problème de Neumann, on peut se limiter au cas où le domaine D est un demi-plan. Supposons que l'on ait deux solutions $u_1(z)$ et $u_2(z)$ du problème de Neumann; alors leur différence $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ est une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur, en outre sur l'axe des x sa dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ et, en un certain point z_0, on a $u(z_0) = 0$. La fonction $\frac{\partial u}{\partial y}$ est harmonique et bornée dans le demi-plan supérieur et nulle sur l'axe des x, c'est-à-dire qu'elle résout, pour le demi-plan supérieur et pour les valeurs frontières nulles, le problème de Dirichlet. Or, comme la solution de ce problème est également donnée par la fonction identiquement nulle, alors $\frac{\partial u}{\partial r} \equiv 0$. Mais alors $u(z)$ doit être constante et égale à zéro en vertu de la condition $u(z_0) = 0$. L'unicité de la solution du problème de Neumann est donc démontrée.

En supposant encore que les dérivées partielles sont continues sur $\overline{D}$, la *solution du problème de Neumann se ramène à la solution du problème de Dirichlet pour la fonction harmonique conjuguée.*

En effet, soit $v(z)$ la fonction harmonique conjuguée de $u(z)$. En vertu des conditions de Cauchy-Riemann écrites pour les points de la courbe C dans les directions s et n (cf. la fin du n° 5), nous avons

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n} = g(\zeta).$$

Connaissant $\frac{\partial v}{\partial s}$ sur C, nous trouvons directement par intégration

$$v(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = \int_{\zeta_0}^{\zeta} g(\zeta)\, ds.$$

Maintenant la détermination de $v(z)$ dans le domaine D se ramène au problème de Dirichlet; connaissant $v(z)$, par une simple intégration nous trouvons aussi la fonction inconnue $u(z)$.

Dans le cas où D est le cercle unité, on trouve facilement une formule qui donne la solution du problème de Neumann. En effet, soit $f(z) = u + iv$ la solution de ce problème. Posant $z = re^{it}$, on a évidemment $f'(z) = \frac{1}{e^{it}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ ou $\frac{z}{r} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}$.

On voit que les valeurs de la partie réelle de la fonction analytique $zf'(z)$ sur la circonférence unité coïncident avec la fonction donnée $\frac{\partial u}{\partial r} = g(\zeta)$. Donc on peut représenter $zf'(z)$ à l'aide de l'intégrale de Schwarz (3):

$$zf'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{g(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

(nous tenons compte de ce que la valeur de la fonction considérée est nulle à l'origine des coordonnées). L'intégration donne :

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{dz}{z}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \tag{19}$$

En changeant l'ordre d'intégration et en calculant l'intégrale élémentaire

$$\int\frac{dz}{z(\zeta-z)}=-\frac{1}{\zeta}\ln(\zeta-z)+\frac{1}{\zeta}\ln z+\text{const},$$

nous trouvons :

$$f(z)=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{\zeta}\ln(\zeta-z)\,d\zeta+\frac{\ln z}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+\text{const},$$

ou, tenant compte de (18) qui donne $\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=i\int\limits_0^{2\pi}g(e^{it})\,dt=0$, nous obtenons l'expression suivante pour la fonction $f(z)$:

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(e^{it})\ln(e^{it}-z)\,dt+\text{const}. \tag{20}$$

Séparant les parties réelles, nous obtenons la formule que nous voulions établir :

$$u(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(e^{it})\ln|e^{it}-z|\,dt+\text{const} \tag{21}$$

(*Dini*).

45. Méthode des réseaux. Nous donnons ici la méthode approchée la plus usitée, dite *méthode des réseaux*, qui permet de résoudre le problème de Dirichlet. L'argumentation de la méthode des réseaux a été donnée en 1924 par *L. Lusternik*. Cette méthode peut également être appliquée pour résoudre de nombreux problèmes de physique mathématique. Nous expliquerons l'idée de la méthode en renvoyant pour les détails à la littérature spéciale.

La méthode est basée sur le remplacement des dérivées, qui participent dans l'équation de Laplace, par les rapports correspondants de différences finies. Pour les valeurs de h suffisamment petites, les dérivées partielles premières de la fonction $u(x, y)$ peuvent être remplacées approximativement par les rapports de différences finies

$$u_x\approx\frac{u(x+h,\ y)-u(x,\ y)}{h},$$

$$u_y\approx\frac{u(x,\ y+h)-u(x,\ y)}{h}. \tag{1}$$

On peut écrire des expressions approchées semblables pour les dérivées du deuxième ordre, par exemple :

$$u_{xx} \approx \frac{1}{h}\left\{\frac{u(x+2h, y)-u(x+h, y)}{h} - \frac{u(x+h, y)-u(x, y)}{h}\right\} =$$

$$= \frac{1}{h^2}\{u(x+2h, y)-2u(x+h, y)+u(x, y)\}.$$

Pour plus de symétrie, remplaçant $x + h$ par x, nous avons :

$$u_{xx} \approx \frac{1}{h^2}\{u(x+h, y)-2u(x, y)+u(x-h, y)\} \tag{2}$$

et de même

$$u_{yy} \approx \frac{1}{h^2}\{u(x, y+h)-2u(x, y)+u(x, y-h)\}. \tag{3}$$

Ainsi, l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ peut être approximativement remplacée par l'équation aux différences finies suivante :

$$u(x+h, y)+u(x-h, y)+u(x, y+h)+u(x, y-h)- \\ -4u(x, y)=0. \tag{4}$$

L'équation (4) donne une relation entre les valeurs de la fonction à déterminer en cinq points qui sont disposés comme l'indiquent les cercles blancs sur la fig. 101.

Pour résoudre le problème de Dirichlet par la méthode des réseaux, il faut recouvrir le domaine donné D par un quadrillage de pas h, comme cela est indiqué sur la fig. 101. La frontière de ce quadrillage doit être choisie de manière qu'elle approche de la meilleure façon la frontière du domaine D, de plus les points frontières du quadrillage peuvent se trouver tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de D. Les valeurs de la fonction u, données sur la courbe C, sont transposées par interpolation aux points frontières du quadrillage et, par conséquent, les valeurs de u en de tels points peuvent être supposées connues.

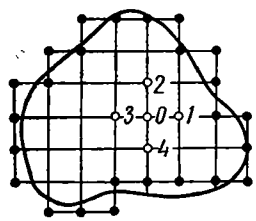

FIG. 101

Les valeurs de u aux nœuds intérieurs du réseau, supposées inconnues, satisfont au système d'équations linéaires (4). Après avoir résolu ce système, nous trouvons la solution approchée du problème de Dirichlet car, comme l'a démontré Lusternik, lorsque $h \to 0$, la solution de l'équation aux différences finies (4) tend vers une fonction harmonique $u(x, y)$. Le lecteur trouvera la démonstration de cette proposition dans le livre de I. Petrovsky [1].

Vu que le nombre des équations du système (4) est très grand et que ce système est symétrique, il est très commode de chercher sa solution par la *méthode itérative*. Pour cela, nous écrivons d'abord les équations (4) dans les notations dont le sens est clair d'après la fig. 101.

$$u_0 = \frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{4}, \tag{5}$$

la *valeur de la fonction* $u(x, y)$ *en chaque nœud du réseau est égale à la moyenne arithmétique de ses valeurs aux quatre nœuds voisins.* Après quoi, on se donne un

système initial arbitraire de valeurs de u aux nœuds intérieurs du réseau (système d'ordre zéro) et on détermine les moyennes arithmétiques des valeurs de ce système ; en outre, pour certains nœuds il va falloir avoir recours aux valeurs connues de u aux nœuds frontières. Les moyennes arithmétiques ainsi déterminées donnent la première approximation (système d'ordre un). Puis, nous calculons les moyennes arithmétiques des valeurs du système d'ordre un en utilisant de nouveau pour certains nœuds les valeurs frontières connues de u, ce qui nous permet d'en déduire la deuxième approximation (système d'ordre deux), etc. Le processus continue jusqu'à ce que le passage d'un système d'ordre $(n-1)$ au système d'ordre n donne la variation dans les limites de la précision désirée.

La réalisation des calculs suivant la méthode itérative dépend des moyens de calcul dont on dispose. Les calculatrices à action rapide qui en peu de temps donnent la solution des problèmes avec une très grande précision sont le plus indiquées.

Pour accomplir les calculs à la main ou à l'aide de petites calculatrices (du type arithmomètre), il est commode de préparer un nombre suffisant d'exemplaires de réseaux. L'exemplaire d'ordre zéro est un réseau semblable à celui donné mais tel que ses lignes passent à égale distance des lignes du réseau donné et ses nœuds coïncident avec les centres des carrés. Les carrés de l'exemplaire, qui contiennent des points frontières du réseau, sont bordés de segments de droite gras et portent les valeurs frontières données. Les autres exemplaires se distinguent de celui d'ordre zéro seulement par les carrés qui y sont découpés et qui contiennent les données aux limites. Ces exemplaires doivent être confectionnés de préférence en papier à calquer.

Les calculs sont réalisés de la manière suivante.

1) On inscrit dans les cellules intérieures de l'exemplaire d'ordre zéro les valeurs du système d'ordre zéro. Remarquons que plus ces valeurs sont voisines des valeurs réelles, plus rapidement le processus d'itération converge. Pour cette raison le choix convenable du système d'ordre zéro a une grande importance.

2) On pose l'exemplaire d'ordre un sur l'exemplaire d'ordre zéro de façon que les cellules correspondantes se superposent et on inscrit dans les cellules de cet exemplaire les moyennes arithmétiques des valeurs du système d'ordre zéro (en tenant compte des valeurs frontières qui ne sont pas recouvertes par l'exemplaire d'ordre un). Pour accélérer le processus, pendant le calcul des moyennes arithmétiques on peut se servir des valeurs du système d'ordre un que l'on a déjà déterminées ; l'exemplaire en papier à calquer y est bien adapté, car, après avoir inscrit les valeurs du système d'ordre un, les valeurs de l'exemplaire d'ordre zéro qui se trouvent en dessous ne se voient presque pas.

3) On pose l'exemplaire d'ordre deux sur les exemplaires d'ordres zéro et un et on inscrit dans ses cellules les moyennes arithmétiques des valeurs du système d'ordre un (en tenant compte des valeurs frontières et des valeurs déjà déterminées du système d'ordre deux). On répète l'opération pour les exemplaires d'ordres trois, quatre, etc., jusqu'à ce que l'exemplaire suivant coïncide, dans les limites de la précision donnée, avec le précédent. Le système de valeurs ainsi obtenu est le système cherché.

Nous avons déjà dit que bien qu'en principe le processus d'itération converge pour tout système initial de valeurs (*), toujours est-il que sa vitesse de convergence dépend essentiellement de l'écart entre le système initial et le système réel. Si le résultat n'exige pas une très grande précision (3 chiffres), on peut alors avoir recours à la méthode graphique pour déterminer le système initial. Les valeurs données sur la courbe C sont représentées par une projection axonométrique sous la forme d'une courbe Γ dans l'espace (x, y, z) ; on

(*) Voir la démonstration dans le complément de *D. Panov* à la traduction russe du livre de *J. B. Scarborough*, « Numerical mathematical analysis ».

fait passer au jugé par cette courbe une surface (il vaut mieux se la représenter comme la surface d'une bulle de savon qui s'appuie sur Γ) et on enlève du dessin les ordonnées de cette surface qui se trouvent au-dessus des nœuds du réseau.

Il est beaucoup plus efficace de choisir comme système initial dans la méthode d'itérations la solution du même problème obtenue par une méthode approchée plus simple. Parmi de telles méthodes, une place particulière revient à la *méthode* dite *des analogies*, basée sur l'utilisation de simulateurs de processus physiques qui sont décrits par l'équation de Laplace. Une des analogies les plus employées est l'analogie électrique basée sur le fait que cette équation est vérifiée par le potentiel du champ électrique dans un conducteur plan fin.

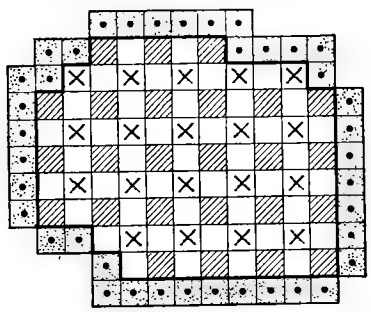

FIG. 102

Pour la mise en pratique de cette méthode, on confectionne d'ordinaire en matériau isolant la frontière du domaine pour lequel on veut résoudre le problème de Dirichlet, et on fixe cette frontière dans une cuve de manière que l'on puisse remplir l'intérieur du domaine d'une couche d'électrolyte. On peut, par exemple, fixer avec de la cire à modeler, suivant le contour de la frontière du domaine, les parois en bandes isolantes souples d'une hauteur de 1 à 2 cm et remplir d'eau légèrement salée le domaine ainsi formé. Ensuite, il ne reste qu'à communiquer aux points de la frontière des potentiels qui correspondent aux conditions aux limites données, ce qui se fait à l'aide de pinces en fil de fer ou à l'aide de fines plaques métalliques fixées à la paroi auxquelles on applique une tension. On étudie la distribution du potentiel à l'intérieur du domaine à l'aide d'une sonde acuminée. A condition de fabriquer un bon modèle et d'observer des mesures adéquates qui permettent de réduire les erreurs, on peut obtenir par cette méthode une précision atteignant 1 à 2 %.

A la place d'une cuve électrolytique, on peut utiliser du papier électroconducteur (par exemple du papier recouvert d'une fine couche de graphite) que l'on découpe de manière à lui donner la forme du domaine considéré et à la frontière duquel on communique des potentiels qui correspondent aux valeurs données. Cette méthode est plus simple que la méthode des cuves électrolytiques, mais moins précise ; elle donne une précision d'environ 5 %. Le lecteur pourra trouver une description détaillée de la méthode des analogies dans le livre de P. Filtchakov et V. Pantchichine [5].

Si l'on a besoin d'une grande précision (4 à 5 chiffres), si le réseau contient un grand nombre de nœuds et que le calcul se fasse à la main, il est alors préférable d'appliquer au début le processus d'itération à un réseau plus grossier, formé de carrés hachurés de la fig. 102. A cette étape, on peut appliquer l'itération jusqu'à ce que 2 à 3 chiffres coïncident. Une fois ce but atteint, on revient au réseau fondamental et on calcule les valeurs dans les cellules vides, notées par des croix obliques sur la fig. 102, comme les moyennes arithmétiques des quatre valeurs voisines suivant les diagonales, puis, dans les cellules vides qui restent, comme les moyennes arithmétiques ordinaires. Le système de valeurs ainsi obtenu est pris pour système initial ; ensuite, on applique le processus d'itération au réseau fondamental avec le nombre total de chiffres.

Pour accélérer le processus d'itération, on a élaboré un grand nombre de différents procédés dont le choix est déterminé par les particularités du problème ainsi que par les moyens de calcul mis en action. Pour les calculs sur les petites calculatrices, les procédés les plus efficaces sont ceux dits de relaxation ou méthodes d'application des corrections d'après les différentes for-

mules. Le lecteur pourra prendre connaissance de ces procédés et méthodes, par exemple, dans les livres de W. E. Milne, « Numerical solution of differential equations » (Nev-York-London 1953) ou de L. Collatz, « Numerische Behandlung von Differentialgleichungen », Brl. Springer 1955.

§ 2. REPRÉSENTATIONS PHYSIQUES. POSITION DES PROBLÈMES AUX LIMITES

Nous considérons dans ce paragraphe les principales représentations physiques qui sont liées à la théorie des fonctions de la variable complexe. Elles concernent les champs vectoriels plans de nature physique différente (nos 46 et 47), ainsi que l'état plan de contraintes d'un corps qui est d'un caractère un peu plus compliqué que le champ vectoriel (n° 50).

Ces représentations physiques conduisent naturellement à des applications de la théorie des fonctions dans divers domaines de la physique. Dans ce paragraphe, l'attention est concentrée sur la *position* des problèmes correspondants (nos 48 et 50) de manière que l'on puisse donner aussi des exemples concrets de telles ou telles applications dans l'exposé ultérieur. Ce n'est qu'au n° 49 que nous donnons plusieurs problèmes concrets qui se résolvent à l'aide de la méthode des représentations conformes.

46. Champ plan et potentiel complexe. Nous considérons ici des *champs vectoriels plans stationnaires*. Cela signifie, premièrement, que les vecteurs du champ ne dépendent pas du temps et, deuxièmement, que les vecteurs de ce champ sont parallèles à un plan S_0, de plus, en tous les points d'une droite arbitraire perpendiculaire à S_0, les vecteurs du champ sont égaux (en grandeur et en direction). Il est clair que dans tous les plans parallèles à S_0 la configuration du champ est la même et, par conséquent, le champ est entièrement décrit par un *champ plan* de vecteurs appartenant au plan S_0. En outre, quand on considère un point du champ plan, nous avons en vue la droite indéfinie du champ plan, qui est perpendiculaire à S_0 et passe par ce point ; une courbe désigne une surface cylindrique et un domaine un corps cylindrique.

Introduisons un système de coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan S_0 ; alors chaque vecteur du champ $\mathbf{A}$ de composantes $\{A_x, A_y\}$ est caractérisé par le nombre complexe

$$\mathbf{A} = A_x + iA_y, \tag{1}$$

de plus les composantes sont des fonctions données de x et y :

$$A_x = A_x(x, y), \quad A_y = A_y(x, y), \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même, de la variable complexe $z = x + iy$.

Ainsi, les champs vectoriels stationnaires plans sont décrits à l'aide des nombres complexes et des fonctions de la variable com-

plexe. De plus, pour les conditions qui sont satisfaites pour les champs les plus importants en pratique, il s'avère possible de construire une fonction *analytique*, dite *potentiel complexe*, qui décrit ce champ. Grâce à l'application de la théorie bien élaborée des fonctions analytiques les problèmes liés à de tels champs permettent une analyse des plus profondes et une solution commode pour les calculs.

Arrêtons-nous en détail sur la construction du potentiel complexe. Rappelons pour cela les notions fondamentales de l'analyse vectorielle des champs plans (*). Comme il est admis, nous avons recours à la terminologie hydrodynamique bien que tout ce qui va être exposé se rapporte aux champs de nature physique la plus variée.

On appelle *flux* d'un champ vectoriel $\mathbf{A}$ à travers une courbe C l'intégrale

$$N = \int_C (\mathbf{A}, \mathbf{n}^0)\, ds, \tag{3}$$

où $(\mathbf{A}, \mathbf{n}^0)$ désigne (dans la suite aussi) le produit scalaire du vecteur du champ $\mathbf{A}$ et du vecteur unité de la normale $\mathbf{n}^0$ à la courbe C. Si l'on désigne par dx et dy les différentielles le long de C, c'est-à-dire si l'on pose $\mathbf{s}^0\, ds = dx + i\, dy$, on a alors $\mathbf{n}^0 ds = -i\mathbf{s}^0 ds = dy - i\, dx$, $(\mathbf{A}, \mathbf{n}^0)\, ds = A_x dy - A_y dx$, et la formule (3) prend la forme

$$N = \int_C A_x\, dy - A_y\, dx. \tag{4}$$

La densité superficielle du flux, c'est-à-dire la limite du rapport du flux à travers une courbe fermée C à l'aire S du domaine de frontière cette courbe, lorsque ce domaine tend vers un point z, est appelée *divergence* du champ au point z:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{C \to z} \frac{1}{S} \int_C (\mathbf{A}, \mathbf{n}^0)\, ds. \tag{5}$$

Comme on le sait

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}. \tag{6}$$

Un point du champ en lequel $\operatorname{div} \mathbf{A} \neq 0$ est appelé *source* (on n'emploie parfois ce terme que dans le cas où $\operatorname{div} \mathbf{A} > 0$; un point en lequel $\operatorname{div} \mathbf{A} < 0$ est alors appelé *puits* ou *source négative*). Si en chaque point d'un domaine D

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

(*) Nous supposons connues les notions fondamentales de l'analyse vectorielle ; cf., par exemple, Fikhtengoltz, t. III, p. 445 et les suivantes.

on dit alors que le champ est *indivergentiel* ou *solénoïdal* dans ce domaine.

Pour un pareil champ, le flux à travers toute courbe fermée c, dont l'intérieur d appartient au champ, est nul: ceci découle du théorème bien connu d'Ostrogradski:

$$\int_c (\mathbf{A}, \mathbf{n}^0)\, ds = \int_d \int \operatorname{div} A\, dS. \tag{8}$$

D'après ce même théorème, le flux à travers toute section du *tube de courant* (c'est ainsi que l'on appelle le domaine dont la frontière est formée par deux *lignes de courant*, c'est-à-dire par des courbes qui sont tangentes en chacun de leurs points au vecteur correspondant du champ) est le même (fig. 103).

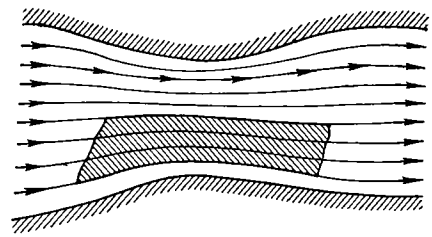

FIG. 103

La condition (7), d'après laquelle un champ est indivergentiel, montre que l'expression $-A_y dx + A_x dy$ est la différentielle d'une certaine fonction $v(x, y)$ que l'on appelle *fonction de courant*. Ce terme tient à ce que les lignes de niveau de la fonction $v(x, y)$ sont des lignes de courant. En effet, le long d'une telle ligne de niveau nous avons $dv = -A_y dx + A_x dy = 0$, par conséquent $\frac{dy}{dx} = \frac{A_y}{A_x}$, c'est-à-dire que la direction de la tangente à cette ligne coïncide avec la direction du vecteur $\mathbf{A}$.

Il découle de l'expression de la différentielle de la fonction v que ses dérivées partielles sont respectivement égales à

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x. \tag{9}$$

La fonction $v(x, y)$ est reconstituée (à une constante additive près) à partir de sa différentielle totale dv à l'aide de l'intégrale

$$v(x, y) = \int_{z_0}^{z}{}_L - A_y\, dx + A_x\, dy + \text{const}. \tag{10}$$

En vertu de la condition (7), cette intégrale, dans un domaine simplement connexe D, ne dépend pas du chemin d'intégration et, par conséquent, définit une fonction uniforme, tandis que dans un domaine multiplement connexe elle possède des constantes cycliques et définit une fonction multiforme (*).

(*) Les raisonnements relatifs à l'intégrale (2) du n° 41 s'appliquent à l'intégrale (10) si la condition (7) est satisfaite.

Dans un champ indivergentiel le flux à travers une ligne C, conformément aux formules (4) et (10), est égal à l'accroissement de la fonction de courant calculé aux extrémités de C :

$$N = \int_{z_1}^{z_2}{}_C -A_y\,dx + A_x\,dy = \int_{z_1}^{z_2}{}_C dv = v(z_2) - v(z_1), \qquad (11)$$

de plus, si le domaine D est multiplement connexe, il faut prendre une branche continue de $v(z)$ sur la ligne C.

On appelle *circulation* d'un champ le long d'un contour fermé C l'intégrale de la forme

$$\Gamma = \int_C (\mathbf{A}, \mathbf{s}^0)\,ds = \int_C A_x\,dx + A_y\,dy. \qquad (12)$$

La densité superficielle de la circulation, c'est-à-dire la limite du rapport de la circulation le long d'une courbe C à l'aire S du domaine de frontière cette courbe prise de manière que ce domaine tende vers le point z, est appelée *rotationnel* ou *tourbillon* du champ (*) au point z

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \lim_{C \to z} \frac{1}{S} \int_C (\mathbf{A}, \mathbf{s}^0)\,ds. \qquad (13)$$

Comme on le sait,

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \qquad (14)$$

Un point du champ en lequel $\operatorname{rot}\mathbf{A} \neq 0$ est appelé *point tourbillonnaire* ou *tourbillon* du champ. Si en chaque point d'un domaine D

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0, \qquad (15)$$

on dit alors que le champ est *irrotationnel* ou encore *potentiel* dans ce domaine.

Pour un pareil champ, la circulation le long de toute courbe fermée c, dont l'intérieur d appartient au champ, est nulle : ceci découle de la formule bien connue de Riemann-Green

$$\int_c (\mathbf{A}, \mathbf{s}^0)\,ds = \int_d \int \operatorname{rot}\mathbf{A}\,dS. \qquad (16)$$

(*) Pour les champs spatiaux, la densité de la circulation ne donne que la projection du rotationnel sur la direction de la normale au domaine d'aire S; le rotationnel, lui, est un vecteur. On peut considérer que dans un champ plan aussi le rotationnel est un vecteur dirigé suivant la perpendiculaire au plan du champ. Alors la valeur absolue de (13) donne le module de ce vecteur et son signe indique l'orientation.

De la condition (15), d'après laquelle le champ est irrotationnel, il découle que l'expression $A_x dx + A_y dy$ est la différentielle d'une certaine fonction $u(x, y)$ que l'on appelle *fonction potentiel* ou *potentiel du champ*. En effet, il découle de la relation $A_x dx + A_y dy = du$ que

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{17}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} u$$

(le scalaire u par rapport à son gradient $\mathbf{A}$ est précisément appelé potentiel). La fonction potentiel est reconstituée à partir de sa différentielle à l'aide de l'intégrale

$$u(x, y) = \int_{z_0}^{z}{}_{L} A_x\, dx + A_y\, dy + \text{const}. \tag{18}$$

En vertu de la condition (15), cette intégrale dans un domaine simplement connexe D ne dépend pas du chemin d'intégration et dans un domaine multiplement connexe elle possède des constantes cycliques.

Si dans un domaine D un champ est simultanément indivergentiel et irrotationnel, c'est-à-dire que les conditions (7) et (15) sont satisfaites, alors en comparant les formules (9) et (17) nous trouvons:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{19}$$

qui sont précisément les équations de Cauchy-Riemann. Ainsi, nous avons démontré le théorème:

Théorème 1. *Dans un champ plan sans source ni tourbillon la fonction de courant et le potentiel sont des fonctions harmoniques conjuguées.*

Il en découle en particulier que dans un tel champ les lignes de courant et les lignes équipotentielles forment des familles orthogonales; l'ensemble de ces familles est parfois appelé réseau du champ. La fonction de la variable complexe

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{20}$$

est appelée *potentiel complexe du champ*, c'est précisément la fonction analytique qui décrit le champ et que nous avons voulu construire. Il découle de ce qui précède que si un champ occupe un domaine multiplement connexe (par exemple, possède des sources ou des tourbillons qu'il faut exclure du domaine pour que notre construction soit possible), alors le potentiel complexe peut s'avérer une fonction multiforme.

Toutes les quantités fondamentales caractérisant un champ peuvent s'exprimer à l'aide du potentiel complexe. Par exemple, d'après les formules (17), (19) et la formule de la dérivée d'une fonction analytique, donnée au n° 5, nous trouvons le vecteur du champ

$$\mathbf{A} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}. \tag{21}$$

Il en découle entre autres que la dérivée du potentiel complexe est toujours uniforme.

Puisque $f'(z)\,dz = (A_x - iA_y)\,(dx + i\,dy)$, les formules (4) et (12) peuvent être écrites sous la forme

$$N = \operatorname{Im} \int_C f'(z)\,dz, \quad \Gamma = \operatorname{Re} \int_C f'(z)\,dz. \tag{22}$$

Réunissant ces deux formules, nous avons

$$\Gamma + iN = \int_C f'(z)\,dz. \tag{23}$$

Donnons plusieurs exemples simples de champ plan.

1) S o u r c e. Supposons que le champ possède une source ponctuelle unique qui coïncide avec l'origine des coordonnées; il n'y a pas de tourbillons (*). Vu la symétrie, il est clair que le vecteur du champ a la forme

$$\mathbf{A} = \varphi(r)\,\mathbf{r}^0, \tag{24}$$

où $r = |z|$ est la distance d'un point z à l'origine des coordonnées et $\mathbf{r}^0 = \frac{z}{|z|}$ le vecteur unité dirigé de l'origine des coordonnées vers le point z. Le flux d'un vecteur à travers toute circonférence $|z| = r$ de centre à l'origine des coordonnées est égal à

$$N = \int_{|z|=r} (\mathbf{A},\ \mathbf{r}^0)\,ds = \varphi(r)\cdot 2\pi r.$$

Ce flux ne dépend pas du rayon car, d'après la formule d'Ostrogradski (8) appliquée à la couronne $r_1 < |r| < r_2$, nous obtenons:

$$\int_{|z|=r_2} (\mathbf{A},\ \mathbf{r}^0)\,ds - \int_{|z|=r_1} (\mathbf{A},\ \mathbf{r}^0)\,ds = \iint_{r_1<|z|<r_2} \operatorname{div}\mathbf{A}\,dS = 0,$$

puisque dans cette couronne il n'y a pas de sources et, par conséquent, $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. Il en découle que la quantité N est constante et

(*) Il faut représenter ce champ comme un champ spatial engendré par l'action de sources uniformément réparties sur la droite perpendiculaire au plan des z et issue de l'origine des coordonnées. Il en est de même pour les exemples 2-4.

par suite

$$\varphi(r) = \frac{N}{2\pi r}. \tag{25}$$

Le nombre N est appelé *intensité de la source*. Substituant dans la formule (24) la valeur de $\varphi(r)$ tirée de (25), nous obtenons le vecteur du champ sous la forme

$$\mathbf{A} = \frac{N}{2\pi r} \cdot \mathbf{r}^0 = \frac{N}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}}. \tag{26}$$

D'après la formule (21) nous trouvons la dérivée du potentiel complexe

$$f'(z) = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{z}$$

et, par conséquent, le potentiel complexe a la forme

$$f(z) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c. \tag{27}$$

Séparant les parties réelles et imaginaires, nous trouvons la fonction potentiel et la fonction de courant :

$$u = \frac{N}{2\pi} \ln|z| + c_1, \quad v = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Arg} z + c_2. \tag{28}$$

Sur la fig. 104 (et les suivantes) les lignes continues indiquent les lignes de courant et les pointillés les lignes équipotentielles.

2) T o u r b i l l o n. En partant de considérations tout à fait semblables nous trouvons que le vecteur d'un champ à un tourbillon ponctuel qui coïncide avec l'origine des coordonnées est égal à

$$\mathbf{A} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{i}{\bar{z}}, \tag{29}$$

où la constante Γ est l'*intensité du tourbillon*, c'est-à-dire la circulation du vecteur $\mathbf{A}$ le long de tout contour fermé enveloppant le tourbillon (fig. 105). Le potentiel complexe diffère du précédent par le facteur i, la fonction potentiel et la fonction de courant s'intervertissent :

$$f(z) = \frac{\Gamma i}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c, \quad u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Arg} z + c_1, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln|z| + c_2. \tag{30}$$

3) T o u r b i l l o n - s o u r c e. Supposons qu'une source d'intensité N et un tourbillon d'intensité Γ soient concentrés à l'origine des coordonnées. Le vecteur du champ et le potentiel complexe s'obtiennent en additionnant les expressions (26) et (29) et respective-

ment (27) et (30):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{N+i\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{\bar{z}}, \\ f(z) &= \frac{N+i\Gamma}{2\pi}\,\operatorname{Ln} z + c. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Les lignes de courant et les lignes équipotentielles en coordonnées polaires $z = re^{i\varphi}$ sont respectivement données par les équations

$$\left.\begin{aligned} \Gamma \ln r + N\varphi &= c_1 \\ N \ln r - \Gamma\varphi &= c_2. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Ce sont des familles orthogonales de spirales logarithmiques (fig. 106).

4) D o u b l e t. Considérons un système formé d'une source et d'un puits d'intensités $\pm N$ coïncidant respectivement avec les

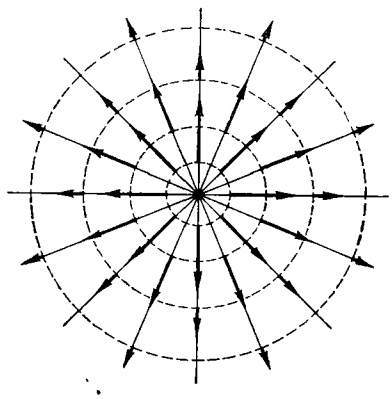

FIG. 104

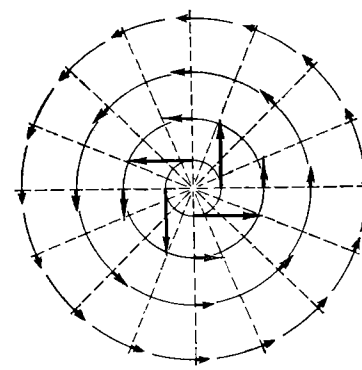

FIG. 105

points $z_1 = -h$, $z_2 = 0$ (fig. 107). Le potentiel complexe de ce système s'obtient en additionnant les potentiels de la source et du puits:

$$f_h(z) = \frac{N}{2\pi}\operatorname{Ln}(z+h) - \frac{N}{2\pi}\operatorname{Ln} z \tag{33}$$

(nous utilisons la formule (27) et sa généralisation évidente au cas où la source ne coïncide pas avec l'origine de coordonnées; nous ne considérons pas les constantes additives).

Considérons maintenant le système limite que l'on obtient de notre système lorsque $h \to 0$ et $N \to \infty$ simultanément de manière que $Nh \to p$: ce système est appelé *doublet* ou *dipôle ponctuel* de moment p (fig. 108). Le potentiel complexe du champ d'un doublet ponctuel est donné par le passage à la limite dans la formule (33)

lorsque $h \to 0$:

$$f(z) = \lim_{h\to 0} \frac{Nh}{2\pi} \frac{\operatorname{Ln}(z+h) - \operatorname{Ln} z}{h} =$$

$$= \frac{p}{2\pi} \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} z = \frac{p}{2\pi z}. \qquad (34)$$

On a représenté sur la fig. 108 les lignes de courant et les lignes équipotentielles : ce sont les images réciproques des lignes $\operatorname{Im} w = c_1$ et $\operatorname{Re} w = c_2$ par la représentation $w = \frac{p}{2\pi z}$, c'est-à-dire des circonférences tangentes aux axes de coordonnées.

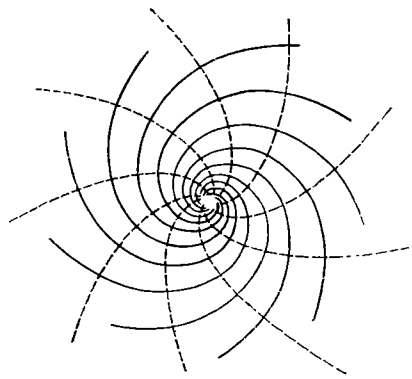

FIG. 106

5) Simple couche. Nous supposons que les sources soient disposées sur une courbe C de densité linéaire $\rho(\zeta)$ (*). Posant $r = |\zeta - z|$, nous trouvons, d'après la formule (28), le potentiel

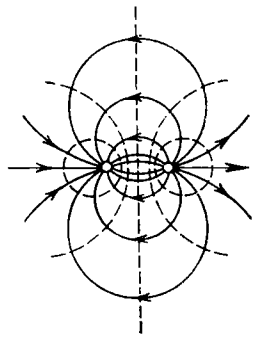

FIG. 107

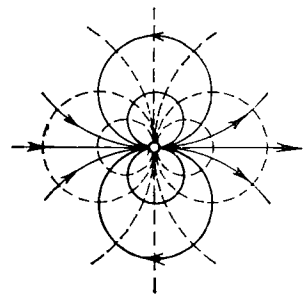

FIG. 108

d'une source élémentaire $\rho(\zeta)\, ds$, coïncidant avec le point ζ, sous la forme $\frac{\rho(\zeta)}{2\pi} \ln r\, ds$. En intégrant, nous obtenons le *potentiel de simple couche*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \rho(\zeta) \ln r\, ds. \qquad (35)$$

6) Double couche. Supposons qu'en plus de la courbe C, support des sources de densité $\rho(\zeta)$, nous ayons une courbe C' qui

(*) Dans l'espace à ce champ correspond un champ d'un cylindre de directrice C et de génératrices perpendiculaires au plan des z. Le cylindre est le support des sources dont la densité superficielle est constante sur chaque génératrice. Il en est de même de l'exemple 6).

s'obtient de C si l'on porte sur toutes ses normales, d'un côté bien défini, des petits segments de droite de longueur constante h. Supposons que la densité de la répartition des sources sur C' soit telle qu'un élément de longueur ds' porte une source de grandeur $\rho' ds' = -\rho ds$ (le premier et le second membre sont considérés aux points qui se correspondent ζ et ζ'; cf. fig. 109). Le système limite que nous obtenons de notre système, lorsque $h \to 0$ et $\rho(\zeta) \to \infty$ de manière que $h\rho(\zeta) \to \mu(\zeta)$, est appelé *double couche* de densité des moments μ.

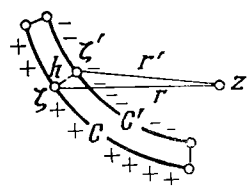

FIG. 109

Trouvons le potentiel de double couche. Pour $h \neq 0$ fixe, nous trouvons, d'après la formule (35):

$$u_h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \rho \ln r \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \rho' \ln r' \, ds',$$

où $r' = |z - \zeta'|$. Pour les petits h, négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à h, nous avons

$$r' = r - h \frac{\partial r}{\partial n},$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée suivant la normale à C dans le sens opposé à C'. D'où

$$\ln r' = \ln r + \ln \left(1 - \frac{h}{r} \frac{\partial r}{\partial n}\right) = \ln r - h \frac{\partial}{\partial n} \ln r.$$

Tenant compte de $\rho' ds' = -\rho ds$, nous obtenons:

$$u_h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C h\rho(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln r \, ds.$$

Passant à la limite lorsque $h \to 0$, nous obtenons le potentiel de double couche:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln r \, ds, \tag{36}$$

où la normale est prise du côté de la courbe qui porte les sources de densité $+\rho$ (fig. 109).

Pour terminer, démontrons que toute fonction harmonique peut être interprétée comme le potentiel d'un certain champ plan. Pour plus de commodité, limitons-nous au cas d'un domaine simplement connexe de frontière une courbe fermée C bien que l'affirmation reste vraie dans le cas général. Soit donnée une fonction $u(z)$ harmonique dans un tel domaine D; construisons la fonction conjuguée $v(z)$ et appliquons à la fonction $f(z) = u(z) + iv(z)$ la formule

intégrale de Cauchy (*) (n° 14):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Posons $\zeta - z = re^{i\varphi}$, alors dérivant par rapport à ζ, pour z constant, nous trouvons:

$$\frac{d\zeta}{\zeta - z} = d \ln (\zeta - z) = d \ln r + i\, d\varphi.$$

Substituant cette expression dans la formule de Cauchy et séparant les parties réelles, nous avons:

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_C u(\zeta)\, d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_C v(\zeta)\, d \ln r. \tag{37}$$

Sur la courbe C nous avons $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds$; en vertu des conditions de Cauchy-Riemann, pour la fonction $\ln (\zeta - z)$, analytique sur C, on peut écrire la relation $\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{\partial \ln r}{\partial n}$, où $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée suivant la normale intérieure à C. Donc la première intégrale dans la formule (37):

$$u_1(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_C u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln r\, ds$$

représente un potentiel de double couche de densité des moments $-u(\zeta)$.

Supposons que $v(\zeta)$ possède une dérivée continue; intégrant par parties le deuxième terme du second membre de (37), nous trouvons:

$$u_2(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial v}{\partial s} \ln r\, ds$$

(le terme sans intégrale disparaît puisque le contour est fermé); ainsi, ce terme représente un potentiel de simple couche de densité $-\frac{\partial v}{\partial s}$. On a donc démontré le théorème:

Théorème 2. *Toute fonction $u(z)$ harmonique dans un domaine simplement connexe D peut être représentée sous la forme d'une somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche répartis sur la frontière de D.*

Si le domaine D est multiplement connexe, alors des potentiels de sources ponctuelles disposées aux extrémités des arcs de courbe frontières (cf. la démonstration de l'expression de $u_2(z)$) ou en des points isolés de la frontière peuvent s'ajouter à ces termes.

(*) En cas de besoin nous prenons un contour fermé dans le domaine D voisin de la frontière de manière que la formule de Cauchy puisse être appliquée.

47. Représentations physiques. Nous considérons ici diverses interprétations physiques des champs vectoriels plans.

1. Champ des vitesses d'un écoulement fluide. Supposons que les vecteurs d'un champ $\mathbf{V}$ représentent les vitesses des particules d'un fluide parfait incompressible en écoulement plan permanent. Le flux du vecteur vitesse

$$N = \int_C (\mathbf{V},\ \mathbf{n}^0)\, ds \tag{1}$$

représente évidemment la quantité de fluide écoulée par unité de temps à travers la courbe C, la circulation

$$\Gamma = \int_C (\mathbf{V},\ \mathbf{s}^0)\, ds = \int_C V_s\, ds \tag{2}$$

est l'intégrale des composantes tangentielles V_s du vecteur vitesse le long de la courbe fermée C. Les sources et les points tourbillonnaires s'interprètent respectivement comme des points au voisinage desquels le flux et la circulation le long d'une courbe fermée autour du point (plus exactement des points en lesquels les densités du flux et de la circulation, c'est-à-dire div et rot, sont non nulles) sont non nuls. Si dans un domaine D les tourbillons et les sources sont absents, on peut alors construire dans ce domaine une fonction analytique $f(z) = u(z) + iv(z)$, le potentiel complexe du champ, telle que

$$\mathbf{V} = \overline{f'(z)}. \tag{3}$$

Inversement, toute fonction analytique dans un domaine D peut être interprétée comme le potentiel complexe d'un écoulement plan sans tourbillon ni source d'un fluide parfait incompressible.

Considérons l'interprétation hydrodynamique des points singuliers simples de la fonction analytique $f(z)$. L'exemple 3) du n° 46 montre que le point de branchement logarithmique a dans le voisinage duquel $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = c\ \mathrm{Ln}\,(z - a) + g(z),$$

où $g(z)$ est une fonction régulière, peut être interprété comme un tourbillon-source d'intensité $N + i\Gamma = 2\pi c$. Généralisant un peu l'exemple 4), nous voyons que le pôle a du premier ordre de résidu c_{-1}, au voisinage duquel

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + g(z),$$

s'interprète comme un doublet obtenu par la coïncidence de deux tourbillons-sources d'intensités $\pm(N + i\Gamma)$ disposés aux points $z_1 = a - h$, $z_2 = a$; de plus $c_{-1} = \frac{1}{2\pi} \lim\limits_{h \to 0} (N + i\Gamma)\, h$.

On peut interpréter de la même manière les pôles d'ordre supérieur. Considérons deux doublets de moments $\pm 2\pi \frac{c_{-2}}{h}$ disposés aux points $z_1 = a - h$, $z_2 = a$. Le système limite obtenu de ce système, lorsque $h \to 0$, est appelé *quadrupôle* de moment $2\pi c_{-2}$. Le potentiel complexe d'un champ quadrupolaire est

$$\lim_{h\to 0} -\frac{c_{-2}}{h}\left\{\frac{1}{z-a+h} - \frac{1}{z-a}\right\} = -c_{-2}\frac{d}{dz}\frac{1}{z-a} = \frac{c_{-2}}{(z-a)^2}.$$

Ainsi, un pôle du deuxième ordre, dans le voisinage duquel $f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z)$, est interprété comme un ensemble formé d'un dipôle et d'un quadrupôle de moments dépendant des coefficients c_{-1} et c_{-2}.

En général, un pôle d'ordre n de la fonction $f(z)$ peut être interprété comme un ensemble de multipôles d'ordres 2, 4, . . ., $2n$ dont les moments dépendent des coefficients de la partie principale du développement de $f(z)$ au voisinage du pôle considéré. En outre, par multipôle d'ordre $2k$ on comprend le système limite que l'on obtient d'un système de multipôles d'ordre $2k - 2$ de moments $\pm \frac{p_{2k-2}}{h}$ disposés aux points $z_1 = a - h$, $z_2 = a$, lorsque $h \to 0$ (un multipôle d'ordre 2 est un doublet).

Les points multiples d'un potentiel complexe en lesquels sa dérivée s'annule servent de points de ramification des lignes de courant et des lignes équipotentielles (cf. le théorème 8 du n° 41 où $n > 1$ dans notre cas). Ces points sont appelés *points critiques du courant*; en ces points, la vitesse d'écoulement est nulle.

Pour terminer, nous donnons la formule connue de S. Tchaplyguine qui permet de calculer le vecteur portance qui agit sur un corps cylindrique investi par un fluide en écoulement plan.

Considérons l'aile d'un avion volant à une vitesse constante $-\mathbf{V}_\infty$. Pour les vitesses inférieures à la vitesse du son, l'air peut être assimilé à un fluide parfait incompressible et on peut négliger les tourbillons autour de l'aile. En outre, nous représentons l'aile sous la forme d'un cylindre infiniment long de génératrices perpendiculaires au vecteur vitesse. Alors, le champ des vitesses des particules d'air est plan et on peut se limiter à l'étude du champ plan d'une section arbitraire perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Enfin, pour plus de commodité, nous nous représentons l'aile immobile et supposons que les filets d'air glissent sur elle avec une vitesse constante $\mathbf{V}_\infty$ à l'infini (fig. 110). La valeur de la pression pour cet écoulement irrotationnel permanent est donnée par la *formule* connue *de Bernoulli-Euler* (*):

$$p = A - \frac{\rho}{2} V^2, \tag{4}$$

(*) Cf. *N. Kotchine* et *I. Kibel* [6], t. I, p. 15.

où A est une constante, ρ la densité et $V = |\mathbf{V}|$ la vitesse d'écoulement (nous négligeons l'action de la pesanteur). Nous calculons d'après cette formule la force totale qui agit sur le contour C de la section de l'aile (*portance*). Puisque la pression sur C est dirigée à l'intérieur suivant la normale, la force qui agit sur l'élément $d\zeta$ du contour C est égale (sous forme vectorielle) à

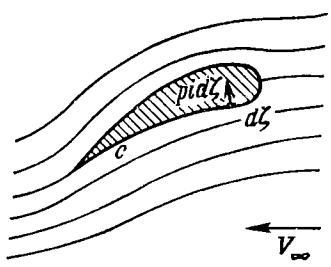

FIG. 110

$$pi\,d\zeta = Ai\,d\zeta - \frac{\rho}{2} V^2 i\,d\zeta,$$

et la force totale qui agit sur C est égale à la somme vectorielle des $pi\,d\zeta$, c'est-à-dire

$$\mathbf{P} = X + iY = -\int_C pi\,d\zeta = -\frac{\rho i}{2}\int_C V^2\,d\zeta \tag{5}$$

(l'intégrale de la constante Ai prise le long du contour fermé disparaît). Puisque les filets d'air *s'écoulent* autour du contour C, le vecteur vitesse d'écoulement aux points de C est dirigé suivant la tangente

$$\mathbf{V} = \overline{f'(\zeta)} = Ve^{i\varphi},$$

où $\varphi = \arg d\zeta$. D'où l'on a pour la vitesse $V = \overline{f'(z)}\,e^{-i\varphi}$, et la formule (5) prend la forme

$$\mathbf{P} = -\frac{\rho i}{2}\int_C \{\overline{f'(\zeta)}\}^2 e^{-2i\varphi}\,d\zeta = -\frac{\rho i}{2}\int_C \{\overline{f'(\zeta)}\}^2\,\overline{d\zeta},$$

où $e^{-2i\varphi}\,d\zeta = e^{-i\varphi}\,|d\zeta| = \overline{d\zeta}$. Passant aux quantités conjuguées complexes, nous obtenons le vecteur conjugué complexe du vecteur portance

$$\overline{\mathbf{P}} = X - iY = \frac{\rho i}{2}\int_C \{f'(\zeta)\}^2\,d\zeta. \tag{6}$$

C'est précisément la *formule* classique *de Tchaplyguine* (1910).

2) C h a m p t h e r m i q u e. Comme on le sait, la température d'un champ thermique plan (*) dépourvu de sources de chaleur satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{7}$$

où t est le temps et a^2 un coefficient constant. Se limitant à l'étude des régimes permanents, pour lesquels la température ne dépend

(*) Il lui correspond dans l'espace un champ plan dans lequel dans chaque plan parallèle au plan xy la répartition des températures est identique.

pas du temps, nous sommes conduits à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{8}$$

c'est-à-dire que la température est une fonction harmonique. La fonction harmonique conjuguée $v(x, y)$ est appelée *fonction de courant thermique* et la fonction analytique $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *potentiel complexe*. Voyons le sens physique de la fonction $v(x, y)$.

On admet dans la théorie de la propagation de la chaleur que la quantité de chaleur transmise par unité de temps à travers un élément de longueur ds est proportionnelle à ds et à la dérivée normale de la température $\frac{\partial u}{\partial n}$, c'est-à-dire qu'elle est égale à

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} ds = (-k \operatorname{grad} u, \mathbf{n}^0)\, ds = (\mathbf{Q}, \mathbf{n}^0)\, ds. \tag{9}$$

Ici, k est le coefficient de thermoconduction interne, le signe moins signifie que la chaleur passe de la région des températures élevées à celle des températures plus faibles ; le vecteur

$$\mathbf{Q} = -k \operatorname{grad} u \tag{10}$$

est appelé *vecteur flux de chaleur*. On voit de (9) que le flux du vecteur $\mathbf{Q}$ à travers la courbe C est la quantité de chaleur transmise à travers C par unité de temps.

D'après une propriété du gradient, en chaque point du champ le vecteur flux de chaleur $\mathbf{Q}$ est dirigé suivant la normale à la courbe $u(x, y) = \text{const}$ (*courbe isotherme*) qui passe par ce point. Mais cette direction est évidemment tangente à la ligne de niveau de la fonction $v(x, y)$, donc les courbes $v(x, y) = \text{const}$ servent de lignes vectorielles de $\mathbf{Q}$ (c'est-à-dire des courbes suivant lesquelles la chaleur « se propage »). Puis, de la formule (10) et des équations de Cauchy-Riemann, nous avons :

$$\mathbf{Q} = -k \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -k \frac{\partial v}{\partial y} + ki \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Donc, le flux de chaleur à travers une courbe arbitraire du côté gauche vers le côté droit (suivant le sens de parcours sur cette courbe), de sorte que $\mathbf{n}^0\, ds = -i\, d\zeta = dy - i\, dx$, est égal à

$$\int_C (\mathbf{Q}, \mathbf{n}^0)\, ds = -k \int_C \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx =$$

$$= -k \int_C dv = k \{v(z_1) - v(z_2)\} \tag{11}$$

(nous supposons k constant ; z_1 et z_2 sont les extrémités de la courbe C)

Donnons encore l'expression du vecteur $\mathbf{Q}$ en fonction du poten-

tiel complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$\mathbf{Q} = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -k\overline{f'(z)}. \qquad (12)$$

Ainsi, une analogie complète existe entre le champ des vitesses d'un écoulement fluide et le champ thermique. La seule différence est que, dans le premier cas, les deux composantes du potentiel complexe peuvent être multiformes tandis que dans le second cas la

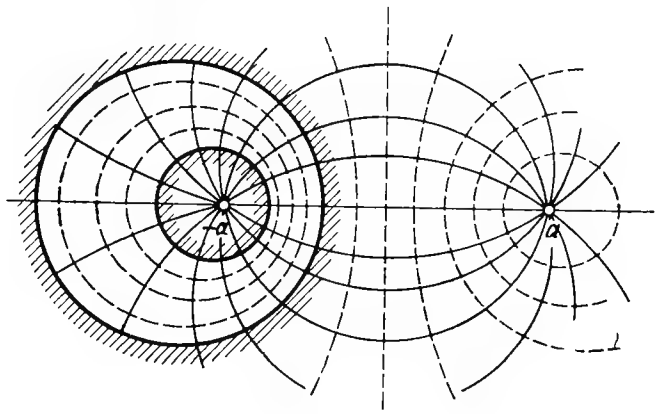

FIG. 111

partie réelle, à savoir la température, est toujours uniforme (nous ne tenons pas compte des différences non essentielles dans les formules).

Considérons comme exemple un système formé par une source et un puits de chaleur d'intensités $\pm q$, qui coïncident avec les points $\pm a$ (fig. 111). Le potentiel complexe du champ engendré par ce système est

$$f(z) = \frac{q}{2\pi}\operatorname{Ln}(z-a) - \frac{q}{2\pi}\operatorname{Ln}(z+a) = \frac{q}{2\pi}\operatorname{Ln}\frac{z-a}{z+a}. \qquad (13)$$

Les courbes isothermes $\left|\frac{z-a}{z+a}\right| = \text{const}$, les circonférences (images réciproques des circonférences $|w| = \text{const}$ par la transformation homographique $w = \frac{z-a}{z+a}$) pour lesquelles $\pm a$ sont des points symétriques, sont représentées en pointillé sur la fig. 111. Les lignes de courant thermique $\arg\frac{z-a}{z+a} = \text{const}$, les circonférences (images réciproques des demi-droites $\arg w = \text{const}$ par la même transformation) qui passent par les points $\pm a$, sont représentées par des lignes continues. Le flux de chaleur à travers toute courbe fermée décrite autour du seul

point a est égal à $+q$, le flux à travers une courbe décrite autour du seul point $-a$ est égal à $-q$ et le flux à travers une courbe décrite autour des deux points est nul. On s'en convainc très facilement à l'aide de la formule (11) en suivant la variation d'une branche quelconque de la fonction $v(z) = \frac{q}{2\pi} \operatorname{Arg}(z-a) - \frac{q}{2\pi} \operatorname{Arg}(z+a)$.

Le même champ est engendré dans une couronne excentrique comprise entre des circonférences chauffées jusqu'à des températures constantes $u = u_1$ et $u = u_2$, qui sont les lignes de niveau (représentées sur la fig. 111 par des traits gras) de notre champ. Il lui correspond dans l'espace un champ thermique dans un tube formé de deux cylindres d'axes parallèles. La possibilité de remplacer la ligne de niveau u (ou, ce qui revient au même, la ligne de courant du champ des vitesses du fluide) par des parois solides, dite *principe de solidification*, découle de l'unicité de la solution des problèmes aux limites correspondants (n° 48).

3) Champ électrostatique. On comprend par champ électrostatique un domaine tel qu'à chaque point est associé le vecteur intensité $\mathbf{E} = E_x + iE_y$. c'est-à-dire la force qui agit sur une charge unité placée en ce point. Nous allons considérer des champs électrostatiques plans qui correspondent à des champs plans dans l'espace. Comme on le sait de l'électrostatique, le flux du vecteur intensité du champ électrique à travers une courbe fermée C est

$$N = \int_C (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0)\, ds = 4\pi e, \tag{14}$$

où e est la charge totale disposée à l'intérieur du contour C et $\mathbf{n}^0$ la normale extérieure à C. Donc, en tout point z

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \lim_{C \to z} \frac{N}{S} = 4\pi\rho, \tag{15}$$

où ρ est la densité superficielle de la charge en ce point. L'intégrale

$$A = \int_C (\mathbf{E}, \mathbf{s}^0)\, ds = \int_C E_s\, ds \tag{16}$$

est évidemment le travail de la force du champ le long de la courbe C. La circulation du vecteur $\mathbf{E}$ le long de toute courbe fermée est nulle car il n'y a pas de dépense d'énergie pour maintenir le champ électrostatique. En effet, si le long d'une courbe fermée C la circulation n'était pas nulle, alors, en parcourant cette courbe dans un sens déterminé un nombre de fois infiniment grand, nous aurions une source inépuisable d'énergie (*Perpetuum mobile*). Il en découle qu'en tout point du champ

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0. \tag{17}$$

Ainsi, un champ électrostatique est toujours potentiel, c'est-à-dire qu'il existe une fonction uniforme $v(x, y)$, le *potentiel du champ*, tel que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial v}{\partial x} - i\,\frac{\partial v}{\partial y} = -\operatorname{grad} v. \tag{18}$$

S'il n'y a pas de charges dans un domaine D, alors div $\mathbf{E} = 0$ partout ; il en découle qu'il existe une *fonction de forces*

$$u(x, y) = \int_{z_0}^{z}{}_{L} -E_y\,dx + E_x\,dy + \text{const} \tag{19}$$

(qui est toujours uniforme dans les domaines simplement connexes et peut être multiforme dans les domaines multiplement connexes). De même que plus haut, on peut se convaincre facilement que toute ligne de niveau de la fonction $v(x, y)$ est tangente en chaque point au vecteur correspondant du champ, c'est-à-dire qu'elle est une ligne vectorielle ou une ligne de force du champ.

Comparant les formules (18) et (19), nous voyons que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann, c'est-à-dire qu'elles sont des fonctions harmoniques conjuguées, et

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

est une fonction analytique. Elle est appelée *potentiel complexe* du champ (*). A l'aide du potentiel complexe, on exprime le vecteur intensité

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial v}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial x} = -i\overline{f'(z)}, \tag{20}$$

et, par suite, toutes les quantités qui caractérisent le champ. En particulier, la charge totale disposée à l'intérieur d'un contour fermé C est égale à

$$e = \frac{1}{4\pi}\int_{C} f'(z)\,dz. \tag{21}$$

Nous voyons ainsi qu'un champ électrostatique est entièrement analogue au champ des vitesses d'un écoulement fluide : la différence est (sans tenir compte des écarts non essentiels dans les formules) que, dans le premier cas, les deux composantes du potentiel complexe peuvent être multiformes tandis que dans le second cas la partie réelle est toujours uniforme.

(*) Nous introduisons le potentiel complexe comme cela est admis dans la littérature électrotechnique. Evidemment, il diffère par le facteur i du potentiel admis en hydrodynamique.

Donnons un exemple simple. Considérons le champ plan engendré par une charge ponctuelle d'intensité e qui coïncide avec l'origine des coordonnées $z = 0$. Il lui correspond dans l'espace le champ d'une droite indéfinie L perpendiculaire au plan des z au point $z = 0$ et porteuse d'une charge de densité linéaire constante e (fig. 112). Calculons le vecteur champ électrique $\mathbf{E} = E_x + iE_y$ au point $z = x + iy$, c'est-à-dire la force qui agit sur la charge unité placée en ce point. A cette fin, introduisons sur L la coordonnée h, longueur repérée par rapport au point $z = 0$, et remarquons que le champ électrique élémentaire engendré par la charge $e\,dh$ localisée à la hauteur h est égal en module à

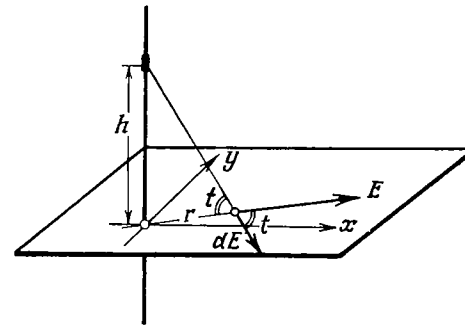

FIG. 112

$$|d\mathbf{E}| = e\frac{dh}{r^2+h^2},$$

où $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Puisque le vecteur $\mathbf{E}$ se trouve dans le plan des z, sa valeur est égale à la somme des projections de tous les champs électriques élémentaires $d\mathbf{E}$ sur ce plan, c'est-à-dire

$$|\mathbf{E}| = \int \cos t\,|d\mathbf{E}| = e\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos t}{r^2+h^2}\,dh = e\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{r}\,dt = \frac{2e}{r},$$

où t est l'angle formé par $d\mathbf{E}$ et le plan des z, $h = r\operatorname{tg} t$, $dh = \frac{r\,dt}{\cos^2 t} = \frac{r^2+h^2}{r}\,dt$ (fig. 112). Ainsi, *dans le champ plan d'une charge ponctuelle, la grandeur du champ électrique est inversement proportionnelle à la distance entre les points et non au carré de la distance, comme cela a lieu dans l'espace.*

Tenant compte de la direction du vecteur $\mathbf{E}$, nous trouvons

$$\mathbf{E} = \frac{2e}{r}\mathbf{r}^0 = \frac{2e}{\bar{z}}. \tag{22}$$

On voit donc que notre champ coïncide avec un champ plan engendré par une source ponctuelle d'intensité $N = 4\pi e$ (comparer avec l'exemple 1 du n° 46 ; notons que l'on aurait pu établir la formule (22) de la même manière que dans cet exemple). Nous trouvons le potentiel

complexe à l'aide de la formule (20) :

$$f(z) = -i \int_{z_0}^{z} \bar{\mathbf{E}}\, dz + c = 2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z} + c. \tag{23}$$

4) Champ magnétique de courants électriques. Nous nous bornons au cas d'un champ engendré par un système de courants linéaires I_k. D'après une loi d'électrotechnique connue, le vecteur champ magnétique $\mathbf{H}$, engendré à une distance r par un courant rectiligne I, est égal à $\frac{2I}{r}$, se trouve dans le plan perpendiculaire au courant et est dirigé suivant la normale au segment de droite, qui donne la plus courte distance et qui réunit un point du champ à la ligne de courant, dans le sens défini par la règle du tire-bouchon. Donc, pour le champ plan correspondant ce vecteur est

$$\mathbf{H} = \frac{2Ii}{\bar{z}}. \tag{24}$$

Par potentiel complexe d'un tel champ on comprend la fonction

$$F(z) = U + iV = 2I \operatorname{Ln} z + c, \tag{25}$$

où U est la fonction de forces du champ, V le potentiel et c une constante arbitraire.

Pour un système de courants I_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) qui coupent le plan des z aux points z_k, le vecteur intensité du champ magnétique et le potentiel complexe s'obtiennent en additionnant les expressions (24) et (25) et sont respectivement égaux à

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2I_k i}{\overline{z - z_k}},$$

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} 2I_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + c. \tag{26}$$

En comparant les formules (23) et (25), on peut conclure que le réseau des lignes de force et des lignes équipotentielles d'un champ électrique de charges linéaires qui coupent le plan des z aux points z_k coïncide entièrement avec le réseau d'un champ magnétique de courants linéaires qui coupent le plan en ces points. En outre, seuls les rôles des lignes de force et des lignes équipotentielles s'intervertissent.

Comme exemple, examinons un champ magnétique d'un système de deux courants linéaires de même direction et de grandeur égale qui coupent le plan des z aux points $\pm a$. Le potentiel complexe du champ est

$$F(z) = I \operatorname{Ln}(z^2 - a^2), \tag{27}$$

les lignes de force sont définies par l'équation

$$|z - a|\,|z + a| = \text{const}, \tag{28}$$

c'est-à-dire que ce sont des lemniscates (on appelle lemniscate le lieu géométrique des points dont le produit des distances à deux points donnés, dits foyers, est constant ; fig. 113).

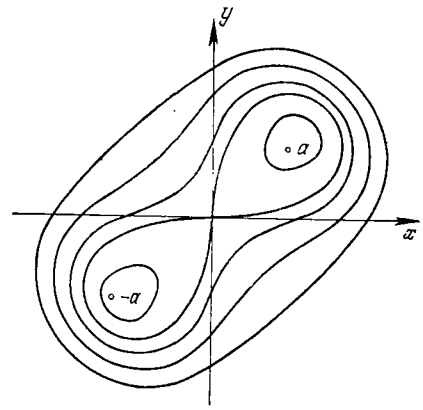

FIG. 113

48. Problèmes aux limites. Nous avons vu (nos 46 et 47) que pour étudier un champ plan il suffit de connaître son potentiel complexe. D'ordinaire, les problèmes appliqués se ramènent à la détermination du potentiel complexe d'après les conditions données sur la frontière des champs (elles sont dictées par les conditions physiques mêmes du problème considéré) ou, comme il est d'usage de le dire, à la résolution d'un *problème aux limites*. En outre, si le problème est posé correctement du point de vue physique, alors les conditions données doivent entièrement déterminer le champ, c'est-à-dire que le potentiel complexe doit être déterminé à une constante additive près. Nous donnons ici les énoncés les plus simples de problèmes aux limites de la théorie des champs plans, de plus. pour fixer les idées, nous avons recours à la terminologie hydrodynamique. Dans les exemples de résolution de ces problèmes, nous considérons d'autres interprétations aussi. Commençons par trois problèmes d'écoulement.

1) Ecoulement autour d'une courbe fermée. Nous supposons que le domaine D du champ contient à son intérieur le point à l'infini et est limité par un contour C, frontière du corps plongé dans un fluide (D est l'extérieur du contour C). Supposons que le corps soit animé d'un mouvement de translation avec une vitesse constante $-\mathbf{V}_\infty$ ou, ce qui revient au même, que le corps est immobile et que les filets de fluide l'investissent avec la vitesse $\mathbf{V}_\infty$. Alors la dérivée du potentiel complexe, la fonction conjuguée complexe de la vitesse d'écoulement (cf. la formule (3) du n° 47), doit être une fonction régulière à l'infini, analytique et uniforme dans le domaine D. Son développement en série de Laurent au voisinage du point à l'infini est donc de la forme

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \bar{\mathbf{V}}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \tag{1}$$

Il découle de la formule (23) du n° 46 que $2\pi i \cdot c_{-1} = \Gamma + iN$, où Γ et N sont la circulation et le flux respectivement le long et à travers tout contour fermé qui contient C à son intérieur. Mais comme le fluide s'écoule autour de C et qu'il n'y a pas de source dans le domaine D, donc $N = 0$ et, en intégrant (1), nous avons le développement suivant du potentiel complexe au voisinage du point à l'infini :

$$w = f(z) = \overline{V}_\infty z + c + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z - \frac{c_{-2}}{z} - \ldots, \tag{2}$$

où c est une constante arbitraire. La *circulation* Γ *doit être donnée* : c'est la première condition aux limites du problème de l'écoulement. Le sens physique de cette condition sera élucidé plus loin (cf. les exemples 2) et 3) du n° 49). La deuxième condition aux limites concerne le contour C. D'après la condition d'écoulement, en tout point du contour C, la vitesse du fluide doit être dirigée suivant la tangente à C. Autrement dit, le contour C *doit coïncider avec une des lignes de courant*, c'est-à-dire que la condition

$$v(x, y) = \text{const} \tag{3}$$

doit être satisfaite sur le contour C.

Démontrons l'*unicité de la solution du problème si la vitesse à l'infini* $\overline{V}_\infty$ *et la circulation* Γ *sont données*. Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ les potentiels complexes qui correspondent aux deux solutions du problème et $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Il est clair que la fonction $f(z)$ est uniforme et analytique partout dans D, y compris au point à l'infini. Sa partie imaginaire $v(z)$ est constante sur C et harmonique partout dans D (y compris au point à l'infini). D'après le théorème d'unicité de la solution du problème de Dirichlet, $v(z) \equiv \text{const}$ et, par conséquent, $f(z) = \text{const}$. Ainsi, nos potentiels complexes ne se distinguent que par des termes constants, ce qui n'influe pas sur la répartition des vitesses.

Notons que, dans le cas d'un *écoulement sans circulation*, $\Gamma = 0$, *le potentiel complexe* $w = f(z)$ *réalise une transformation biunivoque du domaine D sur l'extérieur d'un certain segment parallèle à l'axe des u*. En effet, on voit du développement de $f(z)$ au voisinage de l'infini

$$w = f(z) = \overline{V}_\infty z + c - \frac{c_{-2}}{z} - \ldots,$$

que le terme principal du développement est de la forme $\overline{V}_\infty z$, donc, la fonction $w = f(z)$ réalise une transformation biunivoque des voisinages des points à l'infini dans les plans des z et w (cela découle aussi de ce que $f'(\infty) = \overline{V}_\infty \neq 0$ existe). Puisque $f(z)$ a un pôle du premier ordre (à l'infini) dans le domaine D, d'après le principe de l'argument (n° 23), pour les a suffisamment grands, nous avons :

$$1 - n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)\, dz}{f(z) - a} = 0,$$

où $n(a)$ est le nombre des a-points de $f(z)$ dans le domaine D et la courbe C est parcourue dans le sens positif. Or, $n(a)$ est une fonction continue à valeurs entières du point a, donc, elle est constante, et $1 - n(a) = 0$ pour toutes les valeurs de a que la fonction $f(z)$ ne prend pas sur le contour C. Mais comme il découle de la condition aux limites (3), l'image du contour C par la transformation $w = f(z)$ est un certain segment parallèle à l'axe des u, ce qu'il fallait démontrer.

Le problème se généralise au cas d'un écoulement autour d'un système de contours (polyplans). Dans ce cas, en plus de la vitesse à l'infini, il faut se donner les valeurs des circulations autour de chaque contour.

2) Ecoulement dans une bande curviligne. Soient données deux courbes C_0 et C_1 qui n'ont de commun que leurs extrémités qui coïncident avec le point $z = \infty$ et soit D le domaine compris entre ces deux courbes. On demande de déterminer dans le domaine D un écoulement irrotationnel autour de C_0 et C_1 de débit donné N, c'est-à-dire l'écoulement de vitesse $\mathbf{V}$ à travers une courbe γ réunissant les courbes C_0 et C_1.

Soit $w = f(z)$ le potentiel complexe du champ à déterminer. La condition d'écoulement autour de C_0 et de C_1 se ramène à ce que sur ces courbes la fonction $v = \operatorname{Im} f(z)$ doit prendre certaines valeurs constantes, par exemple:

$$v(x, y) = \begin{cases} v_0 & \text{sur } C_0, \\ v_1 & \text{sur } C_1. \end{cases} \tag{4}$$

D'après la formule (11) du n° 46, le débit

$$N = \int_\gamma (\mathbf{V}, \mathbf{n}^0)\, ds = v_1 - v_0, \tag{5}$$

donc, la différence $v_1 - v_0$ est connue. Puisque $f(z)$ n'est déterminée qu'à un terme constant près, on peut toujours prendre $v_0 = 0$, $v_1 = N$.

Le problème est indéterminé si l'on n'impose pas des conditions complémentaires sur le comportement de $f(z)$ à l'infini. En effet, considérons, par exemple, la bande $0 < y < N$, où N est le débit donné; alors, la fonction

$$f_{n,\lambda}(z) = z + \lambda e^{\frac{\pi n z}{N}}$$

satisfait à toutes les conditions imposées, car pour tout entier n et pour tout nombre réel λ, sa partie imaginaire $y + \lambda e^{\frac{\pi n x}{N}} \sin \frac{\pi n y}{N}$ prend sur la frontière de la bande des valeurs constantes $v_0 = 0$, $v_1 = N$. Pour cette raison, nous supposons encore que: 1) les courbes C_0 et C_1 ont une courbure une fois continûment différentiable, 2) lorsque $z \to \infty$, la largeur de la bande D est bornée ainsi que les

courbures des courbes C_0 et C_1 et les dérivées de ces courbures, 3) on ne considère que des *écoulements à vitesse bornée à l'infini.*

Démontrons que dans ces conditions, pour un débit N donné, il existe un écoulement irrotationnel unique dans le domaine D autour de C_0 et C_1. En effet, soit $f(z)$ le potentiel complexe d'un écoulement quelconque qui satisfait aux conditions du problème et soit $z = \varphi(w)$ la fonction qui réalise la représentation conforme de la bande $0 < \operatorname{Im} w < N$ sur le domaine D; de plus, $\varphi(\pm\infty) = \pm\infty$ (*). Il est clair que la fonction

$$F(w) = f[\varphi(w)] = U + iV \tag{6}$$

est le potentiel complexe d'un écoulement dans la bande $0 < v < N$ autour des droites $v = 0$, $v = N$ de débit donné N. En vertu de la condition d'après laquelle la vitesse à l'infini de l'écoulement considéré est bornée et du théorème 1 du n° 29 sur la correspondance des frontières dans les représentations conformes, la dérivée $F'(w) = f'(z)\,\varphi'(w)$ est bornée à l'infini. Considérons la fonction $\frac{\partial V}{\partial u} - \operatorname{Im} F'(w)$ harmonique dans la bande $0 < v < N$. Il est clair qu'elle est nulle sur la frontière de la bande et bornée dans la bande fermée $0 \leqslant v \leqslant N$. D'après le principe généralisé de l'extrémum (théorème 5, n° 42), on peut conclure que partout dans la bande $\frac{\partial V}{\partial u} \equiv 0$ et, par suite, $F'(w) = a$ est une constante réelle. D'où $F(w) = aw$ (nous n'écrivons pas les constantes non essentielles), et comme la fonction $V(w) = av$ doit être nulle sur la droite $v = 0$ et égale à N sur la droite $v = N$, donc $a = 1$; soit enfin $F(w) \equiv w$. Il vient alors de la formule (6) : $f[\varphi(w)] = w$, c'est-à-dire que $f(z)$ doit être la fonction inverse de $\varphi(w)$. L'unicité de la solution du problème est démontrée.

On a en même temps démontré que le *potentiel complexe* que nous voulions déterminer $w = f(z)$ *réalise la transformation conforme et biunivoque du domaine D sur la bande* $0 < v < N$ *avec correspondance des points à l'infini* : $f(\pm\infty) = \pm\infty$.

3) Ecoulement dans un demi-plan curviligne. Soit donnée une courbe C sans point multiple, contenant le point à l'infini et fermée sur la sphère de la variable complexe ; par D nous désignons l'un des deux domaines qui ont pour frontière la courbe C. On demande de déterminer, dans le domaine D, un écoulement autour de la courbe C, dont la grandeur de la vitesse à l'infini est $|V_\infty|$.

Si on suppose de plus que C a une courbure continûment différentiable en tous ses points, y compris au point à l'infini, et si l'on

(*) Le point $z = \infty$ est un point double de la frontière du domaine D ; l'un de ces points est noté $-\infty$ et l'autre $+\infty$. De plus, il importe seulement que lorsqu'on parcourt la frontière du domaine D, ces points soient disposés de la même manière que dans le cas d'une bande rectiligne horizontale.

ne considère que des écoulements à vitesses bornées, alors l'unicité de la solution se démontre de la même manière que dans le problème précédent (seulement, il faut remplacer la bande par un demi-plan).

Le *potentiel complexe* à déterminer $w = f(z)$ *réalise la représentation conforme du domaine D sur le demi-plan supérieur avec les conditions* $f(\infty) = \infty$, $|f'(\infty)| = |\mathbf{V}_\infty|$.

Comme exemple, indiquons les changements qu'il faut apporter dans les problèmes 1)-3) lorsqu'on considère des champs électrostatiques. Partout, le « contour autour duquel il y a écoulement » est remplacé par le « conducteur » (plus précisément, par la trace du cylindre conducteur perpendiculaire au plan des z), la « vitesse » par l'« intensité », la « fonction de courant » par le « potentiel », la « fonction potentiel » par la « fonction de forces », le « débit » par la « différence de potentiel », etc. Dans le problème 1) la circulation donnée est remplacée par la charge totale $e = \frac{1}{4\pi} \int_C f'(z)\, dz =$

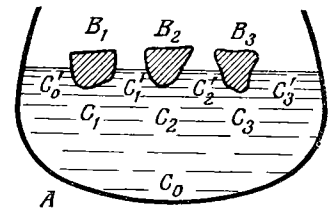

FIG. 114

$= \frac{ic_{-1}}{2}$ également donnée (cf. formule (21) du n° 47), donc dans la formule (1), $c_{-1} = -2ei$ et le terme en logarithme dans la formule (2) prend la forme $2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z}$ (comparer avec la formule (23) du n° 47).

Pour terminer, donnons deux exemples un peu plus compliqués de problèmes aux limites.

4) Problèmes de chocs. La plupart de ces problèmes sont régis par le schéma suivant. Un récipient A contient un liquide au repos ou en mouvement dans lequel sont plongés des corps solides B_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) (fig. 114 (*)). A l'instant $t = 0$, des forces d'impulsion agissent sur les corps de sorte que le corps B_k acquiert instantanément un accroissement de la vitesse $\mathbf{V}_k^{(i)}$ (choc). On demande de déterminer le champ des vitesses d'impulsion $\mathbf{V}^{(i)}$ et la distribution des pressions d'impulsion $P^{(i)}$ dans le liquide à l'instant suivant.

Passons à l'énoncé mathématique du problème, de plus, pour plus de simplicité, bornons-nous au cas d'un liquide au repos. Comme on le sait, en l'absence de forces d'impulsion massiques le mouvement après le choc est irrotationnel, en outre, le potentiel des vitesses $u(x, y)$ à l'instant suivant immédiatement le choc satisfait à la condition

$$\rho u = P^{(i)}, \tag{7}$$

(*) On suppose évidemment que le récipient et les corps sont cylindriques et que le mouvement du liquide est plan ; on a représenté sur la fig. 114 la section perpendiculaire aux génératrices des cylindres.

où ρ est la densité du liquide et $P^{(i)}$ la pression d'impulsion. Désignons par D le domaine occupé par le liquide, par C sa frontière. C est composée des arcs de courbe C_0 (parois du récipient), C_k (surfaces des corps B_k) et C_k' (portions de la surface libre entre deux arcs de courbe successifs C_k, C_{k+1}) (fig. 114). Pour le potentiel des vitesses $u(x, y)$ nous avons les conditions aux limites suivantes :

a) Sur les parois C_0 du récipient

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{8}$$

car, de la condition d'écoulement nous obtenons $v(x, y) = \text{const}$, et alors des conditions de Cauchy-Riemann, écrites pour les directions $\mathbf{s}^0$ et $\mathbf{n}^0$, nous avons : $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s} = 0$.

b) Sur les arcs de courbe C_k, points de contacts des corps avec le liquide,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\mathbf{V}^{(i)}, \mathbf{n}^0), \tag{9}$$

où $\mathbf{n}^0$ est le vecteur unité de la normale intérieure à C_k. Nous supposons en outre que le liquide ne s'éloigne pas des parois du récipient et des corps (cavitation) ; (9) découle de la relation connue entre grad $u = \mathbf{V}^{(i)}$ et la dérivée suivant une direction. On suppose connues les vitesses d'impulsion des corps B_k de sorte que le second membre de la formule (9) est une fonction connue.

c) Sur les arcs de courbe C_k' (c'est-à-dire sur la surface libre)

$$u(x, y) = 0, \tag{10}$$

car la pression sur la surface libre est finie ; donc, $P^{(i)} = 0$ et alors (10) découle de (7).

Déterminant $u(x, y)$ dans le domaine D, nous trouvons la répartition des vitesses $\mathbf{V} = \text{grad } u$, tandis que la pression est donnée par la formule (7).

Ce problème aux limites est un cas particulier du *problème aux limites mixte* de la théorie des fonctions harmoniques, dont l'étude et la résolution sont faites au n° 55 (cf. également exemple 9) du n° 49).

5) Ecoulement avec décollement. C'est ainsi que l'on appelle un écoulement autour d'un corps tel que l'une des lignes de courant réunit le point à l'infini à un point B de ce corps en lequel elle se décompose en deux branches dont chacune suit le corps jusqu'aux points C_1 et C_2, puis s'en détache pour s'éloigner à nouveau vers l'infini (fig. 115). On suppose en outre que les jets libres C_1A_1 et C_2A_2 séparent la zone de mouvement I de la zone de repos II de manière que le long de ces jets les vitesses accusent des

discontinuités (*). Dans la zone I, le mouvement est supposé irrotationnel ; dans la zone de repos II, la vitesse est partout nulle, donc la pression est constante (cf. la formule de Bernoulli-Euler (4) du n° 47), et les jets C_1A_1 et C_2A_2 peuvent être considérés comme la frontière libre d'un fluide. Nous avons donc le problème aux limites suivant :

a) sur la portion C_1BC_2 du corps (dont la longueur est inconnue) il y a écoulement, c'est-à-dire

$$v(x, y) = \text{const}; \quad (11)$$

b) sur les jets libres C_1A_1 et C_2A_2 (dont les formes sont inconnues) la valeur de la vitesse est constante :

$$|\mathbf{V}| = |\mathbf{V}_\infty|, \quad (12)$$

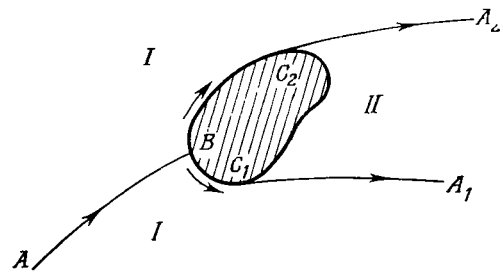

FIG. 115

cela découle de la formule de Bernoulli-Euler, en vertu de la constance de la pression dans la zone de repos.

Les méthodes de résolution de ce problème aux limites sont données au n° 65.

Dans la suite, nous rencontrerons plus d'une fois les problèmes aux limites des différents types.

49. Exemples. Applications. 1) Formule de Joukovski. Au numéro 47 nous avons établi la formule de Tchaplyguine de la portance d'un profil investi par un fluide en mouvement :

$$\overline{\mathbf{P}} = X - iY = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz. \quad (1)$$

Tenant compte du développement à l'infini de la dérivée du potentiel complexe dans le problème d'écoulement autour d'une courbe fermée, obtenu au n° 48 :

$$f'(z) = \overline{\mathbf{V}}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} + \ldots,$$

et appliquant le théorème des résidus à l'intégrale (1), nous trouvons :

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{\rho i}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{\Gamma \overline{\mathbf{V}}_\infty}{\pi i} = i\rho\Gamma\overline{\mathbf{V}}_\infty.$$

Passant aux quantités conjuguées complexes, nous obtenons le *théorème* connu *de Joukovski* (1904) :

$$\mathbf{P} = -i\rho\Gamma\mathbf{V}_\infty, \quad (2)$$

(*) Ce schéma reflète, dans une certaine mesure, la discontinuité pratiquement observée des vitesses en amont d'un corps en mouvement dans les fluides réels ; cependant, dans les fluides réels la zone II n'est pas la zone de repos, mais la zone de mouvement tourbillonnaire et ne s'étend pas vers l'infini.

c'est-à-dire que la *portance qui agit sur le contour investi par un fluide en mouvement est en grandeur égale au produit de la circulation, de la densité et de la valeur de la vitesse à l'infini, et sa direction subit une rotation par rapport à* $\mathbf{V}_\infty$ *d'un angle droit, et cela dans le sens opposé à celui de la circulation (pour* $\Gamma > 0$ *dans le sens négatif ; pour* $\Gamma < 0$ *dans le sens positif).*

2) Ecoulement autour d'un cylindre circulaire. Déterminons d'abord l'écoulement sans circulation autour de la circonférence $|z| = R$ avec une vitesse à l'infini donnée $\mathbf{V}_\infty = v_\infty e^{i\vartheta}$. D'après ce que nous avons démontré (n° 48), le potentiel complexe de cet écoulement réalise la représentation conforme de l'extérieur du cercle sur l'extérieur d'un segment de l'axe réel. Cette transformation est donnée par la fonction de Joukovski

$$w = k\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right),$$

où k est une constante réelle. Mais pour cette fonction $w'(\infty) = \frac{k}{R}$ à la place de $\overline{\mathbf{V}}_\infty = v_\infty e^{-i\vartheta}$. Donc, pour obtenir le potentiel complexe de l'écoulement de vitesse à l'infini donnée, nous remplaçons z dans la dernière formule par $ze^{-i\vartheta}$ et nous posons $k = Rv_\infty$; nous obtenons :

$$w = \overline{\mathbf{V}}_\infty z + \frac{\mathbf{V}_\infty R^2}{z}. \tag{3}$$

Superposant un écoulement de circulation $\frac{\Gamma}{2\pi i}\operatorname{Ln} z$ autour de la circonférence $|z| = R$ sur l'écoulement sans circulation qui vient d'être obtenu, nous trouvons la solution du problème

$$w = f(z) = \overline{\mathbf{V}}_\infty z + \frac{\mathbf{V}_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\operatorname{Ln} z. \tag{4}$$

Les points critiques du courant, c'est-à-dire les points en lesquels la vitesse d'écoulement est nulle (cf. n° 47), sont donnés par l'équation

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i \overline{\mathbf{V}}_\infty} z - e^{2i\vartheta} R^2 = 0,$$

d'où

$$z_{\text{crit}} = \frac{1}{4\pi \overline{\mathbf{V}}_\infty}\left(\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 v_\infty^2 R^2 - \Gamma^2}\right).$$

Il en découle que pour $|\Gamma| \leqslant 4\pi v_\infty R$ nous avons $|z_{\text{crit}}| = \frac{1}{4\pi v_\infty}\sqrt{16\pi^2 v_\infty^2 R^2}$, et les deux points critiques se trouvent sur la circonférence $|z| = R$, pour $|\Gamma| > 4\pi v_\infty R$ nous avons $|z_{\text{crit}}| = \frac{1}{4\pi v_\infty}|\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2 v_\infty^2 R^2}| \neq R$, et, comme le produit des modules des racines de l'équation du deuxième degré est égal à R^2,

un des points se trouve dans le cercle $|z| < R$ et l'autre à son extérieur.

Considérons en détail le premier cas. Prenant sur la circonférence $z = Re^{i\varphi}$, nous avons

$$|f'(z)| = \left| v_\infty (e^{-i\vartheta} - e^{i(\vartheta - 2\varphi)}) - \frac{\Gamma i}{2\pi R} e^{-i\varphi} \right| =$$

$$= \left| 2v_\infty \sin(\varphi - \vartheta) - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right|, \quad (5)$$

d'où, en prenant $\vartheta = 0$ pour plus de simplicité, nous obtenons la relation suivante pour les points critiques :

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1. \quad (6)$$

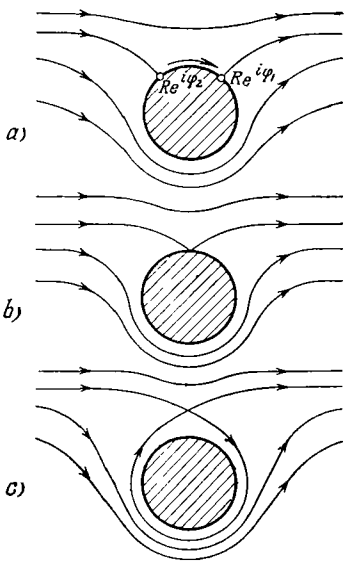

FIG. 116

Au point $Re^{i\varphi_2}$, la ligne de courant de l'écoulement se décompose en deux branches : l'une contourne l'arc de circonférence supérieur, l'autre l'arc de circonférence inférieur. Au point $Re^{i\varphi_1}$, les deux lignes se réunissent (fig. 116*a*). Le premier point est appelé *point de ramification* et le second *point de fuite* du courant.

Pour un écoulement sans circulation, les points critiques coïncident avec $\pm R$. La circulation a tendance à rapprocher ces points : lorsque Γ croît, ces deux points se rapprochent et pour $\Gamma = 4\pi v_\infty R$ ils se confondent (fig. 116*b*). L'augmentation ultérieure de Γ conduit à la formation de lignes fermées de courant (fig. 116*c*) : nous avons alors le deuxième cas.

Si la vitesse à l'infini a un argument ϑ, alors l'image de l'écoulement subit une rotation. En particulier, la formule (6) pour les points de fuite prend la forme :

$$\Gamma = 4\pi R v_\infty \sin(\varphi_1 - \vartheta). \quad (7)$$

Notons que dans notre problème on peut se donner le point de fuite du courant $Re^{i\varphi_1}$ à la place de la circulation Γ, car ils sont reliés entre eux par la formule simple (7). La valeur de la portance, dans le théorème de Joukovski, s'exprime à l'aide du point de fuite :

$$|\mathbf{P}| = 4\pi\rho R v_\infty^2 |\sin(\varphi_1 - \vartheta)| \quad (8)$$

et la vitesse d'écoulement (comparer à la formule (5)) :

$$|\mathbf{V}| = 2v_\infty |\sin(\varphi - \vartheta) - \sin(\varphi_1 - \vartheta)|. \quad (9)$$

3) Ecoulement autour d'un profil quelconque. Condition de Tchaplyguine. Soient donnés un profil arbitraire limité par une courbe fermée C et la fonction

$$\zeta = g(z), \quad g(\infty) = \infty, \quad g'(\infty) = 1 \tag{10}$$

qui réalise la représentation conforme de l'extérieur de C sur l'extérieur du cercle $|\zeta| > R$. Il est alors clair que le potentiel complexe de l'écoulement autour du profil, si le point de fuite z_1 et la vitesse à l'infini sont donnés, est la fonction

$$w = V_\infty g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} g(z), \tag{11}$$

où R est complètement déterminé par les conditions (10) et Γ est donnée, d'après la formule (7), par l'image $\zeta_1 = e^{i\varphi_1}$ du point de fuite du courant.

Supposons qu'il y a écoulement autour d'un cylindre possédant un bord effilé de sorte que le profil C a un point anguleux z_0 dont les tangentes forment un angle $\alpha\pi$ ($0 \leqslant \alpha < 1$). Il découle alors du comportement de la transformation conforme aux points anguleux (cf. n° 37) dans le voisinage de ce point

$$\zeta = g(z) \approx A (z - z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}} + \zeta_0 \tag{12}$$

et donc la dérivée

$$\frac{d\zeta}{dz} \approx B (z - z_0)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} \tag{13}$$

devient infinie (*) au point z_0 (A et B sont des constantes non nulles, $\zeta_0 = g(z_0)$).

Tchaplyguine a proposé d'admettre que *dans l'écoulement autour d'un profil avec un point anguleux z_0, le point de fuite du courant se déplace en ce point sous l'action de la viscosité et des formations tourbillonnaires* (*condition de Tchaplyguine*). Alors, d'après l'exemple précédent, au point $\zeta_0 = g(z_0)$ la dérivée $\frac{dw}{d\zeta}$ de la transformation (4) (nous avons remplacé z par ζ) a un zéro du premier ordre, c'est-à-dire que nous avons dans le voisinage du point z_0:

$$\frac{dw}{d\zeta} \approx C(\zeta - \zeta_0) = D (z - z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}} \tag{14}$$

(nous avons tenu compte de l'expression (12); C et D sont des constantes).

(*) Rigoureusement parlant, dans les formules (12) et (13), il peut encore y avoir des facteurs contenant des logarithmes qui ne changent pas la conclusion (cf. p. 173).

Tenant compte des formules (13) et (14), nous obtenons qu'au voisinage de z_0

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \approx BD\,(z - z_0)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}},$$

c'est-à-dire que *de la condition de Tchaplyguine il découle que sur le bord effilé du profil la vitesse est bornée.*

Pour les contours à un bord effilé, la condition de Tchaplyguine détermine d'une manière unique la valeur de la circulation (comparer à la formule (7)).

4) Ecoulement autour des profils Joukovski. Nous avons démontré (n° 34, exemple 1) que la fonction

$$\omega = z + \sqrt{z^2 - a^2} \qquad (15)$$

transforme l'extérieur du profil Joukovski de paramètres a, h et d sur l'extérieur du cercle C' de centre au point $\omega_0 = ih - de^{-\frac{\alpha}{2}i}$, où $\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\frac{h}{a}$, et de rayon $R_0 = \sqrt{a^2 + h^2} + d$ (fig. 117 et 63). La dérivée de la fonction (15) à l'infini est égale à 2, par conséquent, la fonction $\zeta = g(z)$ pour le profil Joukovski a la forme:

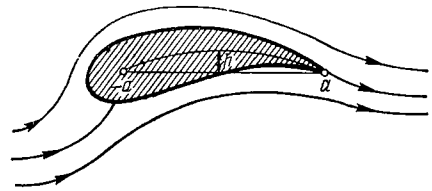

FIG. 117

$$\zeta = \frac{1}{2}(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2}(z - \omega_0 + \sqrt{z^2 - a^2}),$$

et le rayon de la circonférence sur laquelle est transformé le profil est égal à

$$R = \frac{R_0}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + h^2} + d).$$

Les portant dans (11), nous obtenons le potentiel complexe de l'écoulement autour du profil Joukovski.

On voit de la fig. 62 que l'argument de l'image du point anguleux du profil dans le plan des ζ est égal à $-\frac{\alpha}{2}$ ($\zeta_1 = Re^{-\frac{i\alpha}{2}}$), de sorte que, d'après la condition de Tchaplyguine et la formule (7), la circulation est

$$\Gamma = -2\pi v_\infty (\sqrt{a^2 + h^2} + d) \sin\left(\vartheta + \frac{\alpha}{2}\right), \qquad (16)$$

et alors, d'après le théorème de Joukovski, la valeur de la portance est

$$|\mathbf{P}| = 2\pi\rho v_\infty^2 (\sqrt{a^2 + h^2} + d) \sin\left(\vartheta + \frac{\alpha}{2}\right). \qquad (17)$$

5) Champ électrostatique au voisinage des bords d'un condensateur plan. Si pour l'étude d'un champ à l'intérieur d'un condensateur plan ce champ est pratiquement supposé uniforme, par contre, au voisinage des extrémités l'uniformité du champ est enfreinte d'une manière essentielle et un calcul spécial est nécessaire. Lorsqu'on considère le champ au voisinage d'une des extrémités du condensateur, nous négligeons, pour plus de simplicité, l'influence de la deuxième extrémité et nous représentons le condensateur sous la forme de deux demi-plans superposés. Soient $2h$ la distance entre ces deux demi-plans et $\pm V$ leurs potentiels.

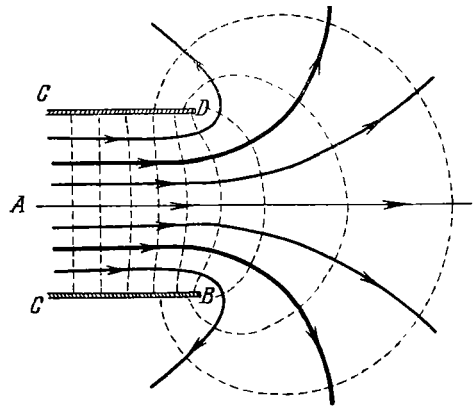

FIG. 118

Le problème se ramène au calcul d'un champ plan de l'extérieur de deux demi-droites parallèles (traces des armatures du condensateur dans le plan perpendiculaire aux bords des armatures), c'est-à-dire au problème aux limites 2) du n° 48. Le potentiel complexe $w = f(z)$ réalise la transformation du domaine du champ sur la bande $-V < \operatorname{Im} v < V$ avec correspondance des points $f(A) = -\infty$, $f(C) = \infty$. La transformation inverse a été obtenue dans l'exemple 3 du n° 39 :

$$z = \frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}w} + \frac{\pi}{V}w\right) \tag{18}$$

(cf. la formule (13) ; nous y avons interverti les rôles de z et de w, réalisé une homothétie de la bande et négligé les termes constants non essentiels).

Nous avons représenté sur la fig. 118 les lignes équipotentielles et les lignes de force du champ ; leurs équations paramétriques s'obtiennent respectivement pour $v = \text{const}$ ou $u = \text{const}$ des relations obtenues en séparant les parties réelles et imaginaires dans la formule (18) :

$$x = \frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v + \frac{\pi}{V}u\right), \quad y = \frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}u}\sin\frac{\pi}{V}v + \frac{\pi}{V}v\right) \tag{19}$$

(nous posons $z = x + iy$, $w = u + iv$). D'après la formule (20) du n° 47, l'intensité du champ est

$$\mathbf{E} = -i\left(\frac{\overline{\partial w}}{\partial z}\right) = -\frac{i}{\left(\frac{\overline{\partial z}}{\partial w}\right)} = -i\frac{V}{h}\frac{1}{1+e^{\frac{\pi}{V}\bar{w}}}. \tag{20}$$

A l'intérieur du condensateur, c'est-à-dire pour les z voisins du point A, $\overline{w}$ est voisin de $-\infty$, donc, l'intensité du champ $\mathbf{E} \approx \approx -i\frac{V}{h}$ est voisine de l'intensité du champ uniforme. Lorsqu'on s'approche des bords du condensateur, $\overline{w} \to \pm Vi$, donc l'intensité du champ croît indéfiniment.

Suivons la variation de la valeur de l'intensité du champ $|\mathbf{E}| = \left|\frac{dw}{dz}\right|$ le long des lignes équipotentielles. Etant donné que la dérivée d'une fonction analytique ne dépend pas de la direction suivant laquelle on calcule cette dérivée, on peut donc la calculer suivant la direction de la ligne de force $u = \text{const}$. Alors $|dw| = |dv|$, $|dz| = ds$, où ds, la différentielle de l'arc de ligne de force, est obtenue des formules (19) pour $u = \text{const}$:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{h}{V}\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u} + 2e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v + 1}\ dv$$

et, par suite,

$$|\mathbf{E}| = \frac{dv}{ds} = \frac{V}{h}\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u} + 2e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v + 1}}. \qquad (21)$$

Pour calculer le maximum de $|\mathbf{E}|$ sur la ligne équipotentielle, il suffit de déterminer le minimum, par rapport à u pour v fixe, de l'expression qui se trouve sous la racine. La condition nécessaire d'extrémum $e^{\frac{\pi}{V}u} + \cos\frac{\pi}{V}v = 0$ (qui s'obtient en égalant à zéro la dérivée par rapport à u) n'est *a fortiori* pas satisfaite lorsque le cosinus est positif, c'est-à-dire pour $\frac{\pi}{V}|v| < \frac{\pi}{2}$ ou $|v| < \frac{V}{2}$. Sur de telles lignes, l'intensité du champ $|\mathbf{E}|$ varie d'une manière monotone sans avoir de maximum ni de minimum. Pour $v = \pm\frac{V}{2}$, le maximum de

$$|\mathbf{E}| = \frac{V}{h}\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u} + 1}}$$

est atteint pour $u = -\infty$, c'est-à-dire sur l'extrémité *de gauche* du condensateur. Si on construit un condensateur dont les armatures ont la forme des lignes équipotentielles $v = \pm\frac{V}{2}$ (*) (les traits

(*) Nous avons pour ces lignes à partir des formules (19) : $x = \frac{h}{V}u$, $y = \pm\frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}u} + \frac{\pi}{2}\right)$, d'où $y = \pm\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{\pi}e^{\frac{\pi}{h}x}\right)$.

gras sur la fig. 118), alors, pour un pareil condensateur, l'intensité du champ décroît lorsqu'on s'approche des bords, mais ne croît pas indéfiniment comme dans le cas d'un condensateur plan. Ce condensateur est appelé *condensateur de Rogowski.*

6) Champ magnétique dans une machine électrique. Considérons le champ magnétique dans l'espace compris entre le rotor et le stator au voisinage de la rainure du rotor d'une machine. Les rayons et la largeur du stator et du rotor sont supposés suffisamment grands pour que le champ diffère peu d'un champ plan (on a représenté sur la fig. 119*a* la section de la machine par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation). Nous désignons par $2H$ la largeur de la rainure du rotor; étant donné que, en pratique, une très petite partie des lignes de force qui pénètrent dans la rainure atteignent sa base, on peut supposer que la profondeur de cette rainure est infiniment grande. Nous désignons par h la distance entre le stator et le rotor; négligeant l'influence des autres rainures, nous supposons que cet espace représente une bande infinie. Après les simplifications que nous venons d'introduire, le domaine du champ qui nous intéresse a la forme du pentagone représenté sur la fig. 119*b*. Nous supposons que le potentiel de la trace de la frontière du rotor $A_1A_6A_5A_4A_3$ est V et celui de la trace de la frontière du stator $A_1A_2A_3$ est nul. (On suppose que la perméabilité magnétique du fer est infiniment grande.)

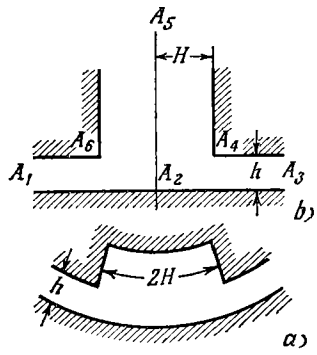

FIG. 119

Le problème est du type problème aux limites 2) du n° 48 et se ramène à la transformation conforme $w = f(z)$ du domaine du champ sur la bande $0 < \operatorname{Im} w < V$, $f(A_1) = -\infty$, $f(A_3) = \infty$. Nous avons calculé (n° 39) la transformation du demi-plan supérieur sur le domaine du champ:

$$z = z(\omega) + \frac{2i}{\pi}\left(h \operatorname{arctg} \frac{h\omega}{H\sqrt{\omega^2 - a^2}} + H \operatorname{arth} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}\right), \quad (22)$$

où $a^2 = \frac{H^2 + h^2}{H^2}$, de plus le segment $(-1, 1)$ de l'axe réel du plan des ω a pour image la droite $A_1A_2A_3$ et la partie restante de l'axe a pour image $A_3A_4A_5A_6A_1$ (cf. n° 39, formule (23); nous avons changé la notation des variables). Ayant recours à une transformation auxiliaire du demi-plan des ω sur la bande $0 < \operatorname{Im} w < V$ avec la correspondance voulue des frontières:

$$w = \frac{V}{\pi} \ln \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arth} \omega, \quad (23)$$

et en éliminant ω entre (22) et (23), nous obtenons la fonction inverse du potentiel complexe que nous voulions déterminer.

Déterminons la valeur du vecteur induction magnétique **B** qui, dans notre cas, coïncide avec **H**

$$|\mathbf{B}| = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \left|\frac{\frac{dw}{d\omega}}{\frac{dz}{d\omega}}\right| = \frac{2V}{\pi}\frac{1}{|1-\omega^2|}\cdot\frac{1}{\frac{2H}{\pi}\left|\frac{\sqrt{\omega^2-a^2}}{\omega^2-1}\right|} = \frac{V}{H}\frac{1}{|\sqrt{\omega^2-a^2}|} \qquad (24)$$

(pour calculer les dérivées, nous avons tenu compte des expressions (23) et (22)).

Pour la caractéristique de la machine, il est important de connaître le degré de pulsation du flux magnétique, c'est-à-dire le rapport de l'induction minimale sur le stator à l'induction maximale. Grâce à des considérations physiques, il est clair que l'induction minimale $B_{\min}$ est obtenue en regard de la rainure du rotor, c'est-à-dire au point A_2, et l'induction maximale $B_{\max}$ en regard du milieu de la saillie, c'est-à-dire au point A_1. Puisque le point A_2 correspond à $\omega = 0$ et le point A_1 au point $\omega = -1$, le rapport en question est (*)

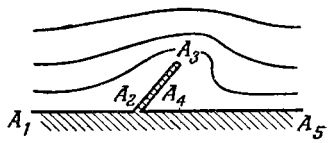

FIG. 120

$$\frac{B_{\min}}{B_{\max}} = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = \frac{h}{\sqrt{H^2+h^2}}. \qquad (25)$$

7) Ecoulement plan autour d'un segment de droite incliné $(0, he^{i\alpha\pi})$, de profondeur infinie et de vitesse à l'infini v_∞ (fig. 120). Ce problème est du type problème aux limites 3) du n° 48 et se ramène à la transformation conforme du domaine du courant sur le demi-plan supérieur. La transformation inverse a été obtenue au n° 39

$$z = z(w) = h(w-1)^{\alpha}(\beta w+1)^{1-\alpha}, \qquad (26)$$

où $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ (cf. la formule (10) du n° 39 ; nous avons interverti les rôles de z et de w et nous avons fait subir une dilatation au plan des z pour obtenir un segment de droite de longueur h). Il est clair

(*) On peut également obtenir ce résultat à l'aide de considérations mathématiques. La frontière du stator $A_1A_2A_3$ a pour image le segment $(-1, 1)$ de l'axe réel dans le plan des ω et on voit alors de (24) que

$$B_{\min} = \frac{V}{Ha}, \quad B_{\max} = \frac{V}{H}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.$$

que $z(\infty) = \infty$, mais la dérivée à l'infini est égale à :

$$\left.\frac{dz}{dw}\right|_{w=\infty} = \alpha h\left[\left(\frac{\beta w+1}{w-1}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{w-1}{\beta w+1}\right)^{\alpha}\right]_{w-\infty} = \frac{\alpha h}{\beta^{\alpha}}(1+\beta) = \frac{h}{\beta^{\alpha-1}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Remplaçant w par $\frac{\gamma w}{v_\infty}$ dans la formule (26), nous obtenons la fonction inverse du potentiel complexe, car sa dérivée à l'infini est égale à $\frac{1}{v_\infty}$, ce qu'il fallait démontrer. On a représenté sur la fig. 120 les lignes de courant. Notons que, comme on le voit de l'expression de la dérivée $\frac{dz}{dw}$, la vitesse du fluide $|\mathbf{V}| = \left|\frac{dw}{dz}\right|$ devient infinie au point A_3 qui correspond au point $w = 0$ (*) et s'annule aux points A_2 et A_4 qui correspondent à $w = -\frac{1}{\beta}$ et $w = 1$.

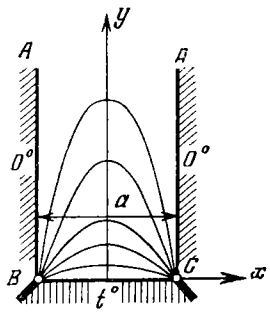

FIG. 121

8) Distribution de la température dans un canal dont le fond se trouve maintenu à une température $t°$ et les parois à une température 0° ; il y a du matériau calorifuge entre les parois et le fond. La section du canal par un plan perpendiculaire au fond est représentée sur la fig. 121. Le problème se ramène au problème généralisé de Dirichlet pour une demi-bande. Transformons d'abord cette demi-bande sur le demi-plan supérieur à l'aide de la fonction $\zeta = \sin\frac{\pi z}{a}$; le fond BC a pour image le segment $(-1, 1)$ et les parois les demi-droites $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Il ne reste qu'à avoir recours à la formule (9) du n° 44 :

$$u(\zeta) = -\frac{\varphi_1}{\pi}t + \frac{\varphi_2}{\pi}t = \frac{t}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{t}{\pi}\arg\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

(dans notre cas, $n = 2$, $u_0 = u_2 = 0$, $u_1 = t$, $\varphi_{1,2} = \arg(\zeta \pm 1)$) et à remplacer $\zeta = \sin\frac{\pi z}{a} = \sin\frac{\pi x}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a} + i\cos\frac{\pi x}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{a}$. Nous obtenons :

$$u(z) = \frac{t}{\pi}\arg\frac{(\sin\cdot\operatorname{ch}-1)+i\cos\cdot\operatorname{sh}}{(\sin\cdot\operatorname{ch}+1)+i\cos\cdot\operatorname{sh}} = \frac{t}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\cos\cdot\operatorname{sh}}{\sin^2\cdot\operatorname{ch}^2-1+\cos^2\cdot\operatorname{sh}^2}$$

(*) En outre, il faut remarquer que si l'on suppose que pour $w \to 0$ la fraction $\frac{\beta w+1}{w-1} \to -1 = e^{i\pi}$, alors la seconde fraction $\frac{w-1}{\beta w+1} \to e^{-i\pi}$; donc, $\frac{dz}{dw} \to e^{i\pi(1-\alpha)} + e^{-i\pi\alpha} = 0$ lorsque $w \to 0$.

(nous nous sommes débarrassés de la quantité complexe du dénominateur ; pour plus de simplicité, nous n'écrivons pas les arguments des fonctions trigonométriques et hyperboliques). Après avoir remplacé au dénominateur ch^2 par $1 + \mathrm{sh}^2$, nous le mettons sous la forme $\mathrm{sh}^2 - \cos^2$; si l'on pose $\operatorname{arctg} \frac{2\cos \cdot \mathrm{sh}}{\mathrm{sh}^2 - \cos^2} = \alpha$, on a alors $\frac{\mathrm{sh}^2 - \cos^2}{\mathrm{sh}^2 + \cos^2} = \cos \alpha$, donc

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\cos}{\mathrm{sh}},$$

et la formule de la température prend la forme

$$u(z) = \frac{2t}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{2t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{\pi x}{a}}{\mathrm{sh} \frac{\pi y}{a}}. \tag{27}$$

Utilisant l'intégrale de Schwarz pour le demi-plan, on peut aussi déterminer le potentiel complexe du flux de chaleur.

9) Choc d'une plaque contre l'eau. Pour terminer donnons un exemple très simple de problème de choc. Supposons qu'un liquide remplisse le demi-espace inférieur et qu'un corps solide, une plaque plane qui a la forme d'une bande de largeur $2a$, est tangent à l'instant du choc $t = 0$ à la surface libre et acquiert instantanément une vitesse V_0 dirigée verticalement vers le bas (fig. 122). Soit $(-a, a)$ la trace de la plaque dans le plan perpendiculaire à ses arêtes et soit $f(z) = u(z) + iv(z)$ le potentiel complexe du champ plan qui décrit la vitesse du liquide après le choc.

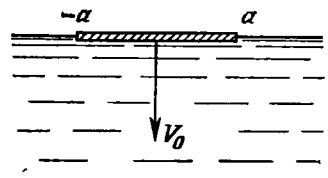

FIG. 122

Les conditions aux limites du problème s'énoncent de la manière suivante : nous avons sur le segment $(-a, a)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -V_0, \tag{28}$$

et sur la partie restante de l'axe des x qui correspond à la surface libre

$$u = 0. \tag{29}$$

D'après le principe de symétrie, nous prolongeons la fonction harmonique u dans le demi-plan supérieur à travers les demi-droites $(-\infty, -a)$ et (a, ∞) (ceci est possible grâce à la condition (29), cf. n° 42) ; au lieu de (28) nous obtenons alors sur le bord supérieur la condition $\frac{\partial u}{\partial y} = V_0$. Ainsi, le problème est ramené au problème de Neumann du n° 44 : déterminer une fonction $u(z)$ harmonique dans l'extérieur du segment $(-a, a)$, qui satisfait à la condition

aux limites $\frac{\partial u}{\partial n} = V_0$ ($\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée suivant la normale *intérieure* au domaine).

Pour résoudre ce problème, nous utilisons la représentation conforme de l'extérieur du segment $(-a, a)$ sur l'extérieur du cercle unité du plan des $\zeta = \xi + i\eta$:

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \tag{30}$$

La condition aux limites se transforme de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial n}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = V_0 \cdot \frac{a}{2}\,|1 - e^{-2i\varphi}| =$$

$$= \frac{V_0 a}{2}\sqrt{(1-\cos 2\varphi)^2 + \sin^2 2\varphi} = -V_0 a \sin\varphi,$$

où $\rho = |\zeta|$ et $\varphi = \arg\zeta$ (on a le signe moins puisque sur la demi-circonférence inférieure, où $\pi < \varphi < 2\pi$, on doit avoir $\frac{\partial u}{\partial \rho} > 0$). D'après les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires (cf. n° 5), nous obtenons $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = -V_0 a \sin\varphi$ sur la circonférence $\rho = 1$, donc $v = V_0 a \cos\varphi = V_0 a \operatorname{Re}\zeta$. Ainsi, nous trouvons le potentiel complexe dans le plan des ζ : $w = iV_0 a\zeta$. Portant l'expression de ζ en fonction de z tirée de (30), nous obtenons le potentiel complexe cherché dans le plan des z :

$$f(z) = iV_0\{z - \sqrt{z^2 - a^2}\}. \tag{31}$$

Nous trouvons, à l'aide de la formule (7) du n° 48, la pression d'impulsion en un point arbitraire x du segment $(-a, a)$

$$P^{(i)} = \rho \operatorname{Re} f(z) = \rho V_0 \sqrt{a^2 - x^2}; \tag{32}$$

à l'instant qui suit le choc, les vitesses des particules sur la surface libre sont normales à cette surface et égales en grandeur :

$$V = \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| = V_0\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right\}. \tag{33}$$

La formule (32) permet de résoudre le problème suivant : un corps de masse m en chute libre tombe sur l'eau suivant une bande plane de largeur $2a$; déterminer la vitesse V_2 du corps après le choc si la vitesse avant le choc est V_1. D'après la formule (32), à l'instant du choc la force d'impulsion

$$P = \rho V_2 \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi\rho V_2 a^2 \tag{34}$$

git sur le corps.

D'autre part, d'après le théorème de la quantité de mouvement $p = m(V_1 - V_2)$ et en comparant cette expression avec la relation ci-dessus, nous trouvons:

$$V_2 = \frac{mV_1}{m + \frac{\pi\rho a^2}{2}}. \tag{35}$$

V_2 est aussi une vitesse que le corps acquiert lors d'un choc non élastique contre un corps de masse $\frac{\pi\rho a^2}{2}$. Aussi $\frac{\pi\rho a^2}{2}$ est appelé masse virtuelle de la plaque qui tombe sur le liquide.

D'autres exemples de résolution de problèmes pratiques sont donnés dans le § 4 de ce chapitre.

50. Problème plan de la théorie de l'élasticité. Les applications de la théorie des fonctions de la variable complexe au problème plan de la théorie de l'élasticité constituent un groupe de problèmes à part. Parlons brièvement de leurs fondements. Le lecteur trouvera les détails dans l'excellent livre de N. Muskhelishvili [10].

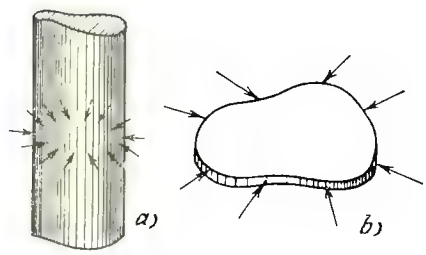

FIG. 123

On applique le problème plan de la théorie de l'élasticité dans deux cas suivants: a) la surface latérale d'un cylindre long est soumise à des contraintes; en outre ces contraintes sont situées dans des plans perpendiculaires aux génératrices du cylindre et elles sont les mêmes dans tous les plans (fig. 123*a*); b) une plaque fine est soumise à des contraintes appliquées sur son périmètre et qui se trouvent dans le plan de la plaque (fig. 123*b*). Dans les deux cas, le problème est décrit par l'état plan de contraintes. Etudions plus en détail ces problèmes.

Dans le problème général de la théorie de l'élasticité on considère des forces de deux espèces: les *forces massiques* qui sollicitent des éléments de volume ou de masse des corps (la force de pesanteur) et les *forces surfaciques* qui agissent sur la surface des éléments qu'on isole en pensée dans le corps (la pression). Dans le problème plan, à ces cas correspondent des forces massiques qui agissent sur des aires élémentaires et des forces linéiques qui agissent sur la frontière des éléments.

Nous supposons que les forces massiques sont absentes. La force linéique qui agit sur l'élément ds et que nous désignons par $\mathbf{F}ds$, où $\mathbf{F}$, la force rapportée à l'unité de longueur, est appelée *contrainte*. La contrainte $\mathbf{F}$ en un point donné dépend de la direction de l'élément (elle a un caractère tensoriel). En particulier, les contraintes

rapportées aux éléments perpendiculaires aux axes des x et des y sont respectivement notées $\mathbf{F}_x$ et $\mathbf{F}_y$. Les quantités $\mathbf{F}_x$ et $\mathbf{F}_y$ sont des grandeurs vectorielles; adoptons, pour désigner leurs composantes, les notations X_x, Y_x et X_y, Y_y, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= X_x + iY_x, \\ \mathbf{F}_y &= X_y + iY_y, \end{aligned} \tag{1}$$

en outre, X_x et Y_y sont appelées *contraintes normales* et Y_x et X_y *contraintes tangentielles*. Dans le problème plan, les composantes de la contrainte sont des fonctions de deux variables réelles x et y. On démontre que la contrainte $\mathbf{F}_n = X_n + iY_n$, rapportée à un élément dont la normale n fait un angle α avec l'axe des x, s'exprime en fonction des contraintes (1) à l'aide de la formule

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_x \cos\alpha + \mathbf{F}_y \sin\alpha \tag{2}$$

(cf. [10], p. 23).

Dans la théorie de l'élasticité, on établit les *équations d'équilibre* suivantes qui donnent des relations entre les composantes de la contrainte :

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

et on démontre aussi que

$$X_y = Y_x \tag{4}$$

(cf. [10], p. 13).

Sous l'action de forces élastiques, un corps subit des *déformations*, c'est-à-dire que les distances entre les points du corps varient. Nous désignons par

$$x^* = f_1(x, y), \quad y^* = f_2(x, y)$$

les nouvelles (après déformation) coordonnées d'un point (x, y) du corps, et les différences

$$u = x^* - x, \quad v = y^* - y \tag{5}$$

sont appelées *composantes du déplacement*. Les composantes du déplacement dans le problème plan sont des fonctions de deux variables réelles x, y. *Nous supposons dans la suite que les composantes du déplacement ainsi que leurs dérivées par rapport à x et à y sont si petites que leurs produits et leurs carrés peuvent être négligés (petites déformations).*

Puis, les quantités

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{6}$$

sont appelées *composantes de la déformation* ; la quantité

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{7}$$

est la dilatation surfacique pendant la déformation (cf. [10], pp. 40-41]. D'après la loi fondamentale de la théorie de l'élasticité (*loi de Hooke*), les composantes de la contrainte sont des fonctions linéaires homogènes des composantes de la déformation.

Pour un *corps isotrope* (*) (nous ne considérons que de tels corps), cette dépendance est de la forme

$$\left.\begin{aligned} X_x = \lambda\theta + 2\mu e_{xx}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu e_{yy}, \\ X_y = Y_x = 2\mu e_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

où λ et μ sont des coefficients non négatifs constants (cf. [10], p. 59). Les formules (3) et (8) constituent les *équations fondamentales du problème plan de la théorie de l'élasticité*. Elles forment un système de cinq équations aux dérivées partielles du premier ordre par rapport aux cinq fonctions inconnues X_x, Y_y, X_y, u et v de deux variables indépendantes x et y (**).

Il est facile d'obtenir de ce système des équations qui ne contiennent que les composantes du déplacement. Il suffit pour cela de porter les expressions (8) qui donnent X_x, Y_y et X_y dans les équations (3); tenant compte de (6) et de (7), nous obtenons alors un système de deux équations du deuxième ordre par rapport aux deux inconnues u et v:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u = 0, \quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v = 0, \tag{9}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace. Une fois que le système (9) est résolu, on détermine les contraintes par dérivation d'après les formules (8).

Il est aussi facile d'obtenir des équations qui ne contiennent que les composantes des contraintes. Pour cela dérivons la première équation (9) par rapport à x et la seconde par rapport à y et additionnons les équations ainsi obtenues. Tenant compte de l'expression (7), nous trouvons $(\lambda - \mu)\,\Delta\theta + \mu\Delta\theta = 0$, d'où

$$\Delta\theta = 0.$$

Remarquons que des deux premières équations (8) et de la formule (7) découle la relation

$$\theta = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}(X_x + Y_y); \tag{10}$$

(*) C'est-à-dire un corps dont les propriétés élastiques sont identiques dans toutes les directions.

(**) Dans le cas d'un cylindre long, la composante Z_z de la contrainte dépendant, de même que les autres composantes, de x et y agit encore sur les particules du corps. Nous n'incluons pas l'équation qui la contient dans le système fondamental car elle est égale à $Z_z = \lambda\theta$ et peut être déterminée après avoir résolu ce système (cf. [10], p. 90). Dans le cas d'une plaque fine, la constante λ doit être remplacée par la constante $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$ (cf. [10], p. 96). Ce changement ne modifie pas le caractère des équations (8) ; c'est la raison pour laquelle nous ne le mentionnons pas dans le texte.

en la portant dans l'équation précédente, nous trouvons :

$$\Delta (X_x + Y_y) = 0. \tag{11}$$

L'équation (11) avec les équations (3) donne précisément le système cherché qui ne contient que les composantes des contraintes (trois équations à trois fonctions inconnues).

Introduisons la fonction dite fonction des contraintes, particulièrement commode pour décrire la solution d'un problème plan. Conformément aux formules (3), les expressions

$$-X_y dx + X_x dy = dB, \quad Y_y\, dx - Y_x\, dy = dA \tag{12}$$

sont les différentielles de certaines fonctions. L'égalité des contraintes tangentielles X_y et Y_x donne la relation $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$ de laquelle il découle que l'expression

$$A\, dx + B\, dy = dU \tag{13}$$

est la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$ qui est appelée *fonction des contraintes*. Cette fonction a été introduite en 1862 par l'astronome anglais *Airy*. Nous déduisons de (12) et de (13) les expressions suivantes des composantes des contraintes en fonction de $U(x, y)$:

$$X_x = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \qquad Y_y = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad X_y = Y_x = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}. \tag{14}$$

On peut aussi exprimer les composantes du déplacement à l'aide de la fonction $U(x, y)$. Portant dans les formules (8) les expressions (14) de X_x, Y_y et X_y, les expressions (6) de e_{xx}, e_{yy} et e_{xy}, ainsi que l'expression $\theta = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\, \Delta U$ qui s'obtient en substituant les deux premières formules de (14) dans (10), nous avons :

$$\left.\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \Delta U, \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\mu}{2(\lambda+\mu)} \Delta U, \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Il vient des deux premières relations (14) que $X_x + Y_y = \Delta U$, où Δ est l'opérateur de Laplace ; de l'équation (11) on voit maintenant que la fonction des contraintes U satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\, \frac{\partial^4 U}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \tag{16}$$

c'est-à-dire, comme il est convenu de dire, la fonction des contraintes U est une *fonction biharmonique*.

Nous allons démontrer maintenant que toute fonction biharmonique peut être représentée à l'aide de fonctions analytiques de la variable complexe. D'autre part, puisque les composantes de la contrainte et du déplacement s'expriment par une fonction biharmonique, nous arrivons ainsi à la représentation complexe des solutions du problème plan de la théorie de l'élasticité. C'est sur cette représentation que sont basées les méthodes d'application des fonctions de la variable complexe à la théorie de l'élasticité, méthodes développées par *G. Kolossov* et *N. Mouskhélichvili*.

Soit U une fonction biharmonique arbitraire. Il est alors clair que ΔU est une fonction harmonique. Désignons ΔU par P et soit Q la fonction harmonique conjuguée de ΔU ; posons $f(z) = P + iQ$. Toutefois, il est plus commode de considérer la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)\,dz = p + iq, \tag{17}$$

de sorte que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}P, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4}Q. \tag{18}$$

Un calcul simple montre que la fonction

$$p_1 = U - px - qy$$

est harmonique (*).

Désignons par $\chi(z)$ une fonction analytique de partie réelle p_1, il est alors clair que nous avons :

$$U = px + qy + p_1 = \mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\}.$$

Ecrivant cette formule sous une autre forme, nous trouvons la *représentation complexe cherchée d'une fonction biharmonique* :

$$U = \frac{1}{2}(\bar{z}\varphi + z\bar{\varphi} + \chi + \bar{\chi}) \tag{19}$$

(*E. Goursat*, 1898).

Il est utile de trouver pour la suite les représentations des dérivées partielles de U. Dérivant (19) par rapport à x et y (nous considérons z et $\bar{z}$ comme des variables intermédiaires et nous tenons compte de ce que $\frac{\partial}{\partial x}\bar{\varphi} = \overline{\frac{\partial}{\partial x}\varphi} = \bar{\varphi}'$ et $\frac{\partial}{\partial y}\bar{\varphi} = \overline{\frac{\partial}{\partial y}\varphi} = -i\bar{\varphi}'$) ,

(*) En effet, tenant compte des relations (18) et des conditions de Cauchy-Riemann pour la fonction $f(z)$, nous trouvons : $\Delta(px) = \Delta(qy) = \frac{1}{2}P$, donc $\Delta p_1 = \Delta U - P = 0$.

nous trouvons :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{2}(\varphi + \bar{z}\varphi' + \bar{\varphi} + z\bar{\varphi}' + \chi' + \bar{\chi}'),\\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{i}{2}(-\varphi + \bar{z}\varphi' + \bar{\varphi} - z\bar{\varphi}' + \chi' - \bar{\chi}'),\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

d'où

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{21}$$

où l'on a posé $\psi(z) = \chi'(z)$. Dérivant (20), nous trouvons

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2(\varphi' + \bar{\varphi}') = 4\mathrm{Re}[\varphi'(z)] \ (*). \tag{22}$$

Passons à la représentation complexe des composantes du déplacement et des contraintes. Remplaçons dans les deux premières formules (15) $\Delta U = P$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = P - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = P - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$. Puisque de (18) nous avons : $P = 4\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{\partial q}{\partial y}$, il vient

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k\frac{\partial q}{\partial y},$$

où $k = 2\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$. Intégrant les relations que nous venons d'obtenir, nous avons :

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + kp + f_1(y), \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + kq + f_2(x). \tag{23}$$

Pour déterminer les fonctions $f_1(y)$ et $f_2(x)$, nous allons utiliser la troisième formule (15). Nous trouvons des formules (23)

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + f_1'(y) + f_2'(x);$$

comparant cette dernière relation avec l'expression (15), nous obtenons $f_1'(y) + f_2'(x) = 0$ ou $f_1'(y) = -f_2'(x)$. Nous avons à gauche une fonction de y et à droite une fonction de x, il s'ensuit donc que les deux membres sont égaux à une même constante. Soit α cette constante. Nous avons :

$$f_1(y) = \alpha y + \beta, \quad f_2(x) = -\alpha x + \gamma.$$

Il est facile de voir que le déplacement d'un corps conditionné par ces termes des formules (23) est un « déplacement rigide »,

(*) Il découle entre autres de l'expression (22) que pour toute fonction U qui peut être représentée à l'aide de la formule (19), ΔU est une fonction harmonique, donc U est biharmonique.

c'est-à-dire le déplacement du corps en bloc. (En effet, le vecteur de ce déplacement $f_1 + if_2 = -\alpha iz + \beta + i\gamma$.) En négligeant ces termes dans les formules (23), vu qu'ils n'influent pas sur l'état de contraintes du corps, nous obtenons:

$$u + iv = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{k}{2\mu}\varphi(z),$$

ou, en utilisant la relation (21), nous trouvons la formule définitive de la *représentation complexe du déplacement*:

$$u + iv = \frac{1}{2\mu}\{\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\}; \tag{24}$$

ici $\varkappa = k - 1 = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$. Cette représentation a été obtenue par *G. Kolossov* en 1909.

Passons à la représentation des contraintes. Des formules (14) nous trouvons:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_x = X_x + iY_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = -i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right), \\ \mathbf{F}_y = X_y + iY_y &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + i\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

et, tenant compte de (21), nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_x = X_x + iY_x &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)}, \\ -i\mathbf{F}_y = Y_y - iX_y &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Additionnant les équations (26) et retranchant la seconde de la première, nous déduisons les formules appartenant également à *Kolossov*, qui donnent la *représentation complexe des contraintes*:

$$\left.\begin{aligned} X_x + Y_y &= 2\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\} = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z), \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

(dans la seconde formule, nous avons pris les quantités conjuguées complexes).

Nous voyons ainsi que les *contraintes et le déplacement dans le problème plan de la théorie de l'élasticité s'expriment à l'aide de deux fonctions analytiques de la variable complexe* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$.

Pour terminer, voyons à quel point la donnée de l'état de contraintes et du déplacement détermine ces fonctions. Pour un état de contraintes donné, la fonction $\varphi'(z)$ est déterminée par la première formule (27) à une constante purement imaginaire près, car la partie réelle de cette fonction est donnée. Il en découle donc que toutes les fonctions qui peuvent avoir à tenir le rôle de la fonction φ s'expriment à l'aide de l'une d'entre elles par la formule

$$\varphi(z) + \alpha iz + b, \tag{28}$$

où αi est une constante purement imaginaire et $b = \beta + i\gamma$ complexe. La seconde formule (27) donne alors $\psi'(z)$, et par suite l'ensemble des fonctions ψ est décrit par la formule

$$\psi(z) + b_1, \tag{29}$$

où $b_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ est une constante complexe.

Il est clair qu'inversement l'état de contraintes ne change pas si l'on remplace φ et ψ respectivement par $\varphi + \alpha i z + b$ et $\psi + b_1$.

Soient données maintenant les composantes du déplacement. On voit des formules (6)-(8) qu'alors les composantes de la contrainte sont aussi déterminées. C'est pourquoi il est admis de remplacer les fonctions φ et ψ seulement à l'aide des formules (28) et (29). Mais, comme on le voit de la formule (24), pour ce changement $u + iv$ varie de la quantité

$$\delta u + i\delta v = \frac{\varkappa+1}{2\mu}\alpha i z + \frac{\varkappa b - \overline{b}_1}{2\mu}, \tag{30}$$

nous n'avons donc qu'un déplacement rigide de tout le corps dont nous avons convenu de ne pas tenir compte.

La formule (30) montre que les *déplacements* ne sont conservés que pour des changements des fonctions φ et ψ de la forme (28) et (29), pour lesquels

$$\alpha = 0, \quad \varkappa b - \overline{b}_1 = 0. \tag{31}$$

Ainsi, *pour des déplacements donnés*, la constante α est complètement déterminée et une seule des constantes b et b_1 peut être donnée d'une manière arbitraire.

51. Problèmes aux limites de la théorie de l'élasticité. Les formules (24) et (27) de Kolossov du n° 50 représentent la *solution générale* des équations fondamentales (3) et (8) du problème plan de la théorie de l'élasticité (*). Cependant, justement en vertu de leur généralité, ces formules ne donnent pas les solutions immédiates des problèmes pratiquement importants qui conduisent toujours à certaines conditions imposées aux valeurs des quantités considérées sur la frontière du domaine, c'est-à-dire à des *problèmes aux limites*.

Les principaux problèmes aux limites de la théorie plane de l'élasticité s'énoncent de la manière suivante :

Premier problème aux limites (I). *Déterminer l'équilibre élastique d'un domaine D si les contraintes extérieures X_n, Y_n, appliquées à la frontière de ce domaine, sont données.*

Deuxième problème aux limites (II). *Déterminer l'équilibre élastique d'un domaine D si les déplacements u et v des points de la frontière C de ce domaine sont donnés.*

(*) On aurait pu montrer que pour toutes fonctions analytiques $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, les fonctions X_x, Y_y, X_y et u, v, définies par (27) et (24), satisfont aux équations fondamentales (3) et (8).

On considère également le problème aux limites mixte dans lequel on se donne, sur certaines portions de la frontière, les contraintes et sur d'autres les déplacements.

Démontrons l'unicité de la solution des problèmes I et II, en considérant, pour plus de simplicité, un domaine D simplement connexe et borné. Considérons l'intégrale

$$I = \int_C (X_n u + Y_n v)\, ds, \tag{1}$$

prise le long de la frontière C du domaine D (elle représente le travail des forces élastiques sollicitant le contour C). Remplaçant X_n et Y_n selon la formule (2) du n° 50, nous pouvons écrire l'intégrale précédente sous la forme

$$I = \int_C \{(X_x u + Y_x v)\cos\alpha + (X_y u + Y_y v)\sin\alpha\}\, ds.$$

Or, d'après la formule d'Ostrogradski dans le cas du plan (*), notre intégrale se transforme en une intégrale double étendue au domaine D :

$$I = \iint_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}(X_x u + Y_x v) + \frac{\partial}{\partial y}(X_y u + Y_y v)\right\} dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left\{u\left(\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_x}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + Y_y \frac{\partial v}{\partial y}\right\} dx\, dy. \tag{2}$$

En vertu des formules (3) du n° 50, les deux premières parenthèses de l'intégrale double dans le second membre de (2) sont nulles ; remplaçant X_x, X_y, Y_y par leurs expressions tirées de (8), $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ d'après les formules (6) (n° 50) et tenant compte de (7) du même numéro, nous trouvons :

$$I = \iint_D \{\lambda\theta^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + 2e_{xy}^2 + e_{yy}^2)\}\, dx\, dy. \tag{3}$$

Supposons maintenant que l'on puisse construire dans D deux solutions $X_x', \ldots, v'$ et $X_x'', \ldots, v''$ d'un problème aux limites I. Etant donné que les équations fondamentales (3) et (8) du n° 50

(*) La formule d'Ostrogradski dans le cas du plan a la forme

$$\int_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

où α est l'angle de la normale à C et de l'axe des x.

sont linéaires, les différences $X_x = X'_x - X''_x$. . . ., $v = v' - v''$ sont aussi solution du problème plan de la théorie de l'élasticité; de plus, en vertu des conditions aux limites, nous avons $X_n = Y_n = 0$ sur C. Donc, l'intégrale (1) et, par suite, (3) sont nulles. Or, la fonction à intégrer dans (3) est non négative, donc cette intégrale ne peut être nulle que dans le cas où l'on a identiquement $\theta = e_{xx} = e_{xy} = e_{yy} = 0$ dans le domaine D. Alors, des formules (8) du n° 50 nous concluons que nous avons identiquement $X_x = Y_y = X_y = 0$ dans le domaine D, c'est-à-dire que les états de contraintes X'_x, Y'_y, X'_y et X''_x, Y''_y, X''_y coïncident (*). L'unicité de la solution du premier problème aux limites est démontrée.

La démonstration de l'unicité de la solution du problème aux limites II se fait d'une manière analogue (**) avec la seule différence que l'intégrale (1) est nulle du fait que les déplacements u et v sont nuls sur la courbe C.

Montrons maintenant comment la solution des problèmes I et II se ramène à la solution de problèmes aux limites de la théorie des fonctions analytiques. Puisque d'après ce qui a été démontré (n° 50), l'état de contraintes est complètement déterminé par deux fonctions analytiques $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, la solution de nos problèmes doit aussi s'exprimer par ces fonctions. Supposons comme précédemment que le domaine D soit simplement connexe et notons C sa frontière.

Dans le problème II la condition aux limites s'écrit directement à l'aide de la formule (24) du n° 50 sous la forme

$$\varkappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu g(\zeta), \tag{4}$$

où $\varkappa$ et μ sont des coefficients constants et $g(\zeta) = u + iv$ le déplacement donné sur le contour C.

Ainsi, la *solution du problème* II *de la théorie plane de l'élasticité pour un domaine D se ramène à la détermination dans ce domaine de deux fonctions analytiques* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *qui satisfont à la condition aux limites* (4) *sur la frontière C.*

Pour le problème I, remarquons d'abord que des formules (2) et (25) du n° 50 il découle une formule pour le vecteur contraintes rapporté à un élément dont la normale fait un angle α avec l'axe réel :

$$\mathbf{F}_n = -i\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \\ = -i\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{5}$$

(*) Rappelons que pour les états de contraintes identiques, les déplacements u, v ne peuvent différer que par un « déplacement rigide » que nous avons convenu de négliger (cf. n° 50).

(**) Si les déplacements sont donnés sur la frontière, alors le « déplacement rigide », dont il est question dans le renvoi précédent, disparaît et u, v sont complètement déterminés.

où $\frac{\partial}{\partial s} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}$ est l'opérateur de dérivation suivant la tangente à l'élément.

Il découle de cette formule que sur le contour C

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = i\int_0^s \mathbf{F}_n\, ds + A, \tag{6}$$

où s est la longueur d'arc de C, comptée dans le sens positif à partir d'un point fixe, et A une constante arbitraire. Dans le problème I, es valeurs de $\mathbf{F}_n$ sont données sur le contour C et, par suite, la onction

$$i\int_0^s \mathbf{F}_n\, ds = f(\zeta) = f_1(\zeta) + if_2(\zeta) \tag{7}$$

est connue. Portant cette dernière dans la relation (6) et tenant compte de la formule (21) du n° 50, nous trouvons la condition aux limites du problème I sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + A, \tag{8}$$

où $f(\zeta)$ est une fonction donnée et A une constante arbitraire.

Ainsi, la *solution du problème* I *de la théorie plane de l'élasticité se ramène à la détermination, dans un domaine* D, *de deux fonctions analytiques* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *qui satisfont à la condition aux limites* (8) *sur la frontière* C.

Elucidons la question du nombre des paramètres qui restent libres dans les problèmes aux limites considérés. Comme nous l'avons vu à la fin du n° 50, quand on se donne les contraintes (problème I), la fonction φ est déterminée à un terme de la forme $i\alpha z + b$ près et la fonction ψ à un terme constant b_1 près (α est réel, b et b_1 sont complexes), et quand on se donne les déplacements (problème II), les fonctions φ et ψ sont déterminées aux termes constants b et b_1 près qui vérifient la relation $\varkappa b = \overline{b_1}$.

Il en découle que dans le problème II ces fonctions sont complètement déterminées par la donnée de l'une d'elles en un point quelconque du domaine, par exemple par la condition

$$\varphi(0) = 0 \tag{9}$$

(nous supposons que le point $z = 0$ appartient à D). Dans le problème I, pour des variations admises de φ et ψ, la fonction $\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}$, comme on le voit de (8), varie de $b + \overline{b_1}$, de sorte que la donnée de la constante A impose une relation sur b et b_1. Donc, dans le problème I, lorsque la quantité A est donnée, un paramètre complexe et un paramètre réel restent libres et on peut, par exemple, se donner les conditions

$$\psi(0) = \operatorname{Im}\varphi'(0) = 0. \tag{10}$$

Pour terminer, décrivons les changements qu'il faut introduire dans la position des problèmes aux limites dans le cas des domaines non bornés ou

multiplement connexes. Soit d'abord D un domaine borné de frontière un contour fermé C_0 qui contient à son intérieur les contours $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Il est clair des considérations physiques que les contraintes et les déplacements sont, dans ce cas, uniformes, toutefois, les fonctions φ et ψ peuvent être multiformes. Elucidons le caractère de leur multiformité.

Il découle de la formule de Kolossov $X_x + Y_y = 4\mathrm{Re}\,\varphi'(z)$ que $\mathrm{Re}\,\varphi'(z)$ est uniforme, mais $\mathrm{Im}\,\varphi'(z)$, lorsqu'on parcourt un contour fermé autour de chaque courbe intérieure C_k dans le sens positif, peut accuser un accroissement que nous désignons par $2\pi a_k$ (cf. n° 41). Il en découle que la fonction $\varphi'(z)$ accuse un accroissement de $2\pi i a_k$ et, par suite, la fonction

$$\varphi'(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{Ln}(z - z_k) = \widetilde{\varphi}(z), \tag{11}$$

où z_k est un point intérieur au contour C_k, est uniforme dans D. L'intégrale $\int_{z_0}^{z} \widetilde{\varphi}(z)\,dz$ dans le domaine D peut être aussi une fonction multiforme, de plus, cette multiformité est engendrée par des termes de la forme $b_k \operatorname{Ln}(z - z_k)$. Ainsi, intégrant la relation (11), nous obtenons que

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z \operatorname{Ln}(z - z_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + \varphi^*(z), \tag{12}$$

où $\varphi^*(z)$ est une fonction uniforme dans D, a_k sont des constantes réelles et b_k des constantes complexes.

Comme on le voit de (11) ou (12), la fonction $\varphi''(z)$ est uniforme dans D. De la seconde formule (27) de Kolossov (n° 50) nous concluons que $\psi'(z)$ est une fonction uniforme, donc

$$\psi(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + \psi^*(z), \tag{13}$$

où $\psi^*(z)$ est uniforme dans D et c_k sont des constantes complexes.

Jusqu'à présent, nous n'avons utilisé que l'uniformité des contraintes. On voit des formules (12) et (13) qui viennent d'être obtenues et de la formule (24) du n° 50 que lorsqu'on décrit un contour fermé autour de C_k, la fonction $2\mu(u + iv)$ accuse un accroissement égal à l'accroissement de la fonction $\varkappa a_k z \operatorname{Ln}(z - z_k) + \varkappa b_k \operatorname{Ln}(z - z_k) - z a_k \overline{\operatorname{Ln}(z - z_k)} - \overline{c_k} \overline{\operatorname{Ln}(z - z_k)}$, c'est-à-dire égal à $2\pi i [(\varkappa + 1) a_k z + \varkappa b_k + \overline{c_k}]$, où z est un point de D en lequel commence et finit le parcours. La condition d'uniformité que l'on impose aux déplacements conduit donc aux conditions

$$a_k = 0, \qquad c_k = -\varkappa \overline{b_k}, \tag{14}$$

et les fonctions φ et ψ prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= -\varkappa \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + \psi^*(z), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

où φ^* et ψ^* sont des fonctions uniformes et b_k des constantes complexes.

Les coefficients b_k ont un sens mécanique simple :

$$b_k = -\frac{\mathbf{F}^{(k)}}{2\pi(1 + \varkappa)}, \tag{16}$$

où $\mathbf{F}^{(k)}$ est la résultante générale des forces extérieures appliquées à C_k. En effet, d'après la formule (6), ce vecteur est

$$\mathbf{F}^{(k)} = -\int_{C_k} \mathbf{F}_n\, ds = i\Delta_{C_k}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{17}$$

où Δ_{C_k} est l'accroissement lorsqu'on décrit un contour fermé autour de C_k (le signe moins devant l'intégrale provient de ce que nous considérons le vecteur des forces *extérieures*). D'après la formule (21) du n° 50, nous en déduisons que

$$\mathbf{F}^{(k)} = i\Delta_{C_k}\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\} = -2\pi(1+\varkappa)\, b_k.$$

Dans le problème I, les coefficients b_k sont donnés tandis que dans le problème II ils sont inconnus.

La condition aux limites (4) à laquelle est ramenée la solution du problème II est conservée pour les domaines multiplement connexes tandis que la condition (8) à laquelle est ramené le problème I nécessite une certaine précision. En effet, les valeurs de la constante A pour les différents contours frontières peuvent s'avérer différentes de sorte que cette condition doit être à présent écrite sous la forme : sur C_k

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + A_k, \tag{8'}$$

où A_k sont des constantes ($k = 0, 1, \ldots, n$). Une analyse plus détaillée montre que l'on peut se donner arbitrairement l'une de ces constantes et que les autres sont déterminées par la condition d'uniformité des déplacements.

Il découle ensuite des considérations physiques que la solution du problème I ne peut exister que dans le cas où la résultante générale et le moment résultant de toutes les forces extérieures données sur toute la frontière $C = C_0 + C_1^- + \ldots + C_n^-$ du domaine sont nuls. La condition de nullité de la résultante est équivalente, d'après la condition (7), à la nullité de l'accroissement total de la fonction $f = f_1 + if_2$ donnée sur la frontière :

$$\int_C \mathbf{F}_n\, ds = i\Delta_C\{f_1(\zeta) + if_2(\zeta)\} = 0 \tag{18}$$

(dans le cas d'un domaine simplement connexe, elle est satisfaite automatiquement si la fonction donnée est continue). La condition de nullité du moment résultant

$$\int_C (xY_n - yX_n)\, ds = 0$$

peut être facilement transformée si l'on remarque que, d'après la formule (7), $X_n\, ds = df_2$, $Y_n\, ds = -df_1$, donc, après intégration par parties, cette condition s'écrit sous la forme :

$$\int_C (xY_n - yX_n)\, ds = -\Delta_C\{xf_1(\zeta) + yf_2(\zeta)\} + \int_C f_1\, dx + f_2\, dy = 0.$$

Tenant compte de (18), on peut encore écrire cette condition sous la forme

$$\int_C f_1\, dx + f_2\, dy = 0. \tag{19}$$

Si un domaine est non borné et s'il contient le point $z = \infty$ à son intérieur, alors nos raisonnements sont conservés si l'on ajoute aux sommes considérées un terme de la forme $b\,\mathrm{Ln}\, z$ qui correspond au parcours selon un con-

tour fermé autour du point à l'infini. Le coefficient b s'exprime par la résultante générale $\mathbf{F}$ des forces extérieures appliquées à la frontière du domaine:

$$b = -\frac{\mathbf{F}}{2\pi(1+\varkappa)}, \tag{16'}$$

qui, contrairement au cas d'un domaine borné, n'est pas obligatoirement nulle. On suppose que ce vecteur est connu : dans le problème II, il doit être donné, tandis que dans le problème I il est déterminé par les contraintes extérieures données.

Si l'on suppose que les contraintes sont bornées à l'infini, alors des formules (26) de Kolossov (n° 50) on voit que les parties principales des développements en séries de Laurent de $\varphi^*(z)$ et $\psi^*(z)$ au voisinage de l'infini ne peuvent contenir que les premières puissances de z. Ainsi, dans le cas considéré, les expressions de φ et de ψ prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{Ln}(z-z_k) + b \operatorname{Ln} z + \Gamma z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= -\varkappa \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k \operatorname{Ln}(z-z_k) - \varkappa\bar{b} \operatorname{Ln} z + \Gamma' z + \psi_0(z), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

où b_k et b sont données par les formules (16) et (16') et φ_0 et ψ_0 sont des fonctions uniformes dans D et régulières à l'infini. Les constantes Γ et Γ', comme on le voit des formules (27) de Kolossov (n° 50), s'expriment par les contraintes à l'infini :

$$X_x^\infty + Y_y^\infty = 4 \operatorname{Re} \Gamma, \qquad X_y^\infty - X_x^\infty + 2iX_y^\infty = 2\Gamma'. \tag{21}$$

Dans le cas du problème II, elles sont supposées connues; dans le cas du problème I, on se donne $\operatorname{Re}\Gamma$ et Γ' (on peut démontrer que $\operatorname{Im}\Gamma$ n'influe pas sur la répartition des contraintes).

Le cas où la frontière de D contient le point à l'infini n'est pas considéré dans toute sa généralité, et nous nous bornons au cas où D est le demi-plan inférieur. De même que dans le cas précédent, nous prenons ici au voisinage du point $z = \infty$:

$$\varphi(z) = b \operatorname{Ln} z + \varphi^*(z), \qquad \psi(z) = c \operatorname{Ln} z + \psi^*(z),$$

où φ^* et ψ^* sont des fonctions uniformes et b et c des constantes complexes. D'où, en utilisant la formule (17), nous trouvons le vecteur des forces extérieures appliquées à un grand segment C_R : $-R_1 < x < R_2$, de l'axe des x

$$\mathbf{F}_R = i\Delta_{C_R}\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\} = i\left(b \ln\frac{R_2}{R_1} + b\pi i + \bar{c} \ln\frac{R_2}{R_1} - \bar{c}\pi i\right) + \varepsilon,$$

où $\varepsilon \to 0$, lorsque R_1, $R_2 \to \infty$. Exigeons que cette expression reste bornée lorsque R_1, $R_2 \to \infty$ indépendamment l'un de l'autre. Alors

$$b + \bar{c} = 0$$

et la formule précédente donne à la limite le vecteur des forces extérieures appliquées à tout l'axe des x:

$$\mathbf{F} = \pi(\bar{c} - b).$$

Ainsi

$$b = -\frac{1}{2\pi}\mathbf{F}, \qquad c = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathbf{F}};$$

supposant encore que la contrainte et la rotation à l'infini soient nulles (c'est-à-dire $\Gamma = \Gamma' = 0$), nous avons, à la place des formules (15),

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi}\mathbf{F}\operatorname{Ln} z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi}\overline{\mathbf{F}}\operatorname{Ln} z + \psi_0(z), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

où $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ sont des fonctions uniformes dans D et régulières à l'infini.

§ 3. INTÉGRALE DU TYPE CAUCHY ET PROBLÈMES AUX LIMITES

On expose dans ce paragraphe les principales propriétés de l'intégrale du type Cauchy et les méthodes efficaces de résolution des différents problèmes aux limites de la théorie des fonctions d'une variable complexe qui sont basées sur ces propriétés. On donne à la fin du paragraphe des applications de ces méthodes à certains problèmes d'hydrodynamique et de la théorie de l'élasticité.

Ces méthodes partent des formules pour les valeurs frontières de l'intégrale du type Cauchy obtenues en 1873 par *Julian Sokhotski* (*), puis oubliées et retrouvées par *J. Plemelj* en 1908 et avec des suppositions plus générales par *I. Privalov* en 1918. A l'heure actuelle, les méthodes de résolution des problèmes aux limites de la physique mathématique basées sur les intégrales du type Cauchy sont surtout développées par *N. Mouskhélichvili*, *I. Vékoua*, *A. Bitsadzé* et d'autres.

52. Intégrale du type Cauchy. Formules de Sokhotski. L'intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \tag{1}$$

représente une fonction analytique à l'intérieur du contour fermé C au moyen de ses valeurs sur la frontière (cf. n° 14). Supposons maintenant que C soit une courbe arbitraire sans points anguleux (ceci est essentiel pour la suite) et non obligatoirement fermée et soit donnée sur cette courbe une fonction arbitraire $f(\zeta)$ partout continue, excepté peut-être en un nombre fini de points en lesquels elle possède des discontinuités intégrables.

L'intégrale

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{2}$$

construite de la même manière que l'intégrale (1), est dite *intégrale du type Cauchy.*

(*) *Ю. В. Сохоцкий*, «Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды», СПБ., 1873.

Répétant les raisonnements du n° 17, nous nous convainquons de ce que l'intégrale du type Cauchy représente une fonction analytique en tout point z qui n'appartient pas à la courbe C. De plus, si C divise le plan en plusieurs domaines, alors l'intégrale du type Cauchy définit en général dans ces domaines différentes fonctions analytiques. Par exemple,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

est égale à l'unité dans le cercle $|z|<1$ et est nulle à son extérieur.

Même dans le cas d'un contour fermé C, il est facile de comprendre que l'intégrale du type Cauchy n'est pas dans le cas général une intégrale de Cauchy, c'est-à-dire que les valeurs de la fonction $f(\zeta)$ ne sont pas les valeurs limites de $F(z)$ lorsque $z \to \zeta$. En effet, comme nous l'avons vu (n° 43), la donnée de la seule partie réelle d'une fonction analytique sur la frontière d'un domaine définit la partie réelle à l'intérieur. Alors les équations de Cauchy-Riemann définissent à l'intérieur du domaine la partie imaginaire de la fonction à une constante additive près et, par conséquence, ses valeurs limites aussi, lorsque z tend vers la frontière du domaine. C'est pourquoi, lorsqu'on se donne sur la frontière deux fonctions qui ne sont pas liées entre elles — les parties réelle et imaginaire de la fonction $f(\zeta)$, — alors, dans le cas général, on ne peut s'attendre que $F(z)$ tend vers des valeurs données lorsque $z \to \zeta$.

Pour pouvoir étudier le problème des valeurs frontières d'une intégrale du type Cauchy, nous éluciderons avant tout le sens que l'on peut donner à cette intégrale lorsque le point z se trouve sur la courbe d'intégration C. Si le point z appartient à C, alors l'intégrale (2) diverge en général car la fonction à intégrer devient infinie lorsque $\zeta \to z$. Cependant, pour certaines suppositions complémentaires imposées à $f(\zeta)$ on peut donner un sens bien défini à cette intégrale. Supposons qu'en un point $\zeta = \zeta_0$ du contour C, la fonction $f(\zeta)$ satisfasse à la *condition de Hölder* d'exposant $\mu \leqslant 1$:

(H) *Il existe une constante M telle que, pour tous les points ζ de la courbe C suffisamment voisins de ζ_0, on ait l'inégalité*

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leqslant M\,|\zeta - \zeta_0|^{\mu}, \qquad 0 < \mu \leqslant 1. \tag{3}$$

Il est clair que la condition de Hölder signifie que l'accroissement de la fonction est un infiniment petit d'ordre non inférieur à μ par rapport à l'accroissement de la variable.

Montrons que dans ces conditions l'intégrale du type Cauchy existe aussi lorsque $z = \zeta_0$ si on la comprend dans un sens particulier, et trouvons son expression à l'aide d'une intégrale usuelle. Supposons d'abord que ζ_0 ne soit pas un point anguleux de la courbe C et désignons par ζ' et ζ'' les points d'intersection de C avec la circonférence

$|z-\zeta_0|=r$, par c l'arc de courbe de C qui se trouve entre les points ζ' et ζ'' et par a et b les extrémités de C (fig. 124). Nous avons:

$$\int\limits_{C\setminus c}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\int\limits_{C\setminus c}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+f(\zeta_0)\int\limits_{C\setminus c}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}. \tag{4}$$

Mais

$$\int\limits_{C\setminus c}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\ln(\zeta-\zeta_0)\Big|_a^{\zeta'}+\ln(\zeta-\zeta_0)\Big|_{\zeta''}^{b}=\ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}-\ln\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0},$$

où par ln sur les arcs $a\zeta'$ et $\zeta''b$ on sous-entend deux branches quelconques du logarithme variant continûment sur ces arcs de courbe; de plus, pour fixer les idées, on demande que la valeur de $\ln(\zeta''-\zeta_0)$ s'obtienne par variation continue de $\ln(\zeta'-\zeta_0)$ lorsque le point ζ décrit l'arc de circonférence $|z-\zeta_0|=r$ qui se trouve *à gauche* de la courbe C. En vertu de cette dernière condition et vu que $|\zeta'-\zeta_0|=|\zeta''-\zeta_0|$, nous avons:

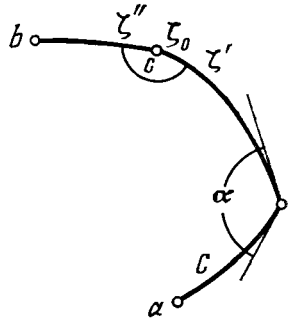

FIG. 124

$$\lim_{r\to 0}\ln\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}=-i\pi. \tag{5}$$

D'autre part, pour des r suffisamment petits, en vertu de la condition de Hölder, nous avons $\left|\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|\leqslant\frac{M}{|\zeta-\zeta_0|^{1-\mu}}$, par conséquent, la limite

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C\setminus c}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta=\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta \tag{6}$$

existe; de plus la dernière intégrale peut être comprise au sens ordinaire. Ainsi, la formule (4) prend la forme:

$$\int\limits_{C\setminus c}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+f(\zeta_0)\ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}+i\pi f(\zeta_0)+O(r), \tag{7}$$

où $O(r)\to 0$ lorsque $r\to 0$.

On voit de la formule (7) que la limite

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C\setminus c}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$$

existe; cette limite est appelée *valeur principale* de l'intégrale, et l'intégrale donnée par la formule (7) pour un tel passage à la limite est appelée *intégrale singulière* (au sens de Cauchy). Dans notre définition de l'intégrale singulière il est essentiel que l'arc de courbe

c que l'on retranche de C se réduit au point ζ_0 suivant une *loi bien déterminée* (de manière que ses extrémités, pour tout r, appartiennent à la circonférence $|z-\zeta_0|=r$); si c se réduit à un point suivant une autre loi, la limite (7) peut alors ne pas exister. Rappelons que dans la définition ordinaire d'une intégrale impropre on demande que la limite (7) existe lorsque $c \to \zeta_0$ suivant une *loi arbitraire*. Il est clair que si l'intégrale existe au sens ordinaire, alors elle existe aussi comme intégrale singulière et sa valeur principale coïncide avec la valeur de l'intégrale ordinaire (*). L'inverse évidemment n'a pas lieu.

Expliquons cette définition sur un exemple simple. Comme on le sait, l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x},$$

prise sur le segment $(-1, 1)$ de l'axe réel, n'existe pas. Cependant elle existe en tant qu'intégrale singulière au sens de Cauchy car la limite

$$\lim_{r\to 0}\left\{\int_{-1}^{-r}\frac{dx}{x}+\int_{r}^{1}\frac{dx}{x}\right\}=\lim_{r\to 0}\left\{\ln r+\ln\frac{1}{r}\right\}=0$$

existe (nous retranchons du segment $(-1, 1)$ le segment $(-r, r)$ conformément à la définition de l'intégrale singulière).

Passant dans la formule (7) à la limite, lorsque $r \to 0$, nous obtenons le théorème suivant:

T h é o r è m e 1. *Si un point ζ_0 est un point régulier du contour C et ne coïncide pas avec ses extrémités et si la fonction $f(\zeta)$ y satisfait à la condition de Hölder d'exposant $\mu \leqslant 1$, alors l'intégrale du type Cauchy existe en ce point comme intégrale singulière et sa valeur principale s'exprime à l'aide d'une intégrale ordinaire par la formule*

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2}f(\zeta_0)+\frac{f(\zeta_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}. \qquad (8)$$

Si en particulier la courbe C est fermée, on peut alors prendre $a = b$, le terme contenant le logarithme disparaît et la formule (8) prend une forme beaucoup plus simple

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}f(\zeta_0). \qquad (9)$$

(*) C'est pour cette raison que nous conservons pour l'intégrale singulière le symbole de l'intégrale ordinaire.

Soit maintenant ζ_0 un point anguleux de la courbe C; désignons par α l'angle des tangentes à C en ce point, mesuré dans la partie qui se trouve à gauche de la courbe C (fig. 124). Tenant compte de notre condition imposée sur la relation qui existe entre les branches du logarithme, nous avons, au lieu de la formule (5),

$$\lim_{r\to 0} \ln \frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0} = -i\alpha.$$

Alors la formule (8) est remplacée par la formule suivante:

$$F(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta + \frac{\alpha}{2\pi} f(\zeta_0) + \frac{f(\zeta_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}. \quad (10)$$

Passons à l'étude des valeurs limites de l'intégrale du type Cauchy lorsque z tend vers la courbe d'intégration C. Démontrons d'abord le lemme suivant:

L e m m e. *Soit $f(\zeta)$ une fonction qui satisfait au point ζ_0 à la condition de Hölder d'exposant $\mu \leqslant 1$ et supposons que le point z tende vers le point ζ_0 de manière que le rapport de $h = |z-\zeta_0|$ à d, la plus courte distance de z à C, soit borné. Alors*

$$\lim_{z\to\zeta_0}\int_C \frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta. \quad (11)$$

Pour démontrer ce lemme évaluons la différence Δ entre les intégrales du premier et du second membre de (11):

$$\Delta = \int_C (z-\zeta_0)\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{(\zeta-z)(\zeta-\zeta_0)}\,d\zeta.$$

Partageons l'intégrale Δ en deux; la première est prise le long de l'arc de courbe c de C dont les points vérifient $|\zeta-\zeta_0| \leqslant \delta$, où δ est un nombre dont le choix sera précisé plus tard, la seconde le long de la partie restante $C' = C \setminus c$.

Pour la première intégrale, tenant compte de la condition de Hölder (nous supposons que δ est suffisamment petit) et vu que $|\zeta - z| \geqslant d$, nous avons:

$$|\Delta_1| \leqslant \int_c h\frac{M|\zeta-\zeta_0|^\mu}{d|\zeta-\zeta_0|}|d\zeta| = \frac{hM}{d}\int_c \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\zeta_0|^{1-\mu}}.$$

Désignons par $t = |\zeta-\zeta_0|$ la longueur de la corde sous-tendant l'arc de courbe $\widehat{\zeta_0\zeta}$ de C. Vu que C ne possède pas de points anguleux, le rapport de la longueur de l'arc de courbe à la longueur de la corde est borné. Supposons que ce rapport ne soit pas supérieur à A, alors $|d\zeta| = ds \leqslant A\,dt$, et la dernière estimation devient

$$|\Delta_1| = 2\frac{h}{d}MA\int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\mu}} = \text{const}\cdot\delta^\mu.$$

On voit donc que l'on peut choisir δ aussi petit que l'on veut pour que la quantité $|\Delta_1|$ ne soit pas supérieure à tout nombre donné $\frac{\varepsilon}{2}$.

Puisque la courbe C' ne contient pas le point ζ_0, pour δ fixe, l'intégrale

$$\int_{C'} \frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

comme fonction de z est continue au point ζ_0, donc, pour des $h = |z-\zeta_0|$ suffisamment petits, la quantité $|\Delta_2|$ ne sera pas supérieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour ces h, nous avons $|\Delta| \leqslant |\Delta_1| + |\Delta_2| < \varepsilon$, ce qui démontre le lemme.

A l'aide de ce lemme on peut obtenir facilement des formules pour les valeurs limites de l'intégrale du type Cauchy.

Théorème 2 (J. Sokhotski). *Soient ζ_0 un point régulier du contour C, qui ne coïncide pas avec ses extrémités, $f(\zeta)$ une fonction satisfaisant en ce point à la condition de Hölder d'exposant $\mu \leqslant 1$ et $z \to \zeta_0$ de manière que le rapport $\frac{h}{d}$ reste borné. Alors l'intégrale du type Cauchy possède des valeurs limites $F^+(\zeta_0)$ et $F^-(\zeta_0)$ auxquelles elle tend lorsque $z \to \zeta_0$ respectivement à gauche et à droite de C et*

$$\left.\begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= F(\zeta_0) + \tfrac{1}{2} f(\zeta_0), \\ F^-(\zeta_0) &= F(\zeta_0) - \tfrac{1}{2} f(\zeta_0), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

où $F(\zeta_0)$ est l'intégrale singulière (9) (*).

Supposons d'abord que C soit une courbe fermée parcourue dans le sens positif. Nous avons:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-z}\,d\zeta + \frac{f(\zeta_0)}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \tag{13}$$

de plus, d'après le lemme qui vient d'être démontré, la première intégrale du second membre tend vers la limite

$$\int_C \frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta,$$

lorsque $z \to \zeta_0$, et la deuxième intégrale est égale à $2\pi i$ ou 0 suivant que le point z se trouve à gauche ou à droite du contour C (c'est-à-dire à l'intérieur ou à l'extérieur de C). Tenant compte de ce qui vient d'être dit, nous passons à la limite, lorsque $z \to \zeta_0$, dans

(*) Cf. p. 289.

la formule (13) (à gauche ou à droite de C):

$$F^+(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta + f(\zeta_0);$$

$$F^-(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta.$$

En y substituant la valeur de l'intégrale tirée de la formule (9), nous trouvons les formules (12) de Sokhotski que nous voulions établir.

A présent, si C est une courbe non fermée, nous la complétons par une courbe arbitraire C' de manière que $C_0 = C \cup C'$ soit une courbe fermée et nous posons $f(\zeta) = 0$ sur la courbe C'. Alors, il est clair que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

et si ζ_0 ne coïncide pas avec une extrémité de la courbe C, d'après ce qui vient d'être démontré, les formules (12) de Sokhotski dans lesquelles l'intégrale $F(\zeta_0)$ est prise le long de C_0 sont vraies. Mais comme $f(\zeta) = 0$ sur la courbe C', on peut remplacer la dernière intégrale par l'intégrale prise le long de C. Le théorème est démontré (*).

Si ζ_0 est un point anguleux de C, dont les tangentes forment un angle α, alors en utilisant la formule (10) au lieu de (9) (on doit poser $a = b$), nous obtenons les formules de Sokhotski sous une forme un peu plus générale:

$$\left.\begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= F(\zeta_0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) f(\zeta_0), \\ F^-(\zeta_0) &= F(\zeta_0) - \frac{\alpha}{2\pi} f(\zeta_0). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

On conclut des formules de Sokhotski (12) et, dans le cas d'un point anguleux, des formules (14), que *lorsqu'on traverse la courbe d'intégration C au point ζ_0, l'intégrale du type Cauchy accuse le saut*:

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = f(\zeta_0). \tag{15}$$

La formule (15) contient la solution du problème posé au début du n° 52 sur la détermination des conditions pour lesquelles une intégrale du type Cauchy soit une intégrale de Cauchy. Nous voyons que si la courbe C est fermée et qu'en chacun de ses points $F^-(\zeta) = 0$, alors la valeur limite de $F(z)$ par l'intérieur de C, c'est-à-dire

(*) Si en chaque point de C $f(\zeta)$ vérifie la condition de Hölder de même exposant $\mu > 0$, alors l'intégrale du type Cauchy converge vers $F^+(\zeta_0)$ ou $F^-(\zeta_0)$ quelle que soit la façon dont z tend vers le point ζ_0 (respectivement par la gauche ou la droite) et non seulement pour $\frac{h}{d}$ borné (cf. [14]).

$F^+(\zeta)$, est égale à $f(\zeta)$, ce qui signifie que $F(z)$ est une intégrale de Cauchy. D'autre part, si $F(z)$ est une intégrale de Cauchy, alors $F^+(\zeta) = f(\zeta)$, donc $F^-(\zeta) = 0$. Ainsi, la condition

$$F^-(\zeta) = 0, \tag{16}$$

vérifiée en chaque point de C, est nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (2) soit une intégrale de Cauchy. Il est clair que cette condition est aussi la condition pour que les valeurs $f(\zeta)$ données sur C soient les valeurs frontières d'une fonction analytique à l'intérieur de C. On peut énoncer cette condition sous une forme beaucoup plus commode.

Théorème 3. *Si une fonction $f(\zeta)$ satisfait en chaque point d'un contour fermé C à la condition de Hölder d'exposant $\mu \leqslant 1$, alors pour que ses valeurs soient les valeurs frontières d'une fonction analytique à l'intérieur de C, il faut et il suffit que les égalités suivantes soient satisfaites :*

$$\int_C \zeta^n f(\zeta) d\zeta = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

En effet, puisque pour les grands $|z|$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}},$$

nous avons au voisinage du point à l'infini le développement suivant de l'intégrale du type Cauchy :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z^{n+1}}\int_C \zeta^n f(\zeta)\, d\zeta. \tag{18}$$

Il en découle que si toutes les conditions (17) sont satisfaites, alors au voisinage du point à l'infini $F(z) \equiv 0$. Mais comme l'intégrale du type Cauchy $F(z)$ est partout analytique à l'extérieur du contour C, d'après le théorème d'unicité du n° 20, il en découle que $F(z) \equiv 0$ partout à l'extérieur de C. Ainsi, les valeurs limites extérieures $F^-(\zeta) \equiv 0$, c'est-à-dire $F^+(\zeta) = f(\zeta)$, et les valeurs $f(\zeta)$ sont les valeurs frontières d'une fonction analytique à l'intérieur de C.

Inversement, si les valeurs $f(\zeta)$ sont les valeurs frontières d'une fonction analytique à l'intérieur de C, alors pour tout point z à l'extérieur de C, la fraction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, comme fonction de ζ, est une fonction analytique à l'intérieur du contour C et continue sur ce dernier. Donc, d'après le théorème de Cauchy, pour tous ces z

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0$$

et, par conséquent, tous les coefficients du développement (18) sont nuls. Ce sont précisément les conditions (17); le théorème est démontré.

Le théorème suivant est également évident.

T h é o r è m e 4. *Avec les conditions du théorème précédent, pour que les valeurs $f(\zeta)$ soient les valeurs frontières d'une fonction analytique à l'intérieur de C, il faut et il suffit que l'égalité*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0 \tag{19}$$

ait lieu pour tous les points z à l'extérieur de C.

Cherchons maintenant les conditions pour que des valeurs données sur C soient les valeurs frontières d'une fonction analytique à l'extérieur de C. Avant tout remarquons que si une fonction $f(z)$ est analytique à l'extérieur de C, le point à l'infini y compris, et continue sur le contour, on a alors la *formule* suivante *de Cauchy pour les domaines infinis*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} -f(z) + f(\infty) & \text{pour } z \text{ à l'extérieur de } C, \\ f(\infty) & \text{pour } z \text{ à l'intérieur de } C \end{cases} \tag{20}$$

(le contour C est parcouru dans le sens positif).

En effet, si le point z appartient à l'extérieur de C, alors nous entourons C d'un contour fermé C' contenant à son intérieur ce point et nous appliquons au domaine doublement connexe, de frontière les courbes C et C', la formule intégrale de Cauchy (n° 14):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

(les deux contours sont parcourus dans le sens positif). Puisque le développement

$$f(\zeta) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \ldots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \ldots$$

est valable au voisinage du point à l'infini, avec $c_0 = f(\infty)$, alors le résidu de la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ au point à l'infini est égal à $-c_0 = -f(\infty)$ et, par conséquent (cf. n° 24), $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f(\infty)$, ce qu'il fallait démontrer.

Si z se trouve à l'intérieur de C, alors la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est analytique dans la couronne de frontière les contours C et C'; par conséquent,

d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{C'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \int_{C} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

et, en tenant compte du résultat précédent, nous obtenons la deuxième formule (20).

En se basant sur la formule qui vient d'être obtenue, on peut aisément démontrer le théorème suivant:

Théorème 5. *Dans les conditions du théorème* 3, *pour que les valeurs* $f(\zeta)$ *soient les valeurs frontières de la fonction* $f(z)$ *analytique à l'extérieur de* C, *il faut et il suffit que l'égalité*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = a = \text{const} \tag{21}$$

soit satisfaite pour tous les points z *intérieurs à* C; *de plus, la constante du second membre est égale à* $f(\infty)$.

La nécessité de la condition est contenue dans la formule (20). Pour démontrer sa suffisance, remarquons que la fonction

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + a$$

est analytique à l'extérieur de C, de plus il découle de la condition (21) que ses valeurs limites par l'intérieur $F^+(\zeta) \equiv 0$, et cela signifie, d'après la formule de Sokhotski, que $F^-(\zeta) = f(\zeta)$. Le théorème est démontré.

Pour terminer donnons l'autre énoncé des théorèmes 4 et 5 dans le cas où la courbe C est la circonférence unité.

Théorème 6. *Pour que les valeurs* $f(\zeta)$, *la fonction* $f(\zeta)$ *satisfaisant en chaque point de la circonférence unité* C *à la condition de Hölder d'exposant* $\mu \leqslant 1$, *soient les valeurs frontières d'une fonction analytique respectivement* a) *dans le cercle* $|z| < 1$ *ou* b) *à son extérieur, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées*:

a) *pour tous les* z *à l'intérieur de* C

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{\overline{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z} = \overline{a} = \text{const}, \tag{22}$$

où a *est égal à la valeur de la fonction considérée pour* $z = 0$, *ou*

b) *pour tous les points* z *à l'extérieur de* C

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{\overline{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z} = 0. \tag{23}$$

Pour ramener ce théorème aux théorèmes précédents il suffit de remarquer que, d'après le principe de symétrie (n° 35), la fonction

$$F_1(z) = \overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

est analytique à l'extérieur du cercle $|z| < 1$ si $F(z)$ est analytique à l'intérieur de ce cercle, et, par conséquent, sur la circonférence $|z| = 1$, où $\zeta = \frac{1}{\bar{\zeta}}$, les valeurs limites de la fonction $F_1(z)$ par l'extérieur sont les conjuguées complexes des valeurs limites de la fonction $F(z)$ par l'intérieur (et inversement).

53. Problème aux limites d'Hilbert-Privalov. En 1934 Privalov (*) pose et résout le problème aux limites suivant :

Soient données sur une courbe fermée C deux fonctions à valeurs complexes $a(\zeta) \neq 0$ *et* $b(\zeta)$ *qui vérifient la condition de Hölder d'exposant* $\mu \leqslant 1$. *On demande de déterminer deux fonctions dont l'une,* $f^-(z)$, *serait analytique à l'extérieur de C, le point* $z = \infty$ *y compris, et l'autre,* $f^+(z)$, *analytique à l'intérieur de C ; les valeurs frontières* $f^-(\zeta)$ *et* $f^+(\zeta)$ *de ces fonctions sur C doivent exister et vérifier la relation*

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta) + b(\zeta). \tag{1}$$

Le cas particulier de ce problème, lorsque $b(\zeta) \equiv 0$, c'est-à-dire quand la relation (1) est de la forme :

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta) \tag{2}$$

a été résolu par *David Hilbert* (1862-1943) en 1905. Le problème aux limites d'Hilbert-Privalov trouve d'importantes applications dans différentes questions de la physique mathématique (cf. n° 55). Il faut souligner que les solutions d'Hilbert et de Privalov n'étaient pas complètes. Une solution complète et très simple a été donnée par *F. Gakhov* [13] en 1938. C'est cette solution que nous donnons ici.

Commençons par résoudre le problème d'Hilbert (2). On appelle *indice* de la fonction $a(\zeta)$ un nombre entier égal à la variation totale de son argument, lorsqu'on décrit C, divisée par 2π :

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg a(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \ln a(\zeta). \tag{3}$$

Supposons d'abord que l'indice soit nul, c'est-à-dire que la fonction $\ln a(\zeta)$ soit uniforme sur le contour C. Dans ce cas on trouve facile-

(*) *Ivan Privalov* (1891-1941), mathématicien soviétique, spécialiste de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

ment la solution. Construisons l'intégrale du type Cauchy

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\ln a(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} \tag{4}$$

et désignons par $F^-(z)$ et $F^+(z)$ les fonctions que cette intégrale définit respectivement à l'extérieur et à l'intérieur de C. Alors la solution est :

$$f^-(z)=Ae^{-F^-(z)},\quad f^+(z)=Ae^{-F^+(z)}, \tag{5}$$

où A est une constante arbitraire (il découle de la formule (18) du n° 52 que $F^-(\infty)=0$, donc $A=f^-(\infty)$).

En effet, les fonctions $F^-(z)$ et $F^+(z)$ sont respectivement analytiques à l'extérieur et à l'intérieur de C et possèdent des valeurs limites (*) qui sont liées entre elles par les formules de Sokhotski

$$F^-(\zeta)=F(\zeta)-\frac{1}{2}\ln a(\zeta),$$

$$F^+(\zeta)=F(\zeta)+\frac{1}{2}\ln a(\zeta),$$

où $F(\zeta)$ est la valeur principale de l'intégrale (4). En se débarrassant des logarithmes dans ces dernières formules et en utilisant (5), nous trouvons :

$$f^-(\zeta)=A\sqrt{a(\zeta)}\,e^{-F(\zeta)},\quad f^+(\zeta)=\frac{A}{\sqrt{a(\zeta)}}\,e^{-F(\zeta)},$$

d'où $\frac{f^-(\zeta)}{f^+(\zeta)}=a(\zeta)$, ce qu'il fallait démontrer.

Démontrons l'unicité de la solution construite au facteur constant A près. S'il existe une seconde solution $f_1^{\pm}(z)$, alors, en vertu de ce que les fonctions (5) ne s'annulent pas, les fonctions $\frac{f_1^{\pm}(z)}{f^{\pm}(z)}=g^{\pm}(z)$ sont analytiques (dans les domaines correspondants). D'après la condition aux limites (2) sur le contour C

$$\frac{g^-(\zeta)}{g^+(\zeta)}=\frac{f_1^-(\zeta)}{f_1^+(\zeta)}\cdot\frac{f^+(\zeta)}{f^-(\zeta)}=a(\zeta)\cdot\frac{1}{a(\zeta)}=1,$$

par conséquent, d'après le principe du prolongement continu, $g^-(z)$ et $g^+(z)$ définissent une fonction $g(z)$ analytique dans le plan fermé des z. D'après le théorème de Cauchy-Liouville, $g(z)\equiv$ $\equiv$ const, ce qui démontre la proposition.

Soit maintenant $\ln a(\zeta)$ une fonction multiforme d'indice négatif $-n$; pour simplifier l'écriture, supposons encore que C contienne à son intérieur l'origine des coordonnées. Alors l'indice

(*) Puisque $a\neq 0$ sur C, $\ln a$ vérifie, avec a, la condition de Hölder.

de la fonction

$$a_1(\zeta) = \zeta^n a(\zeta)$$

est nul, car

$$\Delta_C \arg a_1(\zeta) = \Delta_C \arg \zeta^n + \Delta_C \arg a(\zeta) = 2\pi n - 2\pi n = 0,$$

et la condition aux limites (2) s'écrit sous la forme

$$f^-(\zeta) = \frac{a_1(\zeta)}{\zeta^n} f^+(\zeta). \tag{6}$$

Nous allons chercher la solution du problème sous la forme d'un produit de deux fonctions

$$f^{\pm}(z) = f_1^{\pm}(z) f_2^{\pm}(z). \tag{7}$$

Etant donné que le choix de l'un des couples de fonctions est arbitraire, choisissons les fonctions $f_1^{\pm}(z)$ de manière que la relation

$$f_1^-(\zeta) = a_1(\zeta) f_1^+(\zeta) \tag{8}$$

soit satisfaite. Puisque l'indice de la fonction $a_1(\zeta)$ est nul, on peut utiliser le résultat obtenu ci-dessus, c'est-à-dire poser

$$f_1^-(z) = e^{-F_1^-(z)}, \quad f_1^+(z) = e^{-F_1^+(z)}, \tag{9}$$

où $F_1(z)$ est l'intégrale du type Cauchy construite d'après les valeurs frontières $\ln a_1(\zeta)$ (cf. formules (4) et (5) ; nous avons pris $A = 1$).

Il reste à choisir les fonctions $f_2^{\pm}(z)$ de manière que l'on ait sur la courbe C

$$f_2^-(\zeta) = \frac{1}{\zeta^n} f_2^+(\zeta), \tag{10}$$

alors le produit (7) satisfait à la condition (6) (pour s'en convaincre il suffit de multiplier (8) et (10)). Supposons que de telles fonctions $f_2^{\pm}(z)$ soient choisies, alors, en vertu de (10), les fonctions $f_2^+(z)$ et $z^n f_2^-(z)$ coïncident sur C et, par conséquent, définissent une fonction analytique dans tout le plan fini des z. Cette fonction possède à l'infini un pôle d'ordre plus petit ou égal à n car $f_2^-(z)$, régulière à l'infini, est donc un polynôme. Ainsi

$$f_2^-(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a^n}{z^n}, \quad f_2^+(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n ;$$

ayant recours aux formules (7) et (9) nous pouvons écrire la solution du problème dans le cas considéré sous la forme

$$\begin{aligned} f^-(z) &= \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right) e^{-F_1^-(z)}, \\ f^+(z) &= (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)\, e^{-F_1^+(z)}, \end{aligned} \tag{11}$$

où

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln [\zeta^n a(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{12}$$

Les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans les formules (11) sont arbitraires, en outre l'une d'elles, a_0, est définie par la donnée de $f^-(\infty)$.

Ainsi, si l'indice de la fonction $a(\zeta)$ est égal à $-n$, alors le problème d'Hilbert possède $n+1$ solutions linéairement indépendantes. Introduisant la notation

$$G^{\pm}(z) = e^{-F_1^{\pm}(z)},$$

ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} &G^-(z), \quad \frac{1}{z}G^-(z), \quad \ldots, \quad \frac{1}{z^n}G^-(z); \\ &G^+(z), \quad zG^+(z), \quad \ldots, \quad z^nG^+(z). \end{aligned} \tag{13}$$

Considérons enfin le cas où l'indice n de la fonction $a(\zeta)$ est positif. Dans ce cas, il s'avère que le problème ne possède pas de solutions analytiques dans les domaines correspondants. En effet, nous introduisons la fonction

$$a_1(\zeta) = \frac{1}{\zeta^n}a(\zeta)$$

d'indice nul.

Tout comme dans le cas précédent, nous cherchons la solution sous la forme des produits $f^{\pm}(z) = f_1^{\pm}(z) f_2^{\pm}(z)$. Le premier couple de fonctions doit satisfaire à la condition

$$f_1^-(\zeta) = a_1(\zeta) f_1^+(\zeta);$$

on détermine $f_1^{\pm}(z)$ à un facteur constant près, car l'indice de la fonction $a_1(\zeta)$ est nul. Pour le deuxième couple de fonctions nous avons une condition aux limites de la forme

$$f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta).$$

On voit donc que $f_2^-(z)$ et $z^n f_2^+(z)$ définissent une fonction analytique régulière dans tout le plan fermé et, par conséquent, constante. Puisqu'elle est nulle à l'origine des coordonnées (car à l'intérieur de C cette fonction coïncide avec $z^n f_2^+(z)$), elle est donc indentiquement nulle, ce qui est impossible (*).

Résumons les résultats obtenus.

Théorème 1. (F. Gakhov). *Le problème d'Hilbert*

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta)$$

a $n+1$ *solutions linéairement indépendantes de la forme* (13) *si l'indice* $-n$ *de la fonction frontière* $a(\zeta)$ *est non positif. Si l'indice n est positif, alors le problème n'a pas de solutions analytiques dans les domaines correspondants.*

(*) Si l'on admet que la fonction à déterminer puisse avoir un pôle en un certain point, par exemple au point $z = \infty$, alors le problème est résoluble. Si l'indice de $a(\zeta)$ est égal à n, il existe alors une solution unique ayant un pôle d'ordre $\leqslant n$ à l'infini, cf. *Gakhov* [13].

Passons à la résolution du problème de Privalov :

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta) + b(\zeta). \tag{1}$$

Supposons d'abord que l'indice de la fonction $a(\zeta)$ soit nul, c'est-à-dire que le problème d'Hilbert correspondant, que l'on obtient en prenant $b(\zeta) \equiv 0$ dans la condition (1), possède une solution unique :

$$f_1^{\pm}(z) = e^{-F^{\pm}(z)}, \tag{14}$$

où $F(z)$ est définie par l'intégrale (4). Cherchons la solution du problème de Privalov de nouveau sous la forme des produits $f^{\pm}(z) = f_1^{\pm}(z) f_2^{\pm}(z)$, où les fonctions $f_1^{\pm}(z)$ sont définies par les formules (14). Sur le contour C la relation

$$f_1^- f_2^- = a f_1^+ f_2^+ + b = f_1^- f_2^+ + b$$

doit être satisfaite (nous avons remplacé af_1^+, en vertu de la condition (2), par f_1^-). Après y avoir substitué $f_1^-(\zeta)$, tirée de (14), nous obtenons la condition aux limites pour $f_2(z)$:

$$f_2^+(\zeta) - f_2^-(\zeta) = -b(\zeta) e^{F^-(\zeta)}. \tag{15}$$

Cette condition aux limites se ramène à ce que l'on se donne sur le contour C le saut de la fonction $f_2(z)$. D'après la formule de Sokhotski (15) du n° 52, nous pouvons affirmer que la fonction $f_2(z)$ ne diffère de l'intégrale du type Cauchy

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{b(\zeta) e^{-F^-(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \tag{16}$$

que par une constante, c'est-à-dire

$$f_2^{\pm}(z) = A + F_2^{\pm}(z), \tag{17}$$

où A est une constante arbitraire.

Ainsi, si l'indice de la fonction $a(\zeta)$ est nul, alors la solution du problème de Privalov peut être mise sous la forme

$$f^{\pm}(z) = e^{-F^{\pm}(z)} \{A + F_2^{\pm}(z)\}, \tag{18}$$

où $F(z)$ et $F_2(z)$ sont données par les formules (4) et (16) et A est une constante arbitraire.

Démontrons l'unicité de la solution obtenue. Il est clair que la différence des deux solutions du problème (1) vérifie la condition (2). Il en découle que deux solutions du problème de Privalov ne peuvent différer que par une solution du problème d'Hilbert. Tenant compte de l'unicité de la solution du problème d'Hilbert démontrée ci-dessus, nous voyons que toute solution du problème de Privalov s'obtient de (18) en faisant varier la constante A.

Si l'indice de la fonction $a(\zeta)$ est égal à $-n$, nous introduisons alors la fonction $a_1(\zeta) = \zeta^n a(\zeta)$ d'indice nul et nous cherchons

$f^{\pm}(z)$ sous la forme des produits $f_1^{\pm}(z)\, f_2^{\pm}(z)$, où

$$f_1^{\pm}(z) = e^{-F_1^{\pm}(z)}$$

et $F_1(z)$ est donnée par l'intégrale (12) tandis que $f_2(z)$ satisfait à la condition aux limites

$$f_2^-(\zeta) = \frac{1}{\zeta^n} f_2^+(\zeta) + b(\zeta) \cdot e^{F_1^-(\zeta)}.$$

Cette dernière condition est évidemment satisfaite par les fonctions

$$f_2^-(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + F_2^-(z),$$

$$f_2^+(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n + z^n F_2^+(z),$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes arbitraires et $F_2(z)$ est définie par la formule (16) dans laquelle $F^-(\zeta)$ a été remplacée par $F_1^-(\zeta)$. La solution du problème de Privalov dans le cas d'un indice négatif $-n$ est donnée sous la forme

$$\begin{aligned} f^-(z) &= \left\{ a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + F_2^-(z) \right\} e^{-F_1^-(z)}, \\ f^+(z) &= \{ a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n + z^n F_2^+(z) \}\, e^{-F_1^+(z)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Comme précédemment, il est facile de démontrer que la formule (19) contient toutes les solutions du problème.

Si enfin l'indice n de la fonction $a(\zeta)$ est positif, la même méthode donne pour $f_1(z)$ la condition

$$f_1^-(\zeta) = \frac{a(\zeta)}{\zeta^n} f_1^+(\zeta)$$

et pour $f_2(z)$ la condition

$$f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta) + b(\zeta) e^{F_1^-(\zeta)},$$

où $F_1(z)$ désigne l'intégrale du type de Cauchy construite d'après les valeurs frontières de $\ln \frac{a(\zeta)}{\zeta^n}$. Les fonctions

$$f_2^-(z) = A + F_2^-(z), \quad f_2^+(z) = \frac{A + F_2^+(z)}{z^n},$$

où $F_2(z)$ est donnée par la formule (16) dans laquelle $F^-(\zeta)$ a été remplacée par $F_1^-(\zeta)$, satisfont à cette dernière condition. Comme il est facile de le démontrer, seules ces fonctions vérifient notre condition. La fonction $f_2^+(z)$ est régulière au point $z = 0$ si ce point est pour $A + F_2(z)$ un zéro dont l'ordre n'est pas inférieur à n.

Cette dernière condition peut être un peu transformée si l'on développe $F_2^+(z)$ en série de Taylor suivant les puissances de z. Pour cela substituons

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \ldots + \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} + \ldots$$

dans la formule (16) (dans laquelle F a été remplacée par F_1); nous avons

$$F_2^+(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta)}{\zeta} e^{F_1(\zeta)}\,d\zeta - \frac{z}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta)}{\zeta^2} e^{F_1(\zeta)}\,d\zeta - \ldots$$

$$\ldots - \frac{z^n}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta)}{\zeta^{n+1}} e^{F_1(\zeta)}\,d\zeta - \ldots$$

On voit que notre condition de résolubilité a la forme

$$\int_C \frac{b(\zeta)}{\zeta^{k+1}} e^{F_1(\zeta)}\,d\zeta = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{20}$$

(la constante A doit être prise égale au terme constant du développement). Ainsi, dans le cas d'un indice positif n, le problème de Privalov n'a de solution régulière que si les conditions (20) sont observées.

Résumons les résultats obtenus.

Théorème 2. (F. Gakhov). *Le problème de Privalov*

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta) + b(\zeta)$$

a une famille de solutions (19) *dépendant de* $n + 1$ *constantes arbitraires si l'indice* $-n$ *de la fonction frontière* $a(\zeta)$ *n'est pas positif. Si l'indice* n *de la fonction* $a(\zeta)$ *est positif, alors ce problème n'est résoluble que dans le cas où la fonction* $b(\zeta)$ *satisfait aux conditions complémentaires* (20).

Pour terminer, indiquons que les méthodes de résolution du problème d'Hilbert-Privalov exposées ci-dessus s'étendent au cas des contours non fermés C. Pour obtenir cette extension, il suffit de compléter la courbe C de manière à obtenir un contour fermé C_0 à l'aide d'un arc de courbe C' réunissant les extrémités de C ($C_0 = C \cup C'$) et de poser sur C'

$$a(\zeta) \equiv 1, \quad b(\zeta) \equiv 0.$$

Pour plus de simplicité, considérons le cas de $b(\zeta) \equiv 0$ et supposons que l'indice de la fonction $a(\zeta)$, qui est défini comme la variation de $\arg a(\zeta)$ lorsque le point ζ décrit les deux bords de la coupure C dans des sens opposés, est nul. Alors la solution $f^{\pm}(z)$, construite d'après les formules (4) et (5) pour le contour C_0 (de plus, dans la première de ces formules l'intégrale n'est prise que le long de C (puisque sur C', par définition, $\ln a(\zeta) \equiv 0$), est uniforme et analytique partout à l'extérieur de la courbe C (sur C' la condition aux limites donne $f^+(\zeta) = f^-(\zeta)$), et sur les deux bords de C elle prend les valeurs $f^+(\zeta)$ et $f^-(\zeta)$ qui vérifient la condition (2). La différence qui existe entre ce cas et le cas d'un contour fermé est que cette solution est, en général, non bornée aux extrémités

de la courbe C. Cependant, on peut démontrer que si $a(\xi)$ satisfait à la condition de Hölder, alors cette solution devient infinie d'ordre inférieur à l'unité lorsqu'on tend vers les extrémités de C.

Si on multiplie la solution $f^{\pm}(z)$ par une fonction quelconque $g(z)$, analytique aux points du contour C, alors le produit $f^{\pm}(z)\, g(z)$ résout évidemment le même problème aux limites homogène que $f^{\pm}(z)$. Tenant compte de ce que, dans le cas d'un contour C non fermé, on admet des solutions devenant infinies d'ordre inférieur à l'unité aux extrémités de C, on peut parfois multiplier la solution $f^{\pm}(z)$ par une fonction régulière partout, excepté en l'une des extrémités de C. Cette remarque sera utilisée dans les applications (cf. n° 55).

Le lecteur trouvera un exposé complet des questions se rapportant au problème d'Hilbert-Privalov dans le cas des contours non fermés dans le chapitre IV de la monographie de N. Mouskhélichvili [14]. On donne dans cette même monographie la généralisation de la méthode de Gakhov aux domaines multiplement connexes obtenue par B. Khvédélidzé en 1941.

54. Formule de Keldych-Sédov. Le *problème aux limites mixte* suivant (*) est d'un grand intérêt pour les applications.

On se donne sur la frontière C d'un domaine simplement connexe D des points $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ disposés dans l'ordre où ils sont écrits. On demande de déterminer une fonction $f(z)$ analytique dans D, dont la partie réelle prend des valeurs données sur les arcs de courbe $\overset{\frown}{a_k b_k}$ et la partie imaginaire des valeurs données sur les arcs de courbe $b_k a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $a_{n+1} = a_1$).

En 1937, *M. Keldych* et *L. Sédov* ont donné l'étude complète de ce problème et ont démontré qu'en général il n'a pas de solutions bornées au voisinage des extrémités a_k et b_k des arcs de courbe. Si on se libère de la condition que $f(z)$ est bornée et si l'on demande que l'intégrale de $f(z)$ soit bornée, alors le problème est résolu et a une solution à la $(n+1)^{\text{ème}}$ constante arbitraire près. Enfin, ils ont démontré que le problème a une solution unique si on exige de plus que $f(z)$ soit bornée au voisinage de n extrémités quelconques et que l'on se donne sa valeur en un point quelconque de la frontière.

Nous allons étudier en détail le dernier cas. Supposons encore que le domaine D soit le demi-plan supérieur; le cas d'un domaine simplement connexe quelconque s'y ramène à l'aide d'une transformation conforme.

Ainsi, soient donnés sur l'axe des x des points $-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n < \infty$ et deux fonctions réelles $u(x)$, $v(x)$ qui possèdent un nombre fini de points de discontinuité de première espèce, de plus $u(x)$ est définie sur tous les segments

(*) Le problème représente un cas particulier du problème d'Hilbert (cf. n° 55).

(a_k, b_k) et $v(x)$ sur tous les segments

$$(b_k, a_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad a_{n+1} = a_1).$$

On demande de déterminer une fonction $f(z)$ analytique dans le demi-plan supérieur et telle que sur les segments (a_k, b_k)

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x),$$

et sur les segments (b_k, a_{k+1})

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x).$$

Comme nous l'avons dit plus haut, on a le théorème suivant:

T h é o r è m e (Keldych-Sédov). *Le problème mixte pour le demi-plan supérieur a une solution unique $f(z)$ qui vérifie les conditions suivantes*:

1) *$f(z)$ est bornée au voisinage de tous les points a_k;*

2) *l'intégrale $\int_{\bullet}^{z} f(z)\,dz$ est bornée au voisinage de tous les points b_k;*

3) *$f(z)$ a une limite finie $f(\infty)$, lorsque $z \to \infty$, qui est supposée réelle pour plus de simplicité.*

Pour démontrer ce théorème posons

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{z-b_k}{z-a_k}}, \tag{1}$$

où l'on considère la branche de la racine qui est positive sur le segment (b_n, ∞), Π est le symbole du produit. Soit z un point arbitraire du demi-plan supérieur. Entourons-le d'un contour fermé C formé de la demi-circonférence supérieure C_R: $|\zeta| = R$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$, et du segment $(-R, R)$ de l'axe réel. Supposons que la fonction $f(z)$ soit connue, alors, d'après la formule de Cauchy, on a:

$$f(z)\,g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\,g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{2}$$

Mais, comme il est clair que $\lim\limits_{\zeta\to\infty} g(\zeta) = 1$, la limite

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{f(\zeta)\,g(\zeta)}{\zeta - z}\,\zeta = f(\infty)$$

existe aussi. Donc la fonction $\dfrac{f(\zeta)\,g(\zeta)}{\zeta - z}$ admet au voisinage du point $\zeta = \infty$ la représentation suivante:

$$\frac{f(\zeta)\,g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\infty)}{\zeta} + \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}, \tag{3}$$

où $\varphi(\zeta) \to 0$ lorsque $\zeta \to \infty$. Intégrant (3) le long de la demi-circonférence C_R de rayon suffisamment grand, nous trouvons :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)\,g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2}f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta.$$

Puisque $\varphi(\zeta) \to 0$ lorsque $\zeta \to \infty$, l'intégrale du second membre tend vers 0 lorsque $R \to \infty$, et, par conséquent, la relation (2) donne à la limite :

$$f(z)\,g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,g(t)}{t - z}\,dt + \frac{1}{2}f(\infty), \tag{4}$$

où l'intégrale est prise le long de l'axe réel. Remplaçant ici z par $\bar{z}$, nous avons d'une manière analogue :

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,g(t)}{t - \bar{z}}\,dt + \frac{1}{2}f(\infty).$$

Passons dans cette dernière formule aux quantités conjuguées complexes et additionnons-la à la formule (4) :

$$f(z)\,g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,g(t) - \overline{f(t)\,g(t)}}{t - z}\,dt + f(\infty).$$

Remarquons à présent que sur les segments (a_k, b_k) le produit $\prod_{k=1}^{n}\frac{t - b_k}{t - a_k}$ est négatif et que sur les segments (b_k, a_{k+1}) il est positif ; par conséquent, la fonction $g(t)$ prend sur (a_k, b_k) des valeurs purement imaginaires et sur les segments (b_k, a_{k+1}) des valeurs réelles. Tenant compte de ce qui vient d'être dit, nous écrivons la dernière formule sous la forme

$$f(z)\,g(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{f(t) + \overline{f(t)}}{t - z}\,g(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{f(t) - \overline{f(t)}}{t - z}\,g(t)\,dt\right\} + f(\infty). \tag{5}$$

Ici le second membre est connu car sur les segments (a_k, b_k) $\operatorname{Re} f(t) = u(t)$ est connue et sur les segments (b_k, a_{k+1}) $\operatorname{Im} f(t) = v(t)$. Ainsi, nous aboutissons à la *formule de Keldych-Sédov* que nous cherchions :

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(t)\,g(t)}{t - z}\,dt + i\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{v(t)\,g(t)}{t - z}\,dt\right\} + \frac{f(\infty)}{g(z)}. \tag{6}$$

Il reste à démontrer que la fonction définie par cette formule résout réellement le problème mixte. Pour cela, considérons un des termes de la somme (6)

$$f_k(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)\, g(t)}{t - z}\, dt. \tag{7}$$

Le produit $f_k(z)\, g(z)$ représente l'intégrale du type Cauchy construite d'après la fonction $\varphi(t) = 2u(t)\, g(t)$. Sa valeur limite $f_k^+(t_0)\, g(t_0)$, lorsque z tend par le demi-plan supérieur vers le point t_0 du segment (a_k, b_k), est donnée par la formule (12) de Sokhotski du n° 52 :

$$f_k^+(t_0)\, g(t_0) = \Phi(t_0) + u(t_0)\, g(t_0), \tag{8}$$

où, conformément à la formule (8) du n° 52,

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)\, g(t) - u(t_0)\, g(t_0)}{t - t_0}\, dt + u(t_0)\, g(t_0) + \\ + \frac{u(t_0)\, g(t_0)}{\pi i} \ln \frac{b_k - t_0}{a_k - t_0}. \tag{9}$$

Tenant compte de ce que, pour $a_k < t_0 < b_k$, la valeur limite du logarithme, lorsqu'on s'approche du segment (a_k, b_k) par le demi-plan supérieur, est

$$\ln \frac{b_k - t_0}{a_k - t_0} = \ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k} - i\pi$$

(on considère la branche du logarithme qui est réelle sur l'axe des t à droite de ce segment), nous pouvons écrire la formule (8), après y avoir porté $\Phi(t_0)$ tirée de (9) et simplifié par $g(t_0)$, sous la forme

$$f_k^+(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)\frac{g(t)}{g(t_0)} - u(t_0)}{t - t_0}\, dt + u(t_0) + \frac{u(t_0)}{\pi i} \ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k}. \tag{10}$$

Puisque, pour t et t_0 appartenant au segment (a_k, b_k), la fonction

$$g(t) = \prod_{\nu=1}^{n} \sqrt{\frac{t - b_\nu}{t - a_\nu}}$$

prend des valeurs purement imaginaires, dans la dernière formule l'intégrale est réelle, ainsi que le terme $\ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k}$. Par conséquent, $\operatorname{Re} f_k^+(t_0) = u(t_0)$. Si maintenant z tend par le demi-plan supérieur vers un point t_1 appartenant à un segment quelconque (a_{k_1}, b_{k_1}), $k_1 \neq k$, alors la valeur limite $f_k^+(t_1)$ est obtenue en substituant

directement $t = t_1$ dans l'intégrale (7):

$$f_k^+(t_1) = \frac{1}{\pi i g(t_1)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)\, g(t)}{t - t_1}\, dt.$$

Ici, la valeur $g(t_1)$ est purement imaginaire ainsi que $g(t)$. Donc, la valeur $f_k^+(t_1)$ est purement imaginaire et $\operatorname{Re} f_k^+(t_1) = 0$. Si enfin z tend par le demi-plan supérieur vers un point t_2 appartenant à un segment quelconque $(b_\nu, a_{\nu+1})$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, alors la valeur limite est

$$f_k^+(t_2) = \frac{1}{\pi i g(t_2)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)\, g(t)}{t - t_2}\, dt.$$

Ici $g(t_2)$ est réelle et $g(t)$ purement imaginaire, donc la valeur $f_k^+(t_2)$ est réelle et $\operatorname{Im} f_k^+(t_2) = 0$.

Il découle de nos raisonnements que la partie réelle de la fonction

$$f_*(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)\, g(t)}{t - z}\, dt$$

prend des valeurs données $u(t)$ sur chaque segment (a_k, b_k) et sa partie imaginaire sur chaque segment (b_k, a_{k+1}) est nulle.

D'une manière tout à fait analogue, nous démontrons que la partie imaginaire de la fonction

$$f_{**}(z) = \frac{1}{\pi g(z)} \sum_{k=1}^{n} \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{v(t)\, g(t)}{t - z}\, dt$$

prend des valeurs données $v(t)$ sur chaque segment (b_k, a_{k+1}) et sa partie réelle prend la valeur 0 sur chaque segment (a_k, b_k).

Il en découle que la fonction (6)

$$f(z) = f_*(z) + f_{**}(z) + \frac{f(\infty)}{g(z)}$$

résout en effet le problème aux limites mixte (la présence du dernier terme ne change rien car $f(\infty)$ est un nombre réel et $g(z)$ prend des valeurs imaginaires sur les segments (a_k, b_k) et des valeurs réelles sur les segments (b_k, a_{k+1})). Il découle de la construction des fonctions $f_*(z)$ et $f_{**}(z)$ que, lorsque $z \to \infty$, elles tendent vers 0; la fonction $g(z)$ tend alors vers l'unité, donc la condition à l'infini est satisfaite. Il découle aussi de la démonstration de la formule (6) que cette dernière donne l'unique solution du problème mixte qui vérifie les conditions 1)-3). Le théorème est démontré.

Montrons maintenant que si l'on remplace la condition suivant laquelle $f(z)$ est bornée aux points a_k par la condition qui veut que seule son intégrale $\int f(z)\,dz$ y soit bornée (ainsi qu'aux points b_k), alors, pour la valeur donnée $f(\infty)$, la *solution du problème contiendra n constantes arbitraires*. En effet, pour des constantes réelles arbitraires $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ la partie réelle de la fonction

$$h(z) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_{n-1} z^{n-1}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n} (z-a_k)(z-b_k)}} \tag{11}$$

est nulle sur tous les segments (a_k, b_k) et sa partie imaginaire est nulle sur tous les segments (b_k, a_{k+1}). Lorsque $z \to \infty$, cette fonction tend évidemment vers zéro. Ainsi, nous pouvons ajouter cette fonction à la fonction $f(z)$, définie par la formule (6), et la somme ainsi obtenue est une fonction analytique dans le demi-plan supérieur, possédant l'intégrale bornée au voisinage des points a_k et b_k, prenant à l'infini la valeur réelle donnée $f(\infty)$ et résolvant le problème aux limites mixte.

Introduisant la notation

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{sur les segments } (a_k, b_k), \\ iv(t) & \text{sur les segments } (b_k, a_{k+1}) \end{cases} \tag{12}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$), nous pouvons écrire la *formule de Keldych-Sédov* sous la forme

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)\varphi(t)}{t-z}\,dt + h(z) + \frac{f(\infty)}{g(z)}, \tag{13}$$

où $g(z)$ et $h(z)$ sont données par les formules (1) et (11). On peut démontrer que la formule (13) contient toutes les solutions du problème qui satisfont aux conditions posées (cf. *Mouskhélichvili* [14]).

Dans le paragraphe suivant nous appliquons la formule de Keldych-Sédov transformée, qui s'obtient en remplaçant le demi-plan supérieur par le cercle $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$. Pour réaliser cette transformation nous utilisons la transformation homographique

$$z = \frac{iz_1}{1-z_1} \tag{14}$$

du cercle $\left|z_1 - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ sur le demi-plan supérieur des z.

Portant (14) dans la formule (13) où, pour plus de simplicité, on a posé $h(z) = f(\infty) = 0$ et remplaçant z_1 par z et t_1 par ζ, nous obtenons

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_C \frac{g(\zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \frac{1-z}{1-\zeta}\,d\zeta, \tag{15}$$

où C est la circonférence $|\zeta - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $\varphi(\zeta)$, la fonction donnée sur la circonférence, est égale à $u(\zeta)$ sur (a_k, b_k) et à $iv(\zeta)$ sur (b_k, a_{k+1}) et $g(z)$ est donnée par la formule (1) (les points a_k et b_k se trouvent sur C).

D'une manière tout à fait analogue on peut transformer la formule (13) pour le cas du cercle unité $|z| < 1$. Dans ce cas elle prend la forme

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_{|\zeta|=1} g(\zeta)\varphi(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{2\zeta}\right) d\zeta + \\ + \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{(z-a_k)(z-b_k)}}\,(c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n), \qquad (16)$$

où c_k sont des constantes complexes satisfaisant à la condition $c_{n-k} = \bar{c}_k$. Le lecteur trouvera la démonstration de la formule (16) dans le livre de N. Mouskhélichvili [14].

55. Autres problèmes aux limites. Considérons encore quelques problèmes aux limites de la théorie des fonctions analytiques et harmoniques.

1) Le problème aux limites de Riemann-Hilbert s'énonce de la manière suivante:

Déterminer une fonction $f(z) = u(z) + iv(z)$ analytique dans un domaine D et continue sur $\overline{D}$, qui satisfait sur la frontière C du domaine à la condition

$$a(\zeta)\,u(\zeta) - b(\zeta)\,v(\zeta) = c(\zeta), \qquad (1)$$

où a, b, c, sont des fonctions réelles données sur C.

Nous donnons la solution du problème de Riemann-Hilbert due à *N. Mouskhélichvili*. Si D est un domaine simplement connexe, alors au moyen d'une représentation conforme le problème se ramène au cas où D est le cercle unité $|z| < 1$. C'est précisément ce cas que nous allons considérer, en supposant de plus que les fonctions a, b, c satisfont à la condition de Hölder et que $a^2 + b^2 \neq 0$ partout sur C. Ecrivons la condition aux limites (1) sous la forme

$$2\mathrm{Re}\,(a + ib)\,f(\zeta) = (a + ib)\,f(\zeta) + (a - ib)\,\overline{f(\zeta)} = 2c. \qquad (2)$$

Posons à l'extérieur du cercle unité

$$f_*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \qquad (3)$$

et désignons par $F(z)$ la fonction égale à $f(z)$ dans le cercle $|z| < 1$ et à $f_*(z)$ à son extérieur. La valeur limite de $F(z)$ sur C *à gauche* $F^+(\zeta) = f(\zeta)$, la valeur limite *à droite* $F^-(\zeta) = \overline{f(\zeta)}$ (cette dernière relation découle de la définition (3) et de ce que $\frac{1}{\bar{\zeta}} = \zeta$ sur C). C'est pourquoi la condition (2) peut être écrite sous la forme

$$(a + ib)\,F^+(\zeta) + (a - ib)\,F^-(\zeta) = 2c \qquad (4)$$

ou encore

$$F^-(\zeta) = A(\zeta) F^+(\zeta) + B(\zeta), \tag{5}$$

avec

$$A(\zeta) = -\frac{a+ib}{a-ib}, \quad B(\zeta) = -\frac{2c}{a-ib}. \tag{6}$$

Ainsi, la *solution du problème de Riemann-Hilbert se ramène à la solution du problème d'Hilbert-Privalov* (n° 53).

Cependant, ce n'est pas toute solution $F(z)$ du problème (5) qui donne la solution du problème (2), car la condition (3), qui est une relation entre les valeurs de $F(z)$ en des points symétriques par rapport à la circonférence, n'est en général pas satisfaite. Cependant, connaissant une solution quelconque $F(z)$, il est facile de construire une solution vérifiant cette condition. Pour cela, outre $F(z)$, considérons la fonction

$$F_*(z) = \overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

et remarquons que sur C elle vérifie la condition (4) (*) et, par conséquent, la condition (5). Mais alors la fonction

$$\frac{1}{2}\{F(z) + F_*(z)\},$$

qui vérifie évidemment la condition (3), vérifie également cette condition. A l'intérieur du cercle unité cette fonction est, par conséquent, la solution du problème aux limites de Riemann-Hilbert.

2) Le problème de la dérivée oblique s'énonce de la manière suivante.

Déterminer une fonction $u(z)$ harmonique dans un domaine D et continue, ainsi que ses dérivées partielles premières, sur $\overline{D}$, qui satisfait sur la frontière C de ce domaine à la condition

$$a(\zeta)\frac{\partial u}{\partial x} + b(\zeta)\frac{\partial u}{\partial y} = c(\zeta), \tag{7}$$

où a, b, c sont des fonctions réelles données sur C.

L'appellation de ce problème tient à ce que la condition (7) peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{c(\zeta)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{7'}$$

où $\frac{\partial u}{\partial l}$ est la dérivée dans la direction du vecteur $\mathbf{l} = a + ib$ faisant avec C un certain angle.

(*) En effet, nous avons $F_*(\zeta) = \overline{F(\zeta)}$ sur C, et lorsque z tend vers C par la gauche, $\frac{1}{\bar{z}}$ y tend par la droite. Par conséquent, en prenant dans (4) les quantités conjuguées complexes, nous obtenons une condition semblable pour $F_*(\zeta)$.

Pour les suppositions faites dans le problème précédent, le problème de la dérivée oblique s'y ramène. En effet, désignons par $f(z) = u + iv$ la fonction de partie réelle u et posons $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = u_1 + iv_1$. La condition (7) s'écrit maintenant sous la forme

$$a(\zeta)\, u_1(\zeta) - b(\zeta)\, v_1(\zeta) = c(\zeta)$$

et coïncide avec la condition (1). Ainsi, on peut déterminer $f'(z)$ par la méthode décrite dans 1) et $f(z)$ par une simple intégration.

3) Pour certaines questions, par exemple, pour l'étude des équations aux dérivées partielles du type mixte (il en sera question dans le paragraphe suivant), on rencontre la variante suivante du problème de la dérivée oblique (*) :

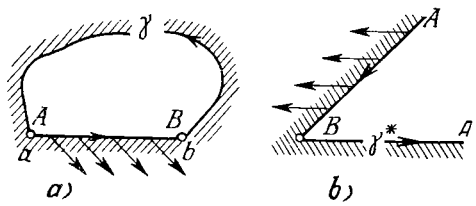

FIG. 125

Soit D un domaine dont une partie de la frontière coïncide avec le segment (a, b) de l'axe réel et l'autre partie avec une courbe γ d'extrémités aux points a et b et soient données des fonctions réelles continues $\varphi(x)$ et $\psi(\zeta)$ respectivement sur (a, b) et γ. On demande de déterminer une fonction $u(z)$ harmonique dans le domaine D telle que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi(x) \quad \text{sur } (a, b), \\ u &= \psi(\zeta) \quad \text{sur } \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Il est clair que $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial l}$ est la dérivation dans la direction $\mathbf{l}$ formant l'angle $-\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des x. Pour résoudre ce problème nous avons recours à la représentation conforme $z = f(z_1)$ du domaine D sur le secteur $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4}$ qui fait correspondre à l'arc de courbe γ la demi-droite γ^* : $\arg z_1 = 0$, au segment (a, b) la demi-droite $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ et aux points a et b les points ∞ et 0. Par cette transformation la direction dans laquelle on se donne la dérivée sur γ a pour image la direction de l'axe négatif des x (fig. 125). Donc, pour la fonction harmonique

$$u[f(z_1)] = u_1(z_1),$$

(*) Cf. *M. A. Лаврентьев* и *А. В. Бицадзе*, «К проблеме уравнений смешанного типа», ДАН СССР, 1950, т. XX, № 3.

en laquelle se transforme la fonction inconnue $u(z)$, la première condition (8) s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial u}{\partial l} \cdot \left| \frac{dz}{dz_1} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi [f(\zeta_1)] \cdot |f'(\zeta_1)|. \tag{9}$$

La deuxième condition se transforme en la relation $u_1(x_1) = \psi [f(x_1)]$ qui, après dérivation par rapport à x_1, prend la forme

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \left| \frac{dz}{dz_1} \right| = \psi' [f(x_1)] \cdot |f'(x_1)|, \tag{10}$$

où $\frac{\partial \psi}{\partial s} = \psi'$ désigne la dérivée le long du contour γ. Puisque les seconds membres des conditions (9) et (10) sont des fonctions connues, notre problème se ramène alors à la détermination d'une fonction harmonique $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ d'après ses valeurs sur la frontière du secteur $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire au problème de Dirichlet.

Par une méthode analogue, on peut résoudre un problème encore plus général. Soient données sur une partie C_1 de la frontière C d'un domaine simplement connexe D des fonctions réelles continues $\varphi(\zeta)$, $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, avec $a^2 + b^2 \neq 0$, et sur la partie restante C_2 une fonction réelle continue $\psi(\zeta)$. On demande de construire une fonction $u(z)$ harmonique dans le domaine D, qui satisfait sur la frontière à la condition

$$a(\zeta) \frac{\partial u}{\partial x} + b(\zeta) \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(\zeta) \quad \text{sur } C_1,$$

$$u = \psi(\zeta) \quad \text{sur } C_2.$$

La première de ces conditions aux limites peut être interprétée comme la donnée de la dérivée suivant une direction faisant un angle connu avec l'arc de courbe C_1. A l'aide de la formule de Cisotti (n° 44) on peut construire la représentation conforme $z_1 = f(z)$ du domaine D sur le domaine D_1 de manière que l'arc de courbe C_2 ait pour image une droite verticale et les directions dans lesquelles la dérivée est connue aient également pour images des directions verticales; la forme de l'image de la courbe C_1 est définie par ces conditions. Il faut de même imposer aux fonctions des conditions telles que les images des arcs de courbe C_1 et C_2 soient la frontière du domaine simplement connexe D_1.

Tout comme dans le cas étudié ci-dessus, le problème se ramène au problème de Dirichlet pour la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial y}$.

4) Le problème mixte pour les fonctions harmoniques s'énonce de la manière suivante.

On donne sur la frontière C d'un domaine simplement connexe D des points $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ disposés dans l'ordre où ils sont écrits et on se donne respectivement sur les arcs de courbe (a_k, b_k), (b_k, a_{k+1}) $(k = 1, 2, \ldots, n; a_{n+1} = a_1)$ des fonctions réelles $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$. On demande de déterminer une fonction $u(z)$ harmonique

et bornée dans le domaine D, qui vérifie les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(\zeta) \quad \text{sur } (a_k, b_k), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \psi(\zeta) \quad \text{sur } (b_k, a_{k+1}), \end{aligned} \tag{11}$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}$ *est la dérivée suivant la normale intérieure à* C.

Démontrons la résolubilité et l'unicité de la solution du problème mixte. Il est clair qu'à l'aide d'une représentation conforme auxiliaire le problème se ramène à un cas particulier, à savoir celui où le domaine D est le demi-plan supérieur et les conditions aux limites (11) sont de la forme

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x) \quad \text{sur } (a_k, b_k), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \psi(x) \quad \text{sur } (b_k, a_{k+1}) \end{aligned} \tag{12}$$

(le procédé de réduction est le même que celui employé d'ordinaire; cf. exemple 6) du n° 44). Pour ce cas particulier la solution du problème mixte est donnée par la formule de Keldych-Sédov.

En effet, soit $f(z) = u + iv$ la fonction analytique dans le demi-plan supérieur, de partie réelle u et

$$f_1(z) = f'(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y).$$

Nous avons $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $v_1 = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, donc les conditions aux limites (12) pour la fonction $f_1(z)$ prennent la forme

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi'(x) \quad \text{sur } (a_k, b_k), \\ v_1 &= -\psi(x) \quad \text{sur } (b_k, a_{k+1}). \end{aligned} \tag{13}$$

La solution $f_1(z)$ du problème (13) est donnée par la formule (13) (n° 54) de Keldych-Sédov, de plus la condition d'après laquelle l'intégrale $\int_z^z f_1(z)\,dz$ est bornée au voisinage des points a_k et b_k garantit que la solution $u(z)$ du problème (12), qui d'ailleurs est donnée par $f_1(z)$ d'après la formule:

$$u(z) = \operatorname{Re} \int_{z_1}^{z} f_1(z)\,dz \tag{14}$$

est bornée. Pendant la réduction du problème (12) au problème (13) nous dérivons la fonction $\varphi(x)$ donnée sur l'ensemble des n segments (a_k, b_k) puis, appliquant la formule (14), nous intégrons la fonction construite $f_1(z)$. Ainsi, notre méthode nous donne une fonction $u(z)$ qui ne coïncide sur les segments (a_k, b_k) avec la fonction donnée $\varphi(x)$ qu'à des termes constants près (différents pour

les divers segments). Cependant, la présence de n constantes arbitraires dans la formule de Keldych-Sédov permet de choisir ces termes de manière que les valeurs de u sur (a_k, b_k) coïncident exactement avec $\varphi(x)$. Ainsi, la résolubilité du problème mixte pour les fonctions harmoniques est démontrée.

Démontrons maintenant l'unicité de la solution de ce problème dans la classe des fonctions harmoniques bornées. Soient $u_1(z)$ et $u_2(z)$ deux fonctions bornées harmoniques dans le demi-plan supérieur, qui satisfont à la condition (12). La différence $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ est également une fonction bornée harmonique dans le demi-plan supérieur, de plus

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad (a_k, b_k),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{sur} \quad (b_k, a_{k+1}).$$

D'après le principe de symétrie (n° 42) la fonction harmonique $\frac{\partial u}{\partial y}$ admet un prolongement analytique à travers l'ensemble des segments (b_k, a_{k+1}), par conséquent, la fonction u admet aussi un tel prolongement. La fonction prolongée u s'avère donc bornée et harmonique à l'extérieur de l'ensemble des segments (a_k, b_k) et prend la valeur 0 sur ces segments. Ainsi, la fonction u résout le problème de Dirichlet pour le plan duquel on a retranché les segments (a_k, b_k), pour les valeurs frontières nulles. D'après le théorème d'unicité de la solution du problème de Dirichlet, $u \equiv 0$, ce qu'il fallait démontrer.

§ 4. APPLICATIONS

Nous considérons dans ce paragraphe les applications des méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe à certaines questions de la théorie des équations aux dérivées partielles ainsi qu'aux problèmes de la mécanique des milieux continus et à certains autres problèmes posés ci-dessus. On opère avec des exemples concrets pour illustrer des procédés employés et des procédés nouveaux.

56. Equations aux dérivées partielles. Ci-dessus nous avons étudié en détail le lien qui existe entre la théorie des fonctions de la variable complexe et l'équation de Laplace. Cette direction classique dans la théorie des fonctions remonte aux travaux d'Euler et surtout à ceux de Riemann. Cependant, ces derniers temps une attention particulière est portée aux liens qui existent entre la théorie des fonctions et d'autres équations aux dérivées partielles. Le présent numéro étudie certains de ces liens parmi les plus simples.

1) Système de Carleman. Dans la théorie des équations aux dérivées partielles on utilise avec succès, ces dernières années, des méthodes basées sur la représentation de la solution

sous la forme complexe. Ces méthodes ont été principalement développées dans les travaux de *I. Vékoua*, *L. Bers* et *S. Bergman*. Comme exemple nous donnerons avec Vékoua une telle représentation pour un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv, \tag{1}$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues des variables x et y dans un domaine D.

Le système (1) est une généralisation des conditions de Cauchy-Riemann (pour $a=b=c=d=0$ nous retrouvons ces conditions); certains problèmes de la théorie des enveloppes élastiques, de la dynamique des gaz et d'autres chapitres de la mécanique des milieux continus s'y ramènent. Ce système a été pour la première fois considéré par *Torsten Carleman* (1892-1949) qui a démontré un théorème d'unicité de la solution, analogue au théorème 1 du n° 20. *Vékoua* a fait une étude détaillée du système (1) et de ses applications [15]. Pour plus de simplicité, nous supposerons partout dans la suite que les fontions u et v possèdent dans le domaine D des dérivées partielles continues. Pour établir les formules de représentation, il est commode d'user des opérateurs de la dérivation complexe

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Par exemple, le premier d'entre eux appliqué à une fonction complexe $w = u + iv$ donne:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial (u+iv)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) i.$$

En particulier, les conditions d'analyticité de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$.

Donnons d'abord la formule de représentation d'une fonction quelconque $w(z) = u + iv$ possédant dans un domaine D des dérivées partielles premières continues. Pour cela nous avons recours à la formule de Riemann-Green qui à l'aide des symboles (2) s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{2i}\int_C w(\zeta)\, d\zeta = \iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}}\, d\xi\, d\eta, \tag{3}$$

où $\zeta = \xi + i\eta$ et C est la frontière de D. Pour les fonctions analytiques $\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} \equiv 0$ et la formule (3) exprime évidemment le théorème de Cauchy.

Ensuite, agissant exactement comme pour établir la formule intégrale de Cauchy (n° 14) à partir du théorème de Cauchy, retran-

chons du domaine D le voisinage d d'un point fixe z de frontière la circonférence c de petit rayon. Appliquons au domaine $D \setminus d$ et à la fonction $\frac{w(\zeta)}{\zeta - z}$ la formule (3); nous trouvons:

$$\frac{1}{2i}\int_C \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2i}\int_c \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \iint_{D \setminus d} \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z}.$$

Faisant tendre le rayon du voisinage vers zéro, nous voyons, comme au n° 14, que la limite de l'intégrale $\int_c \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ est égale à $2\pi i w(z)$ et, par conséquent, nous obtenons la *formule de représentation* que nous cherchions:

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z}. \tag{4}$$

Pour les fonctions analytiques l'intégrale double disparaît et nous retrouvons la formule intégrale de Cauchy.

Appliquons cette formule aux solutions du système (1) de Carleman. A l'aide des dérivées complexes (2) ce système s'écrit sous la forme d'une équation complexe:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w}, \tag{5}$$

où $w = u + iv$, $A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib)$ et $B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib)$. Ainsi, la formule (4) donne la *représentation complexe des solutions du système* (1):

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\zeta)\,w(\zeta) + B(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta. \tag{6}$$

Donnons une formule plus commode de représentation complexe des solutions du système (5) de Carleman. Soit $w = w(z)$ une solution quelconque de ce système et soit N l'ensemble des points de D en lesquels $w = 0$; désignons par M l'ensemble $D \setminus N$. Posons

$$\chi(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\,\dfrac{\overline{w(z)}}{w(z)} & \text{lorsque } z \text{ appartient à } M, \\ 0 & \text{lorsque } z \text{ appartient à } N; \end{cases}$$

la fonction $\chi(z)$ est continue séparément sur M et sur N et est évidemment bornée, car pour tout point z de D nous avons $|\chi(z)| \leqslant |A(z)| + |B(z)|$. Ainsi, la fonction $\chi(z)$ est intégrable dans

le domaine D, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\chi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z} \tag{7}$$

a un sens.

Il est aisé de vérifier (cf. n° 16) que la fonction $\omega(z)$ est analytique à l'extérieur du domaine fermé $\overline{D}$ et que $\omega(\infty) = 0$. Démontrons qu'en point de continuité z de la fonction $\chi(z)$ la dérivée complexe

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = -\chi(z) \tag{8}$$

existe. En effet, dégageons le voisinage d du point z limité par le contour c et représentons $\omega(z)$ sous la forme d'une somme de deux fonctions $\omega_1(z)$ et $\omega_2(z)$ continues dans tout le plan :

$$\omega_1(z) = \frac{1}{\pi} \iint_d \frac{\chi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \quad \omega_2(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{D \setminus d} \frac{\chi(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}.$$

La fonction $\omega_1(z)$ est analytique à l'extérieur de d, la fonction $\omega_2(z)$ dans d, donc

$$\frac{1}{2i} \int_c \omega(z)\, dz = \frac{1}{2i} \int_c \omega_1(z)\, dz + \frac{1}{2i} \int_c \omega_2(z)\, dz = \frac{1}{2i} \int_L \omega_1(z)\, dz,$$

où L est une circonférence de rayon suffisamment grand contenant D (nous avons utilisé le théorème de Cauchy d'après lequel la première intégrale, qui se trouve après le premier signe d'égalité, peut être remplacée par une intégrale prise le long de L et la deuxième est nulle). Remplaçant $\omega_1(z)$ par son expression et en intervertissant l'ordre d'intégration, nous trouvons :

$$\frac{1}{2i} \int_c \omega(z)\, dz = -\frac{1}{2\pi i} \iint_d \chi(\zeta)\, d\xi\, d\eta \int_L \frac{dz}{z - \zeta} = -\iint_d \chi(\zeta)\, d\xi\, d\eta.$$

Si l'on divise les deux membres de cette égalité par l'aire s du domaine d et si l'on utilise la relation limite

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \lim_{d \to z} \frac{1}{2is} \int_c \omega(z)\, dz,$$

qui découle de la formule (3) d'après le théorème de la moyenne, alors, à la limite, lorsque $d \to z$, nous obtenons la formule (8) cherchée.

Considérons maintenant la fonction

$$\varphi(z) = w(z)\, e^{\omega(z)} \tag{9}$$

qui évidemment est continue dans D. Si z appartient à l'ensemble M, alors, appliquant les règles de dérivation complexe du produit de

deux fonctions et de la fonction exponentielle (qui se vérifient facilement), nous trouvons :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = e^{\omega(z)} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + w \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \right) = e^{\omega(z)} (Aw + B\bar{w} - w\chi) \equiv 0 ;$$

ainsi la fonction $\varphi(z)$ est analytique sur l'ensemble M. On voit facilement qu'elle est aussi analytique sur l'ensemble N. En effet, la fonction $w(z)$ est analytique en chaque point en lequel elle est nulle, car en de tels points, conformément à l'équation (5), on a $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$; donc pour chaque point z_0 de N le rapport

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = \frac{w(z)}{z - z_0} e^{\omega(z)}$$

a une limite, lorsque $z \to z_0$, égale à $w'(z_0)\, e^{\omega(z_0)}$, c'est-à-dire que $\varphi(z)$ est dérivable au point z_0.

Ainsi, la fonction $\varphi(z)$ est analytique partout dans le domaine D. Remarquons enfin que, conformément à la formule (9), les zéros de $w(z)$ coïncident avec ceux de $\varphi(z)$ et, d'après le théorème d'unicité (n° 20), l'ensemble N de ces zéros ne peut avoir de points limites à l'intérieur de D. Par conséquent, cet ensemble n'influe pas sur l'intégrale de la formule (7) et cette formule peut être écrite sous la forme

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)\, w(\zeta) + B(\zeta)\, \overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)\,(\zeta - z)}\, d\xi\, d\eta.$$

La formule (9) donne maintenant la *représentation complexe cherchée des solutions d'un système de Carleman à l'aide des fonctions analytiques* $\varphi(z)$:

$$w(z) = \varphi(z) \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)\, w(\zeta) + B(\zeta)\, \overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)\,(\zeta - z)}\, d\xi\, d\eta \right\} (*). \qquad (10)$$

Cette formule a été obtenue par *I. Vékoua* et, indépendemment de lui, par *L. Bers* (avec des conditions plus restrictives). Il en découle qu'en ce qui concerne les zéros et les pôles, les solutions d'un système de Carleman se comportent de la même manière que les fonctions analytiques : le théorème sur les zéros du n° 20 s'étend à ces solutions (ce que nous avons déjà remarqué plus haut), ainsi que le principe de l'argument, le théorème de Rouché (n° 23) et d'autres théorèmes. Remarquons cependant que les propriétés géométriques des solutions d'un système de Carleman diffèrent essentiellement des propriétés des fonctions analytiques (**).

(*) Le symbole exp a désigne e^a.

(**) Cf. *Б. В. Шабат*, «Об отображениях, осуществляемых решениями системы Карлемана», Успехи матем. наук, т. XI, вып. 3 (69), 1956, 203—206.

2) Systèmes linéaires elliptiques. Considérons un champ électrostatique de révolution dont les vecteurs se trouvent dans des demi-plans passant par un axe (que nous prenons pour axe des z) et ne dépendent que de la distance r à cet axe et de la coordonnée z le long de celui-ci. Evidemment ce champ est complètement décrit par un champ plan qui se trouve dans le plan des coordonnées cartésiennes (r, z), mais ses équations diffèrent des équations données au n° 47. En effet, ayant recours aux expressions connues de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques et désignant par E_r et E_z les coordonnées correspondantes du vecteur champ électrique $\mathbf{E}$, nous écrivons les conditions d'absence de charges, le champ étant un champ irrotationnel, sous la forme:

$$\frac{\partial (rE_z)}{\partial z} + \frac{\partial (rE_r)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial r}. \tag{11}$$

De la même manière qu'aux n^{os} 46 et 47 nous concluons de ces conditions qu'il existe deux fonctions $u(r, z)$ et $v(r, z)$ pour lesquelles

$$rE_z = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad rE_r = -\frac{\partial v}{\partial z}; \quad E_r = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

et qui sont, par conséquent, liées par les relations

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad -r\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r}. \tag{12}$$

Ces fonctions décrivent complètement le champ de révolution.

Les équations (12) sont un cas particulier d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre du type elliptique

$$\left.\begin{aligned} v_y &= au_x + bu_y, \\ -v_x &= du_x + cu_y, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

où a, b, c, d sont des fonctions données des variables x et y satisfaisant partout dans le domaine considéré D à la *condition d'ellipticité*:

$$A = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0 \tag{14}$$

(pour simplifier l'écriture, nous écrirons u_x, . . . au lieu de $\frac{\partial u}{\partial x}$, . . .).

Certains problèmes de la dynamique des gaz, de la théorie de la plasticité, de la théorie de la flexion des surfaces et autres se ramènent également à ces systèmes. Ils ont été étudiés dans les travaux de *I. Vékoua*, *L. Bers*, *G. Polojy*, *B. Boïarski* et d'autres auteurs, qui ont établi une série de propriétés apparentant les solutions de ces systèmes aux fonctions analytiques. La théorie des solutions des systèmes linéaires est la partie la plus simple de la théorie générale

des représentations quasi conformes (*). Il a été démontré dans les travaux des auteurs cités que le théorème d'existence des transformations, généralisant le théorème de Riemann (n° 28), est vrai pour les systèmes (13) et que les solutions de ces systèmes possèdent toute une série de propriétés géométriques entièrement analogues

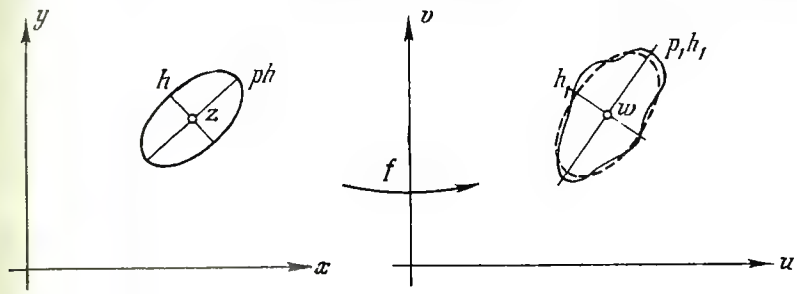

FIG. 126

aux propriétés des représentations conformes. N'ayant pas la possibilité de donner dans ce livre une étude détaillée de ces résultats (**), nous ne donnons que quelques propositions simples.

On peut démontrer (***) que le système (13) exprime géométriquement la condition de transformation des ellipses infiniment petites du plan des $z = x + iy$ de la famille

$$\gamma\,(X - x)^2 - 2\beta\,(X - x)\,(Y - y) + \alpha\,(Y - y)^2 = ph^2, \quad (15)$$

aux infiniment petits d'ordre supérieur près, en des ellipses du plan des $w = u + iv$:

$$\gamma_1\,(U - u)^2 - 2\beta_1\,(U - u)\,(V - v) + \alpha_1\,(V - v)^2 = p_1h_1^2, \quad (15')$$

(fig. 126), de plus les coefficients des équations des ellipses sont déterminés par les coefficients du système (13) d'après les formules:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{\sqrt{A}}, \quad \beta = \frac{b+d}{2\sqrt{A}}, \quad \gamma = \frac{c}{\sqrt{A}}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \beta_1 = \frac{b-d}{2\sqrt{A}}, \quad \gamma_1 = \frac{b}{\sqrt{A}} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

(*) Cf. *М. А. Лаврентьев*, «Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей», Матем. сб. 21 (63) (1947), 285-320, et «Основная задача теории квазиконформных отображений плоских областей», Изв. АН СССР, сер. матем., 12 (1948), 513-554, ainsi que [16].

(**) Le lecteur pourra trouver dans le livre de *L. Volkovyski* [17] l'exposé d une série de résultats de la théorie linéaire des représentations quasi conformes.

(***) Cf. *Б. В. Шабат*, «Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных», Матем. сб., 17 (59) (1949), 193-210 ou *L. Volkovyski* [17].

(p, $p_1 \geqslant 1$ sont les rapports des demi-axes, h, h_1 les demi petits axes des ellipses $\alpha\gamma - \beta^2 \equiv 1$, $\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2 \equiv 1$, $B = ac - bd \geqslant \geqslant A > 0$) et, par conséquent, sont des fonctions données du point z. Nous formons la fonction de la variable complexe $f(z) = u + iv$ à l'aide des solutions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ du système (13) et la transformation qu'elle réalise est appelée *transformation quasi conforme associée à ce système.* En particulier, lorsque les ellipses (15) et (15′) représentent des circonférences, c'est-à-dire $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$ et $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, il est facile de voir que le système (13) devient (avec la condition supplémentaire de conservation de l'orientation; comparer avec le n° 27) le système de Cauchy-Riemann, c'est-à-dire que les transformations quasi conformes deviennent des transformations conformes (*).

On peut trouver pour les solutions du système (13) des formules généralisant le théorème de Cauchy (n° 12) et la formule intégrale de Cauchy (n° 14) (**). Pour la démonstration écrivons le système (13) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} L[u, v] &= au_x + bu_y - v_y = 0, \\ M[u, v] &= du_x + cu_y + v_x = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

et utilisons la formule de Green connue en analyse qui, pour le système considéré, s'écrit sous la forme:

$$\int_C \{u^*v - (bu^* + cv^*)u\}\,dx + \{(au^* + dv^*)u + v^*v\}\,dy =$$

$$= \iint_D \{u^*L[u, v] + v^*M[u, v] + u\widetilde{L}[u^*, v^*] +$$

$$+ v\widetilde{M}[u^*, v^*]\}\,dx\,dy, \qquad (17)$$

où C est la frontière du domaine D et

$$\widetilde{L}[u, v] = (au + dv)_x + (bu + cv)_y,$$

$$\widetilde{M}[u, v] = v_x - v_y$$

(cette formule est vraie pour tout ensemble de quatre fonctions u, v, u^*, v^* qui possèdent des dérivées partielles continues et on l'obtient par intégration par parties de la même manière que la formule usuelle de Riemann-Green).

Si l'on suppose que les dérivées partielles secondes sont continues, on peut alors exclure la fonction v du système (13) de manière

(*) Comparer avec le caractère circulaire des transformations conformes (n° 27).

(**) Cf. *Б. В. Шабат*, «Теорема и формула Коши для квазиконформных отображений линейных классов», ДАН СССР, 49:3 (1949), 305-308. Dans un cas particulier ces résultats avaient déjà été obtenus par *G. Polojy*.

qu'il se ramène à une équation du second ordre

$$\Lambda [u] = (au_x + bu_y)_x + (du_x + cu_y)_y = 0 \qquad (18)$$

(nous utilisons la condition d'égalité des dérivées croisées v_{xy} et v_{yx}). Considérons également l'équation conjuguée de (18)

$$\Lambda^* [X] = (aX_x + dX_y)_x + (bX_x + cX_y)_y = 0. \qquad (19)$$

Pour chaque solution $X(x, y)$ il existe évidemment une fonction $Y(x, y)$ liée à X par les équations

$$\left.\begin{aligned} L^* [X, Y] &= aX_x + dX_y - Y_y = 0, \\ M^* [X, Y] &= bX_x + cX_y + Y_x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Puisque ce système ne diffère de (13) que par la permutation de b et d, les ellipses qui lui sont associées coïncident dans le plan des z avec les ellipses qui sont associées au système (13) et dans le plan des w on les obtient à partir de celles-ci par une transformation de symétrie par rapport à l'axe des u (changement de signe de β_1) ; pour $b = d$ les ellipses coïncident.

Utilisons maintenant la formule de Green (17) en supposant que u et v sont des solutions du système (13) et en posant $u^* = X_x$, $v^* = X_y$, où X et Y sont des solutions du système (20) ; nous trouvons

$$\int_C v\,dX + u\,dY = 0. \qquad (21)$$

Nous résolvons ensuite le système (13) par rapport à u_y et u_x :

$$\begin{aligned} L_1 [u, v] &= -a_1 v_x - d_1 v_y - u_y = 0, \\ M_1 [u, v] &= -b_1 v_x - c_1 v_y + u_x = 0 \end{aligned}$$

$\left(\text{ici } a_1 = \frac{a}{B}, \ldots, d_1 = \frac{d}{B}\right)$. Pour ce système, la formule (17), dans laquelle u est remplacé par v, v par u et les coefficients $a, \ldots, d$ par $-a_1, \ldots, -b_1$, est valable. Pour chaque solution de l'équation

$$\Lambda_1^* [X^1] = -(a_1 X_x^1 + b_1 X_y^1)_x - (d_1 X_x^1 + c_1 X_y^1)_y = 0 \qquad (19_1)$$

il existe une fonction Y^1 liée à cette dernière par les équations

$$\left.\begin{aligned} L_1^* [X^1, Y^1] &= a_1 X_x^1 + b_1 X_y^1 - Y_y^1 = 0, \\ M_1^* [X^1, Y^1] &= d_1 X_x^1 + c_1 X_y^1 + Y_x^1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20_1)$$

Les ellipses associées à ce système coïncident dans le plan des z avec les ellipses associées au système (13) et dans le plan des w on les obtient de ces dernières par une transformation de symétrie par rapport à la bissectrice du premier quadrant ; pour $B = 1$ ces

ellipses coïncident. A la place de la formule (21) nous avons:

$$\int_C u\,dX^1 - v\,dY^1 = 0. \tag{21_1}$$

Introduisons enfin les variables complexes $Z = X + iY^1$, $Z^* = X^1 + iY$; alors les formules (21) et (21_1) peuvent être réunies en une même formule

$$\int_C u\,dZ^* + iv\,dZ = 0 \tag{22}$$

qui exprime précisément le *théorème généralisé de Cauchy.*

Si en particulier les ellipses dans le plan des w sont des circonférences ($b = d$, $B = ac - b^2 = 1$), alors les systèmes (20) et (20_1) coïncident. Donc, dans ce cas on peut prendre $Z^* = Z$ et la formule (22) se simplifie:

$$\int_C f(z)\,dZ = 0.$$

Si de plus les ellipses dans le plan des z sont des circonférences (système de Cauchy-Riemann), on peut alors prendre $Z = z$ et nous retrouvons le théorème classique de Cauchy.

Pour obtenir la formule généralisée de Cauchy, introduisons la «distance» associée au système (13)

$$\rho(z, z_0) =$$

$$= \sqrt{c_0 (x - x_0)^2 - (b_0 + d_0)(x - x_0)(y - y_0) + a_0 (y - y_0)^2},$$

où $a_0, \ldots, d_0$ sont les valeurs des coefficients au point z_0 et au lieu de X nous allons considérer la solution de l'équation (19) qui possède au point fixe z_0 du domaine D une singularité du type $\ln \rho(z, z_0)$:

$$\Gamma(z, z_0) = \gamma'(z, z_0) \ln \rho(z, z_0) + \gamma''(z, z_0)$$

(γ' et γ'' sont des fonctions continues) et la fonction «conjuguée»

$$H(z, z_0) = \int^z -(b\Gamma_x + c\Gamma_y)\,dx + (a\Gamma_x + d\Gamma_y)\,dy.$$

En vertu de (19), cette intégrale ne varie pas pour une déformation continue du chemin d'intégration si de plus il ne passe pas par le point z_0. Lorsqu'on décrit un contour autour du point z_0

(une fois dans le sens positif), H subit l'accroissement (*)

$$\lim_{h\to 0} \int_{\rho(z,\, z_0)=h} -(b\Gamma_x + c\Gamma_y)\,dx + (a\Gamma_x + d\Gamma_y)\,dy =$$

$$= A(z_0)\,\gamma'(z_0,\, z_0) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a_0 \sin^2 t - (b_0 + d_0)\sin t \cos t + c_0 \cos^2 t} =$$

$$= 2\pi\gamma'(z_0,\, z_0)\sqrt{A(z_0)}, \qquad (23)$$

qui est égal à 2π si l'on prend $\gamma'(z_0,\, z_0) = 1/\sqrt{A(z_0)}$. Ainsi, la fonction multiforme $H(z,\, z_0)$ possède au point z_0 une singularité du même type que $\operatorname{Arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$.

Appliquant la formule (17), dans laquelle on fait $u^* = \Gamma_x$, $v^* = \Gamma_y$ et u et v sont des solutions de (13), au domaine D duquel on a retranché l'ellipse $\rho(z,\, z_0) \leqslant h$, nous obtenons :

$$\int_C v\,d\Gamma + u\,dH = \int_{\rho(z,\, z_0)=h} v\,d\Gamma + u\,dH. \qquad (24)$$

Puisque $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_{\rho=h} v\,d\Gamma = 0$ et, en vertu de (23), $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_{\rho=h} u\,dH = 2\pi u(z_0)$, nous obtenons de (24) à la limite, lorsque $h \to 0$,

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C v(z)\,d_z\Gamma(z,\, z_0) + u(z)\,d_z H(z,\, z_0). \qquad (25)$$

On construit d'une manière analogue la solution de l'équation (19_1) de singularité du type logarithmique, en passant au système (20_1) :

$$\Gamma^1(z,\, z_0) = \gamma_1'(z,\, z_0) \ln \rho(z,\, z_0) + \gamma_1''(z,\, z_0)$$

et la fonction multiforme

$$H^1(z,\, z_0) = \int^z -(d_1\Gamma_x' + c_1\Gamma_y')\,dx + (a_1\Gamma_x' + b_1\Gamma_y')\,dy,$$

dont l'accroissement pour un contour décrit autour de z_0 est égal à 2π si on prend $\gamma_1'(z_0,\, z_0) = B(z_0)/\sqrt{A(z_0)}$.

(*) Pour obtenir (23) il suffit de remarquer que lorsqu'on calcule la limite de l'intégrale, on peut remplacer dans cette dernière $a, \ldots, d, \gamma'$ et γ'' par les valeurs $a_0, \ldots, d_0, \gamma'(z_0,\, z_0)$ et $\gamma''(z_0,\, z_0)$; on introduit alors le paramètre t au moyen des formules

$$x - x_0 = \frac{h\cos t}{\sqrt{c_0\cos^2 t - (b_0 + d_0)\sin t\cos t + a_0 \sin^2 t}};$$

$$y - y_0 = \frac{h\sin t}{\sqrt{c_0\cos^2 t - (b_0 + d_0)\sin t\cos t + a_0 \sin^2 t}}.$$

L'intégrale ainsi obtenue se calcule d'une manière élémentaire.

Alors on a à la place de (25):

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C v(z)\, d_z H^1(z, z_0) - u(z)\, d_z \Gamma^1(z, z_0). \qquad (25_1)$$

Introduisant les fonctions complexes

$$l(z, z_0) = \Gamma(z, z_0) + iH^1(z, z_0),$$
$$l^*(z, z_0) = \Gamma^1(z, z_0) + iH(z, z_0),$$

nous réunissons (25) et (25_1) en une même formule

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(z)\, d_z l^*(z, z_0) + iv(z)\, d_z l(z, z_0), \qquad (26)$$

qui précisément généralise la *formule de Cauchy*.

Si les ellipses dans le plan des w sont des circonférences, on peut alors prendre $l^* = l$ et la formule (26) se simplifie:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, d_z l(z, z_0).$$

Enfin, pour le système de Cauchy-Riemann on peut poser $l = \ln(z - z_0)$ et nous retrouvons la formule classique de Cauchy.

Pour terminer donnons encore une propriété élémentaire du système (13). Si l'on introduit les «accroissements» correspondant au système

$$\widetilde{\Delta} z = \sqrt{c}\,\Delta x - \frac{b+d}{2\sqrt{c}}\Delta y + i\sqrt{\frac{A}{c}}\,\Delta y,$$

$$\widetilde{\Delta} w = \sqrt{B}\Delta u - \frac{b-d}{2\sqrt{B}}\Delta v + i\sqrt{\frac{A}{B}}\,\Delta v,$$

alors il est facile de montrer que ce système exprime les *conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la « dérivée »*

$$\widetilde{f}'(\widetilde{z}) = \lim_{\widetilde{\Delta} z \to 0} \frac{\widetilde{\Delta} w}{\widetilde{\Delta} z} = \frac{1}{\sqrt{c}} \left\{ \sqrt{B}\, u_x - \frac{b-d}{2\sqrt{B}} v_x + i\sqrt{\frac{A}{B}}\, v_x \right\}, \qquad (27)$$

où la limite ne dépend pas de la manière dont $\widetilde{\Delta} z$ tend vers zéro. Cette propriété généralise le théorème du n° 5 d'après lequel le système de Cauchy-Riemann donne les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la dérivée ordinaire — dans le cas particulier de $a = c = 1$, $b = d = 0$ la « dérivée » (27) coïncide avec la dérivée ordinaire.

3) P r o b l è m e d e T r i c o m i. On appelle équations différentielles du *type mixte* des équations aux dérivées partielles du second ordre qui, dans une partie du domaine dans lequel elles sont données, sont du type elliptique et dans une autre partie du type

hyperbolique. L'étude de ces équations est d'un très grand intérêt en aérodynamique des grandes vitesses car le changement de type de l'équation correspond, du point de vue de la physique, à la transition de la vitesse du mouvement à des vitesses supersoniques. L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{28}$$

où $\theta(y) = 1$ pour $y > 0$ et $\theta(y) = -1$ pour $y < 0$, est une équation du type mixte simple (ainsi, l'équation (28) est du type elliptique dans le demi-plan supérieur et du type hyperbolique dans le demi-plan inférieur). Le *problème de Tricomi* (*) pour une telle équation dans un domaine D, dont la frontière est formée par une courbe C appartenant au demi-plan supérieur et s'appuyant sur le segment (0, 1) et par les segments de droite L et L_1 des directions caractéristiques de l'équation qui sont parallèles aux bissectrices des quadrants (fig. 127), se pose de la manière suivante :

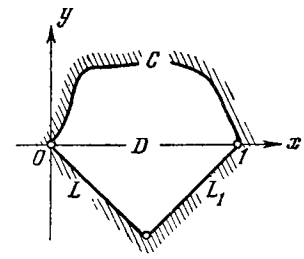

FIG. 127

Déterminer une fonction $u(x, y)$ continue sur le domaine fermé $\overline{D}$, qui vérifie l'équation (28) *pour $y \neq 0$, possède des dérivées partielles premières continues partout dans D, sauf aux points $z = 0$, $z = 1$ en lesquels elles peuvent devenir infinies d'ordre inférieur à 1, et prend sur les courbes C et L des valeurs données* :

$$u = \begin{cases} \varphi(\zeta) & \text{sur } C, \\ \psi(x) & \text{sur } L \end{cases} \qquad (\varphi(0) = \psi(0)). \tag{29}$$

Nous donnons une solution simple et élégante du problème due à *A. Bitsadzé* (1950). A l'aide d'une représentation conforme de la partie elliptique D_1 du domaine D le problème se ramène au cas particulier où cette partie est le demi-cercle supérieur $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, $y > 0$. De plus, on peut supposer que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Dans la partie hyperbolique D_2 du domaine D, où l'équation (28) est de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

(*) *F. Tricomi* a le premier posé et résolu le problème qui porte son nom pour l'équation

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

la solution $u(x, y)$, comme on le sait, peut être représentée sous la forme

$$u = \Phi(x + y) + \Psi(x - y),$$

où Φ et Ψ sont des fonctions arbitraires (cf. I. Petrovsky [1]). Nous avons $x + y = 0$ sur L. Donc, en substituant cette expression de u dans la deuxième condition (29), nous trouvons:

$$\Phi(0) + \Psi(2x) = \psi(x)$$

et, par conséquent, notre expression prend la forme

$$u(x, y) = \Phi(x+y) - \Phi(0) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{30}$$

De la condition de continuité de la fonction $u(x, y)$ nous obtenons que sur l'axe des x

$$u(x, 0) = \Phi(x) - \Phi(0) + \psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{30'}$$

Dans la partie elliptique D_1, la fonction $u(x, y)$ est harmonique; soit $v(x, y)$ la fonction harmonique dans D_1, conjuguée de $u(x, y)$ et nulle au point (0, 0). Comme il découle de l'expression (30), dans D_2 nous avons:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi'(x+y) - \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

d'où, d'après la continuité de $\frac{\partial u}{\partial y}$ sur l'axe des x, nous trouvons:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\Phi'(x) + \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x}{2}\right).$$

Intégrant, il vient sur l'axe des x

$$v(x, 0) = -\Phi(x) + \Phi(0) + \psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

et additionnant cette dernière avec l'expression qui donne $u(x, 0)$, nous obtenons

$$u(x, 0) + v(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{31}$$

Posons maintenant

$$u = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

où les fonctions u_1 et u_2 sont respectivement les solutions des problèmes aux limites

$$u_1 = \begin{cases} \varphi(\zeta) & \text{sur } C, \\ 0 & \text{sur } L; \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} 0 & \text{sur } C, \\ \psi(x) & \text{sur } L. \end{cases} \tag{32}$$

Pour la première de ces fonctions, en vertu de la relation (31) sur le segment (0, 1), nous obtenons:

$$u_1(x, 0) + v_1(x, 0) = 0,$$

mais cela signifie que la fonction analytique

$$f(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$$

transforme le segment (0, 1) sur un segment de droite $u_1 + v_1 = 0$ et, par conséquent, d'après le principe de symétrie, elle est prolongeable à travers le segment (0, 1). On a de plus aux points du demi-cercle inférieur :

$$f_1(z) = -v_1(x, -y) - iu_1(x, -y), \tag{33}$$

puisque la symétrie par rapport à la deuxième bissectrice se ramène au remplacement de u_1 par v_1, de v_1 par u_1 et au changement de signe des deux coordonnées. Ainsi, la fonction $f_1(z)$ (avec son prolongement) est analytique dans le cercle $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, de plus, en vertu des conditions (32), sur la demi-circonférence supérieure C est connue sa partie réelle $\operatorname{Re} f_1(\zeta) = \varphi(\zeta)$ et sur la demi-circonférence inférieure C^*, en vertu de la relation (33), sa partie imaginaire $\operatorname{Im} f_1(\zeta) = -\varphi(\bar{\zeta})$. Ainsi, la fonction $f_1(z)$ est reconstituée d'après la formule (15) de Keldych-Sédov (n° 54) qui, pour le cas considéré, prend la forme (*)

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i}\left\{\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\,\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - i\int_{C^*} \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\,\frac{\varphi(\bar{\zeta})\,d\zeta}{\zeta - z}\right\}. \tag{34}$$

Remplaçons dans la deuxième intégrale la variable ζ par $\bar{\omega}$, nous obtenons :

$$-i\int_{C^*} = i\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\bar{\omega}(1-\bar{\omega})}}\,\frac{\varphi(\omega)}{\bar{\omega} - z}\,d\bar{\omega}.$$

Posons $\arg \omega = t$; puisque sur C nous avons $\omega = e^{it}\cdot\cos t$, alors $\bar{\omega} = e^{-2it}\omega$. Mais $e^{2it} = 2\cos^2 t - 1 + 2i \sin t \cos t = 2\omega - 1$, par conséquent, $\bar{\omega} = \frac{\omega}{2\omega - 1}$. Substituant cette dernière dans l'intégrale précédente, nous trouvons :

$$-i\int_{C^*} = i\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\omega(1-\omega)}}\,\frac{\varphi(\omega)}{\omega - z(2\omega - 1)}\,d\omega.$$

Désignant la variable d'intégration de nouveau par ζ et réunissant l'intégrale obtenue à la première intégrale (34) nous trouvons :

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\left\{\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta + z - 2\zeta z}\right\}\varphi(\zeta)\,d\zeta. \tag{35}$$

(*) Nous prenons $a_1 = 0$, $b_1 = 1$; alors $g(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z}}$.

Considérons maintenant la fonction analytique

$$f_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y).$$

D'après le principe de symétrie, elle se prolonge à travers la demi-circonférence C dans tout le demi-plan supérieur, car, en vertu de la condition (32), $u_2 = 0$ sur C. Conformément à ce principe, aux points x et $\frac{x}{2x-1}$ de l'axe réel, symétriques par rapport à C, la fonction f_2 prend des valeurs symétriques par rapport à $u_2 = 0$, c'est-à-dire qui diffèrent par le signe de u_2:

$$f_2(x) = -u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + iv_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right).$$

Maintenant, tenons compte de ce qu'aux points du segment (0, 1) on connaît

$$\operatorname{Re}(1-i) f_2(x) = u_2(x, 0) + v_2(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

et qu'aux points des demi-droites $(-\infty, 0)$ et $(1, \infty)$ on a

$$\operatorname{Im}(1-i) f_2(x) = v_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) = 2\psi\left(\frac{x}{4x-2}\right).$$

Donc la fonction $(1-i) f_2(z)$ est reconstituée d'après la formule de Keldych-Sédov pour le demi-plan (cf. (6), n° 54). Après de simples transformations nous trouvons:

$$(1-i) f_2(z) = \frac{2}{\pi i} \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz}\right) \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt. \quad (36)$$

Il est clair que la fonction que nous cherchons est (*)

$$u(z) = \operatorname{Re}\{f_1(z) + f_2(z)\}, \quad (37)$$

où $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont données par les formules (35) et (36); on peut démontrer que la solution que nous venons de trouver est unique.

Se référer au travail de A. Bitsadzé [19] pour une étude détaillée de ce problème et d'autres problèmes se rapportant aux équations du type mixte (28).

57. Problèmes d'hydrodynamique et de dynamique des gaz. 1) A i l e m i n c e. Nous avons vu (n° 49) que le problème de l'écoulement autour d'un profil quelconque se ramène à celui de la

(*) Dans la partie elliptique D_1 ; dans la partie hyperbolique D_2, $u(x, y)$ est donnée par la relation

$$u(x, y) = u(x+y, 0) - \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

résultant de (30) et (30').

représentation conforme de l'extérieur de ce profil sur l'extérieur d'un cercle. Cependant, la construction pratique de cette représentation est souvent laborieuse, et c'est pourquoi on doit se contenter de solutions approchées de ce problème. Comme exemple d'une telle solution considérons celle donnée par *L. Sédov* (*) au problème de l'écoulement autour d'une aile mince.

Supposons que le contour d'une aile C soit donné par les équations $y = F_{\pm}(x)$, $-a \leqslant x \leqslant a$, et que ce contour diffère peu du segment $(-a, a)$ (fig. 128). Supposons que l'aile soit investie par un fluide

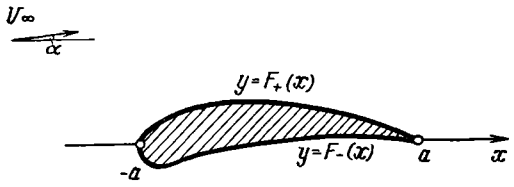

FIG. 128

animé d'un mouvement de translation de vitesse v_∞ à l'infini et faisant avec l'axe des x un petit angle d'attaque α. Le potentiel complexe est donc cherché sous la forme

$$\omega = v_\infty e^{-i\alpha} z + W, \tag{1}$$

où $W = U + iV$ est une fonction inconnue. Nous avons:

$$\operatorname{Im} \omega = v_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + V(x, y)$$

et, comme C coïncide avec une ligne de courant, sur cette dernière $\operatorname{Im} \omega$ a des valeurs constantes, à savoir nulles. Aussi sur C

$$v_\infty \{F_{\pm}(x) \cos \alpha - x \sin \alpha\} + V[x, F_{\pm}(x)] = 0.$$

Tenant compte de la supposition faite sur la proximité de C du segment $(-a, a)$ et sur la petitesse de l'angle α, nous remplaçons dans cette condition $\cos \alpha$ par 1, $\sin \alpha$ par α et écrivons la condition sur ce segment, substituant en particulier $V(x, 0)$ à $V[x, F_{\pm}(x)]$; nous obtenons des conditions sur les deux bords du segment:

$$V(x, 0) = v_\infty \{x\alpha - F_{\pm}(x)\}. \tag{2}$$

Puisque le potentiel complexe du champ peut être une fonction multiforme, il est donc plus commode de considérer sa dérivée $\frac{dW}{dz} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv$ qui est manifestement uniforme.

(*) *Л. И. Седов*, «Теория плоских движений идеальной жидкости», М., Оборонгиз, 1939; cf. aussi sa monographie [8].

Ainsi, le problème est ramené au problème suivant : *déterminer une fonction analytique à l'extérieur du segment* $(-a, a)$, *nulle à l'infini, dont la partie imaginaire* $v(x, y)$ *prend des valeurs données sur les bords supérieur et inférieur de ce segment* :

$$v = \frac{\partial V}{\partial x} = \begin{cases} v_\infty [\alpha - F'_+(x)] = v^+(x), \\ v_\infty [\alpha - F'_-(x)] = v^-(x). \end{cases} \tag{3}$$

Ce problème se résout par une méthode analogue à celle qui nous a permis d'établir la formule de Keldych-Sédov (n° 54). Posons

$$\frac{dW}{dz} = f_1(z) + f_2(z),$$

où $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont des fonctions analytiques à l'extérieur du segment $(-a, a)$, nulles à l'infini, dont les parties imaginaires vérifient respectivement les conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned} v_1^+ = -v_1^- = \frac{v^+ - v^-}{2}, \\ \text{et} \\ v_2^+ = v_2^- = \frac{v^+ + v^-}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Considérons ensuite la branche de la fonction $g(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}$ qui sur l'axe des x, pour $z = x > a$, prend des valeurs positives (évidemment cette branche est uniforme à l'extérieur du segment considéré). Sur les bords de la coupure cette fonction prend des valeurs purement imaginaires de signes différents :

$$g^+(x) = -g^-(x) = i\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \tag{5}$$

Construisons la circonférence L de centre à l'origine des coordonnées, de rayon R suffisamment grand et appliquons la formule intégrale de Cauchy au domaine doublement connexe de frontière cette circonférence et la courbe l qui contient à son intérieur le segment :

$$f_1(z)\, g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l \cup L} \frac{f_1(\zeta)\, g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{6}$$

Or, puisque pour $z \to \infty$, les fonctions $f_1(z) \to 0$ et $g(z) \to 1$, l'intégrale prise le long de L tend vers zéro lorsque $R \to \infty$. En vertu des conditions (4) et (5), le produit $vg(z)$ prend les mêmes valeurs sur les bords opposés de la coupure, donc les intégrales de cette fonction prises le long de ces bords se détruisent. Ainsi, lorsque $R \to \infty$ et l se réduit au segment, la formule (6) donne à la limite :

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{z-a}{z-a}} \int_{-a}^{a} \frac{u_1^+ + u_1^-}{\xi - z} \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\, d\xi. \tag{7}$$

On voit de cette formule que, sur l'axe réel, pour $|z| > a$, la fonction $f_1(z)$ prend des valeurs réelles. Il découle du principe de symétrie que les conditions de symétrie suivantes ont lieu :

$$u_1(x, -y) = u_1(x, y), \quad v_1(x, -y) = -v_1(x, y). \tag{8}$$

Appliquons maintenant la formule de Cauchy au même contour $L \cup l$ et à la fonction $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L \cup l} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

En vertu des conditions (8) et (4), lorsque $R \to \infty$ et l se réduit au segment $(-a, a)$, la formule précédente donne à la limite

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{v^+ - v^-}{\xi - z} d\xi. \tag{9}$$

D'une manière tout à fait analogue, appliquant la formule de Cauchy à la fonction $f_2(z)$, nous trouvons que sur l'axe réel, pour $|z| > a$, cette fonction prend des valeurs purement imaginaires et, par conséquent, les conditions de symétrie suivantes ont lieu :

$$u_2(x, -y) = -u_2(x, y), \; v_2(x, -y) = v_2(x, y). \tag{10}$$

Partant de la formule

$$f_2(z) \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L \cup l} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} \sqrt{\frac{\zeta - a}{\zeta + a}} d\zeta,$$

nous obtenons comme précédemment d'après les conditions (10) :

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \int_{-a}^{a} \frac{v^+ + v^-}{\xi - z} \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi. \tag{11}$$

Additionnant (9) et (11), nous trouvons la solution du problème sous la forme :

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{v^+ - v^-}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \int_{-a}^{a} \frac{v^+ + v^-}{\xi - z} \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi. \tag{12}$$

Cette formule donne la répartition approchée des vitesses d'un écoulement fluide autour d'une aile mince. On voit notamment que, dans le voisinage du point à l'infini, on a le développement

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma + iN}{2\pi i} \frac{1}{z} + \dots,$$

où

$$\Gamma = \int_{-a}^{a} (v^+ + v^-) \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi, \quad N = -\int_{-a}^{a} (v^+ - v^-) d\xi,$$

du point de vue physique, sont la circulation et le flux (*) calculés respectivement le long et à travers tout contour contenant l'aile à son intérieur (cf. n° 46).

La méthode se généralise au cas des valeurs frontières Im $\frac{dW}{dz}$ données sur les bords d'un système de segments (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, de l'axe réel.

2) Ecoulement d'un gaz autour d'un corps. Pour les grandes vitesses de vol des avions, qui sont comparables avec la vitesse du son, la compressibilité de l'air commence à avoir une influence essentielle. C'est pour cette raison que les méthodes d'hydrodynamique classique, pour laquelle le milieu est supposé incompressible, sont inapplicables et nous tombons dans le domaine de la dynamique des gaz.

Les équations fondamentales de l'hydrodynamique se compliquent essentiellement dans ce cas. L'*équation de continuité* div $\rho\mathbf{V} = 0$ (ρ est la densité du milieu), qui dans le cas d'un milieu incompressible se réduit à la condition div $\mathbf{V} = 0$ (cf. n° 46), s'écrit maintenant sous la forme

$$\operatorname{div} \rho\mathbf{V} = \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

(nous nous limitons à des écoulements plans permanents). Il découle de (13) l'existence de la *fonction de courant* $v = v(x, y)$ telle que

$$\rho V_x = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \rho V_y = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{14}$$

où ρ_0 est une constante.

La condition d'absence de tourbillons rot $\mathbf{V} = 0$, que nous imposons supplémentairement, s'écrit de la même manière qu'au numéro 46 et conduit à l'existence de la *fonction potentiel* $u = u(x, y)$ telle que

$$V_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{15}$$

Comparant (14) et (15) nous sommes conduits au système d'*équations de la dynamique des gaz*:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{16}$$

qui dans le cas d'un milieu incompressible $\rho = \rho_0$ se ramène au système de Cauchy-Riemann.

Le système (16) est incomplet car on ne sait pas comment varie la quantité ρ. Il faut ajouter à ce système les *équations du mouvement* qui, pour des suppositions supplémentaires d'après lesquelles la

(*) Il est facile de voir que dans les conditions admises $N = 0$.

densité ρ ne dépend que de la pression p (*condition d'isentropie*) et il n'y a pas de forces extérieures, ont la forme

$$\operatorname{grad} \frac{1}{2} V^2 = -\frac{a^2}{\rho} \operatorname{grad} \rho, \tag{17}$$

où $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ est la vitesse de propagation du son dans le milieu (*). L'équation (17) admet une intégrale (dite *intégrale de Bernoulli*)

$$\frac{1}{2} V^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}.$$

Supposons enfin que l'écoulement soit *adiabatique*, c'est-à-dire que

$$p = k\rho^{\varkappa}, \tag{18}$$

où k et $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ (rapport des capacités calorifiques) sont des constantes caractérisant le gaz. Pour ces suppositions $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k\varkappa}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa - 1} = \frac{1}{\varkappa - 1} a^2$, en outre la constante du second membre dans l'intégrale de Bernoulli peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{2} V_{\max}^2$, où $V_{\max}$ est la vitesse maximale possible correspondant à la valeur $a = 0$. Par conséquent, l'intégrale de Bernoulli prend la forme

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\varkappa - 1} a^2 = \frac{1}{2} V_{\max}^2. \tag{19}$$

Substituant $a^2 = k\varkappa\rho^{\varkappa - 1}$ nous trouvons de (19) $\rho^{\varkappa - 1} = \text{const} \times \left(1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)$ ou

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}, \tag{20}$$

où la constante ρ_0 est la valeur de la densité pour $V = 0$.

Ainsi, ρ dépend de $V = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$, c'est-à-dire que le système (16) *n'est pas linéaire*; c'est ce qui explique la complexité des problèmes de la dynamique des gaz.

On peut ramener le système (16) à une équation du deuxième ordre par rapport à la fonction u. Pour cela écrivons l'équation de continuité sous la forme

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{V} + (\mathbf{V}, \operatorname{grad} \rho) = 0. \tag{13}$$

(*) Cf., par exemple, *N. Kotchine* et *I. Kibel* [6], tome II, chapitre 1, pour l'établissement des équations (17) et d'autres relations.

Remplaçons maintenant $\mathbf{V}$ par grad u et substituons grad ρ tiré de l'équation (17); nous obtenons:

$$\Delta u - \frac{1}{2a^2}(\mathbf{V}, \operatorname{grad} V^2) = 0,$$

où $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ est l'opérateur de Laplace. Substituant $V^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ et développant le produit scalaire, nous obtenons l'équation cherchée

$$\left(1 - \frac{u_x^2}{a^2}\right) u_{xx} - \frac{2u_x u_y}{a^2} u_{xy} + \left(1 - \frac{u_y^2}{a^2}\right) u_{yy} = 0 \qquad (21)$$

(pour la commodité de la lecture, les indices désignent les dérivées partielles). Cette équation est une équation quasi linéaire aux dérivées partielles du deuxième ordre. Si on prend pour la vitesse du son $a = \infty$, elle coïncide alors avec l'équation de Laplace; pour les vitesses subsoniques ($V < a$), elle est du type elliptique, pour les vitesses supersoniques ($V > a$), elle est du type hyperbolique.

Donnons deux méthodes approchées de résolution des problèmes d'écoulement d'un gaz autour d'un profil.

3) La première méthode, celle de Janzen-Rayleigh, a été créée pendant la première guerre mondiale et concerne le cas où la vitesse d'écoulement est assez petite par rapport à la vitesse du son. Ecrivons l'équation (21) sous la forme

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2}(u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_x u_y + u_{yy}u_y^2) \qquad (22)$$

et prenons pour vitesse du fluide qui investit le profil $V_\infty = 1$. Alors l'intégrale de Bernoulli (19) donne une première fois $a_\infty^2 = \frac{\varkappa - 1}{2}(V_{\max}^2 - 1)$, une seconde fois

$$\frac{1}{a^2} = \frac{M_\infty^2}{1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_\infty^2 (u_x^2 + u_y^2 - 1)} = M_\infty^2 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_\infty^4 (u_x^2 + u_y^2 - 1) + \ldots,$$

où $M_\infty = \frac{1}{a_\infty}$. Si l'on substitue ce développement dans l'équation (22), alors cette dernière contiendra M_∞^2 comme paramètre. Ayant ceci en vue, nous cherchons la solution de l'équation (22) sous la forme de la série

$$u = u^0 + M_\infty^2 u^1 + M_\infty^4 u^2 + \ldots,$$

où $u^k = u^k(x, y)$ sont des fonctions inconnues.

Substituons cette série dans (22) et identifions les coefficients des mêmes puissances de M_∞^2 ; nous obtenons le système d'équations :

$$\left.\begin{aligned} &u^0_{xx}+u^0_{yy}=0,\\ &u^1_{xx}+u^1_{yy}=u^0_{xx}(u^0_x)^2+2u^0_{xy}u^0_xu^0_y+u^0_{yy}(u^0_y)^2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

La première d'entre elles est l'équation de Laplace et les autres les équations de Poisson $\Delta u^h = f_h(x, y)$ dont les seconds membres sont définis dès que l'on résout les équations précédentes (ces équations deviennent de plus en plus compliquées au fur et à mesure que leur numéro augmente). La condition aux limites est de la forme

$$\frac{\partial u^0}{\partial n}=\frac{\partial u^1}{\partial n}=\dots=0 \qquad \text{sur le profil}$$

et exprime la condition d'écoulement autour du profil.

La fonction $u^0(x, y)$ est le potentiel des vitesses de l'écoulement d'un fluide incompressible autour d'un profil. Nous la supposons connue et nous nous bornons à indiquer comment déterminer le premier terme correctif $u^1(x, y)$.

Pour cela représentons la fonction harmonique u^0 comme la partie réelle d'une fonction analytique $f(z)$: $u^0 = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$, d'où nous trouvons $u^0_x = \frac{1}{2}(f' + \overline{f}')$, $u^0_y = \frac{1}{2}(f' - \overline{f}')$, ... Nous représentons la fonction u^1 sous la forme $u^1 = F(z, \overline{z})$ et, usant des symboles de dérivation complexe $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ (cf. n° 56), nous trouvons

$$u^1_x=\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}, \quad u^1_y=i\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right), \dots$$

Substituant ces expressions dans la deuxième équation (23), nous représentons cette équation sous la forme complexe :

$$8\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial \overline{z}}=f''\overline{f}'^2+\overline{f}''f'^2. \tag{24}$$

Il est facile d'écrire la solution générale de l'équation (24) si l'on se rappelle que pour la fonction analytique f nous avons $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (cf. n° 56), et pour la fonction conjuguée $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$; donc, pour l'intégration par rapport à z, on peut supposer $\overline{f}$ constante et pour l'intégration par rapport à $\overline{z}$, f constante. En vertu de ce qui vient d'être dit, nous intégrons (24) d'abord par rapport à z puis par rapport à $\overline{z}$ et nous trouvons :

$$8u^1 = 8F = \overline{f}\,g + f\overline{g} + h + \overline{h}, \tag{25}$$

où $g = \int f'^2 dz$, $\overline{g} = \int \overline{f}'^2 d\overline{z}$ sont des fonctions connues, h et $\overline{h}$ des fonctions analytiques arbitraires respectivement de la variable z et $\overline{z}$, avec $\overline{h}(\overline{z}) = \overline{h(z)}$.

Ainsi la fonction $h + \overline{h}$ est harmonique; sa détermination se ramène à la résolution du problème de Neumann (cf. n° 44), car les valeurs frontières de sa dérivée normale sont définies par la condition aux limites $\frac{\partial u^1}{\partial n} = 0$.

La méthode de Janzen-Rayleigh a été appliquée et perfectionnée, pendant les années quarante, par de nombreux auteurs qui à l'aide des méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe ont résolu le problème d'écoulement d'un gaz autour des profils principaux.

4) La méthode de Tchaplyguine, la seconde méthode approchée de résolution du problème d'écoulements subsoniques des gaz autour des profils, est basée sur l'idée énoncée dans un travail classique de S. Tchaplyguine «Sur les jets gazeux» (1902) et consiste à remplacer la courbe adiabatique $p = k\rho^{\varkappa}$ $(\varkappa > 1)$ par l'hyperbole $p = a + \frac{b}{\rho}$, en outre, les constantes a et b sont choisies de manière que l'hyperbole soit tangente à la courbe adiabatique en un point quelconque. Ce procédé correspond au remplacement d'un gaz réel par un gaz fictif pour lequel $\varkappa = -1$, ce qui permet de simplifier énormément l'appareil mathématique.

Pour établir les équations nécessaires, introduisons le *plan de l'hodographe* (V_x, V_y) et dans ce dernier les coordonnées polaires V, θ (module de la vitesse et angle du vecteur vitesse avec l'axe des V_x). Alors nous avons $V_x = V\cos\theta$, $V_y = V\sin\theta$ et, en vertu du système (16), nous trouvons

$$du + i\frac{\rho_0}{\rho}dv = (V_x\,dx + V_y\,dy) + i(-V_y\,dx + V_x\,dy) = Ve^{-i\theta}\,dz,$$

où comme toujours $dz = dx + i\,dy$. Remplaçant du par $\frac{\partial u}{\partial V}dV + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta$ et, de la même manière, dv, nous trouvons

$$\frac{\partial z}{\partial V} = \frac{e^{i\theta}}{V}\left(\frac{\partial u}{\partial V} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial v}{\partial V}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{e^{i\theta}}{V}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right).$$

Egalons maintenant les dérivées croisées $\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\,\partial V}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial V\,\partial\theta}$; après simplification nous trouvons:

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial V} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial v}{\partial V}\right) = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + i\frac{d}{dV}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

La séparation des parties réelles et imaginaires nous donne les *équations de l'hodographe*

$$\frac{\partial u}{\partial V} = V \frac{d}{dV}\left(\frac{\rho_0}{\rho V}\right) \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\rho_0 V}{\rho} \frac{\partial v}{\partial V}, \tag{26}$$

qui sont *linéaires* par rapport à V et à θ (coordonnées polaires du vecteur vitesse). Les équations (26) ont été obtenues par *Tchaplyguine* qui, tenant compte de leur linéarité, a résolu toute une série de problèmes importants de la théorie des jets gazeux (*).

Pour $\varkappa = -1$ l'intégrale de Bernoulli (20) prend la forme $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, et la substituant dans les équations de l'hodographe (26), nous trouvons:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = V \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}} \frac{\partial v}{\partial V}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -V \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}} \frac{\partial u}{\partial V}.$$

Introduisons une fonction du module de la vitesse

$$W(V) = \int \frac{dV}{V \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{V_{\max} - \sqrt{V_{\max}^2 - V^2}}{V_{\max} + \sqrt{V_{\max}^2 - V^2}}; \tag{27}$$

puisque $\frac{\partial v}{\partial W} = \frac{\partial v}{\partial V} \cdot \frac{1}{W'} = \frac{\partial v}{\partial V} V \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}}$ et, d'une manière analogue, pour $\frac{\partial u}{\partial W}$, les dernières équations se mettent sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial W}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial W},$$

c'est-à-dire qu'elles coïncident avec les équations de Cauchy-Riemann.

Ainsi, $u + iv$, pour les suppositions faites, est une fonction analytique de $W - i\theta$, et toute fonction pareille définit un certain courant de gaz.

Cette circonstance permet de construire d'une manière efficace des classes très larges de courants de gaz et, en particulier, de ceux autour de certains profils.

Cependant, le problème de la détermination d'un courant de gaz autour d'un profil *donné* est, dans les termes des variables de l'hodographe W et θ, un problème aux limites non linéaire très difficile (cf. le renvoi de cette page). C'est pourquoi des méthodes

(*) Malheureusement, le passage au plan de l'hodographe qui donne un gain du point de vue de la linéarité des équations comporte une perte du point de vue des conditions aux limites — ces conditions dans le plan de l'hodographe ont en général une forme compliquée. C'est pour cette raison que la méthode de l'hodographe n'est pas universelle.

approchées ont été mises au point (*S. Khristianovitch*, *T. Karman* et *H. S. Tsien*) pour les calculs pratiques pendant les années quarante. Elles sont basées sur l'idée suivante : on construit un courant autour d'un profil « voisin » du profil donné et on donne la règle du calcul du courant autour d'un profil par rapport au courant autour d'un profil voisin (*).

58. Théorie des charges creuses. Ces dernières années, les méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe ont trouvé une nouvelle application inattendue dans la théorie de ce phénomène très intéressant qu'est la charge creuse.

Réalisons l'expérience suivante. Disposons des charges cylindriques de même hauteur (15 cm) et diamètre (4 cm) au-dessus d'une plaque d'acier de 20 cm d'épaisseur. Les charges *a*) et *b*) sont continues. Les autres possèdent une excavation conique, la concavité en regard avec la plaque ; en outre, pour les charges *e*) et *f*), les excavations sont revêtues de cônes en acier d'une épaisseur de 1,5 mm. Les charges *a*), *c*) et *e*) sont posées sur la plaque tandis que les autres se trouvent à une distance égale à 1,5 diamètre de la charge ; l'amorçage des charges se fait à partir de *A* (fig. 129). On a représenté sur la fig. 129 l'action de ces charges. Notons l'augmentation paradoxale de la perforation dans le cas *f*), lorsque l'excavation conique est revêtue d'une enveloppe en acier et que la charge est éloignée du cible.

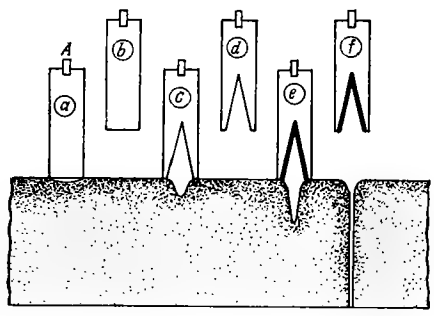

FIG. 129

L'effet de l'augmentation de l'action de perforation dans le cas d'une excavation (cas *c*)) avait été découvert dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle. Cependant, l'application de cet effet ne se limitait qu'à certains problèmes techniques de l'industrie minière. L'augmentation considérable de l'action de perforation en présence d'un revêtement métallique a été découverte plus tard et le premier brevet d'application de cet effet aux obus perforants remonte à 1914. Ce n'est que pendant la dernière guerre que cet effet a trouvé de nombreuses applications. C'est à cette même époque que remonte la création de la théorie de la charge creuse qui, la dernière décennie, a connu un grand développement dans de nombreux pays.

(*) Cf. *С. А. Христианович*, «Обтекание тел газами при больших дозвуковых скоростях», Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940, ainsi que [6], II, pp. 122-139.

1) Conditions physiques de la théorie. Avant d'énoncer les principales conditions de la théorie, notons quelques faits expérimentaux simples se rapportant à l'explosion et à sa portée.

Dans les expériences citées ci-dessus, on disposait des charges d'explosifs *brisants* (trinitrotoluène, hexogène, penthrite, etc.) qui sont caractérisés par les propriétés suivantes. Si, dans une petite zone de la substance se crée une pression suffisamment élevée (*amorçage*), alors une onde de transformation de cette substance, *onde de détonation*, commence à se propager à partir de cette zone. A l'avant du front d'une telle onde, nous trouvons une zone de repos et à l'arrière les produits de dissociation qui se trouvent soumis à une pression de l'ordre de 100 000 à 200 000 atmosphères ; la vitesse de propagation de l'onde est de l'ordre de 5 à 10 km/s. Dans les recherches théoriques l'épaisseur du front de l'onde de détonation est d'ordinaire négligée : les expériences montrent qu'en pratique elle est réellement petite si on la compare à d'autres dimensions caractéristiques. Notons que la théorie complète de la détonation a été créée il y a relativement peu de temps et, aujourd'hui, elle entre dans la partie de la dynamique des gaz consacrée aux mouvements discontinus (cf. [6] II^{e} partie, pp. 258-266).

Donnons maintenant un bref exposé des éléments de la théorie de la première approximation des charges creuses de type *f*) à revêtement métallique. On prend comme conditions de cette théorie les hypothèses suivantes :

1°. La détonation est instantanée et l'action de la substance explosive sur l'enveloppe se réduit à une impulsion dirigée perpendiculairement à la surface du cône.

2°. Le matériau de l'enveloppe ainsi que l'acier à perforer sont supposés des fluides parfaits.

Ces deux hypothèses sont faciles à argumenter bien qu'à première vue il soit illicite de se représenter un acier de blindage comme un fluide parfait. Or, il s'avère que les pressions qui surgissent pendant l'explosion d'une charge creuse sont de l'ordre de 100 000 atmosphères et, pour de telles pressions, les forces de résistance et les forces plastiques constituent les centièmes parties des forces d'inertie.

Dans les conditions adoptées, on peut se représenter le tableau qualitatif du phénomène de la façon suivante. A l'instant initial tous les éléments du fluide de l'enveloppe conique acquièrent une vitesse (de l'ordre de 2 km/s) dans la direction de l'axe du cône ; il se produit un serrage du cône avec épaississement de ses parois. Lorsque l'élément s'approche de l'axe du cône, une partie en est exprimée et jaillit en avant comme le font les vagues de la mer lorsqu'elles pénètrent dans une baie cunéiforme. Il en résulte qu'un jet ténu (*dard*) jaillit du cône (fig. 130). Les calculs montrent que la vitesse d'un tel dard est d'autant plus grande que le cône est

effilé. On observe d'ordinaire des vitesses de l'ordre de 2 à 10 km/s; dans certaines expériences, ces vitesses atteignent jusqu'à 90 km/s.

En rencontrant le blindage, le dard y exerce une pression de l'ordre de 1 000 000 d'atmosphères, ce qui explique la validité du schéma du fluide parfait pour l'élaboration de la théorie de la perforation. Le tableau qualitatif de la perforation se distingue du tableau de la formation des jets seulement par sa direction de variation du temps (on remplace t par $-t$). Chose caractéristique, au fur et à mesure du développement du processus, la longueur du jet diminue; pour chaque partie perforée, une partie du jet est consommée.

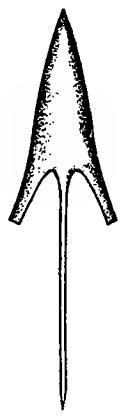

FIG. 130

2) Schéma hydrodynamique. Considérons le problème de la collision de deux jets, d'axe de symétrie commun, qui se déplacent l'un à la rencontre de l'autre. Ce problème se ramène à la détermination d'un écoulement permanent d'un fluide parfait dans un milieu à pression constante, qui satisfait aux conditions suivantes. Le long de l'axe de symétrie que nous prenons pour axe des x, un fluide de densité ρ_1 s'écoule de gauche à droite de façon que, lorsque $x \to -\infty$, le diamètre de la veine tend vers $2r_1$ et la vitesse vers V_1; de droite à gauche, le long de ce même axe s'écoule une veine fluide de densité ρ_2, dont le diamètre tend vers $2r_2$, lorsque $x \to +\infty$. Les fluides ont des surfaces libres L_1 et L_2 et une interface γ symétrique par rapport à l'axe des x; en outre, au point d'intersection avec l'axe, que nous prenons pour le point $x = 0$, les vitesses des deux veines sont nulles (fig. 131).

Etant donné que l'écoulement est permanent, pour la pression p, d'après la formule (1) de Bernoulli-Euler (n° 47), nous avons la relation

$$p = A - \frac{\rho}{2} V^2, \qquad (1)$$

où A est une constante égale à la pression correspondant à $V = 0$, c'est-à-dire au point $x = 0$. Vu que la pression est constante dans le milieu extérieur, en partant de cette relation, nous avons sur la surface libre L_1

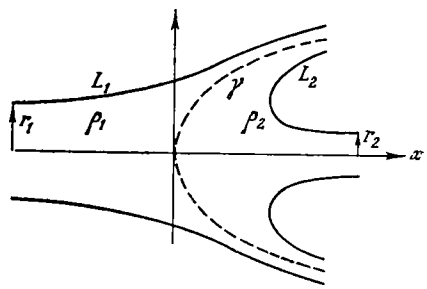

FIG. 131

$$V = \text{const} = V_1.$$

Sur l'interface γ, les vitesses V^+ et V^- des fluides, respectivement de densité ρ_1 et ρ_2, doivent satisfaire à la relation

$$\rho_1 (V^+)^2 = \rho_2 (V^-)^2. \qquad (2)$$

En s'éloignant vers $+\infty$ en restant sur γ, nous voyons que $V^+ \to V_1$; d'après (2), nous obtenons que $V^- \to \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, V_1$ lorsque $x \to +\infty$ sur γ. D'où, d'une manière analogue à ce qui précède, nous concluons que sur la surface libre L_2

$$V = \text{const} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, V_1.$$

Par là même, lorsque $x \to +\infty$, la limite de la vitesse d'écoulement le long de l'axe des x de droite à gauche est déterminée:

$$V_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, V_1. \tag{3}$$

Cas plan. Etudions en détail le cas d'un écoulement plan et désignons respectivement par

$$\left.\begin{aligned} w &= f_1(z) = u_1 + iv_1, \\ w &= f_2(z) = u_2 + iv_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

les potentiels complexes des écoulements frontaux. Tenant compte de la symétrie des veines par rapport à l'axe des x, considérons leur partie supérieure où $y > 0$; alors les fonctions (4) réalisent les représentations conformes des domaines occupés par les fluides sur des bandes de largeur q_1 et q_2, où $q_1 = V_1 r_1$ et $q_2 = V_2 r_2$ sont les débits. Les transformations (4) sont déterminées à des termes constants près et il est clair que ces constantes peuvent être choisies de manière que les bandes dans le plan des w soient les bandes

$$0 < v < q_1 \quad \text{et} \quad -q_2 < v < 0$$

et que le point de ramification des courants $z = 0$, par les deux transformations, ait pour image le point $w = 0$.

Pour résoudre le problème, on demande de déterminer les courbes L_1, L_2 et γ et les représentations (4) correspondantes de manière que sur les courbes L_1 et L_2, qui ont pour images les droites $v = q_1$ et $v = -q_2$, on ait respectivement

$$|f_1'(z)| = V_1 \quad \text{et} \quad |f_2'(z)| = V_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, V_1, \tag{5}$$

et sur la courbe γ qui a pour image le demi-axe positif des u

$$|f_2'(z)| = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, |f_1'(z)| \tag{6}$$

(fig. 132). Remarquons encore que par les transformations considérées, les demi-axes négatif et positif des x ont respectivement pour images les bords supérieur et inférieur du demi-axe négatif de sorte

que

$$\begin{aligned} &\arg f_1'(z) = 0 \qquad \text{pour } x < 0, \\ &\arg f_2'(z) = -\pi \quad \text{pour } x > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Pour simplifier la position du problème, considérons les fonctions

$$\zeta = \ln f_k'(z) = \ln f_k'[z_k(w)] = F_k(w) \quad (k = 1, 2), \tag{8}$$

où $z = z_k(w)$ sont les fonctions inverses de (4). Ces fonctions

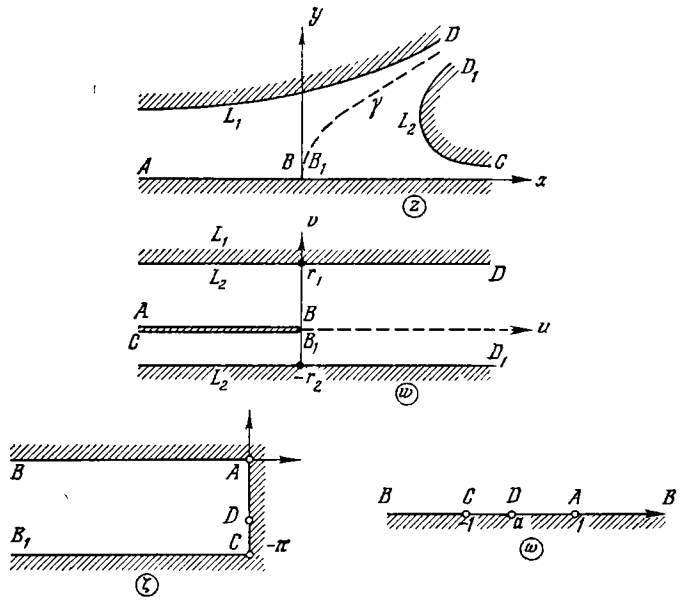

FIG. 132

doivent vérifier les conditions aux limites suivantes: respectivement sur les droites $v = q_1$ et $v = -q_2$ on a

$$\operatorname{Re} F_1(w) = \ln V_1 \text{ et } \operatorname{Re} F_2(w) = \ln V_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}, \tag{5'}$$

sur le demi-axe positif des u

$$\operatorname{Re} F_2(w_2) = \operatorname{Re} F_1(w_1) + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \operatorname{Im} F_2(w_2) = \operatorname{Im} F_1(w_1), \tag{6'}$$

où $w_k = f_k(z)$, et sur les bords supérieur et inférieur du demi-axe négatif des u

$$\operatorname{Im} F_1(w) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} F_2(w) = -\pi. \tag{7'}$$

Puisqu'en vertu de (6) nous avons évidemment $w_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, w_1$, on peut récrire (6′) sous la forme

$$\operatorname{Re} F_2\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, w\right) = \operatorname{Re} F_1(w) + \frac{1}{2}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$\operatorname{Im} F_2\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, w\right) = \operatorname{Im} F_1(w). \qquad (6'')$$

On voit de (6″) que la fonction $F_2\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, w\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$ est le prolongement analytique de $F_1(w)$ à travers le demi-axe positif des u. Ainsi, le problème se ramène à déterminer une fonction $F(w) = F_1(w)$ analytique dans la bande $-q_2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} < v < q_1$ coupée suivant le demi-axe négatif des u, qui satisfait sur les côtés de cette bande à la condition

$$\operatorname{Re} F(w) = \ln V_1 = 0,$$

car, sans restreindre la généralité, on peut supposer que $V_1 = 1$, et sur les bords supérieur et inférieur de la coupure respectivement aux conditions

$$\operatorname{Im} F(w) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} F(w) = -\pi.$$

Notons encore que pour $V_1 = 1$, nous avons $q_1 = r_1$ et, selon (5),

$$q_2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = r_2 V_2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = r_2.$$

Puisque, en outre, d'après le sens mécanique du problème, la fonction $\operatorname{Re} F(w)$ doit être bornée supérieurement, la fonction $\zeta = F(w)$ doit réaliser la représentation conforme de la bande $-r_2 < v < r_1$ coupée suivant un demi-axe sur une demi-bande avec la correspondance des points frontières qui est indiquée sur la fig. 132. Cette fonction se détermine de façon élémentaire. En effet, nous trouvons la transformation du demi-plan $\operatorname{Im}\omega > 0$ sur la bande coupée avec la correspondance des points indiquée sur la fig. 132, à l'aide de la formule de Schwarz-Christoffel, exactement comme dans l'exemple 2 du n° 39 (*):

$$w = \frac{r_1}{\pi}\ln(\omega - 1) + \frac{r_2}{\pi}\ln(\omega + 1) - \frac{r_1 + r_2}{\pi}\ln(\omega - a),$$

où $a = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$. La demi-bande est transformée sur ce demi-plan, avec la correspondance voulue des points, d'après la formule $\omega = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\zeta\right) = \operatorname{ch}\zeta$, donc la fonction inverse de la fonction

(*) Dans l'exemple du n° 39, la correspondance des points diffère de celle donnée ici.

$\zeta = F(w)$ a la forme

$$w = \frac{r_1}{\pi} \ln(\operatorname{ch}\zeta - 1) + \frac{r_2}{\pi} \ln(\operatorname{ch}\zeta + 1) - \frac{r_1 + r_2}{\pi} \ln\left(\operatorname{ch}\zeta - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\right). \quad (9)$$

Connaissant la fonction $F(w)$, nous trouvons, d'après la formule (8), $f'(z) = \frac{dw}{dz} = e^{F(w)}$, d'où

$$z = \int_0^w e^{-F(w)}\, dw \quad (10)$$

(nous omettons l'indice 1 dans les notations des fonctions f et F).

Nous pouvons déterminer la forme des jets ainsi que la répartition des vitesses d'écoulement en utilisant cette formule.

Cas d'une symétrie axiale. Dans ce cas, on n'arrive pas à obtenir, sous une forme aussi achevée que dans le cas plan, la solution du problème de la collision des jets. Si l'on considère que la section axiale du courant est donnée par la fig. 131 et si l'on désigne par x la coordonnée sur l'axe et par y la distance à l'axe, on a le système

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -y \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = y \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11)$$

(comparer avec les équations (12) du n° 56) à la place du système de Cauchy-Riemann. L'étude des propriétés des solutions de ce système est du ressort de la théorie générale des représentations quasi conformes (cf. n° 56), insuffisamment développée. Nous devons donc nous borner à des considérations qualitatives générales de cette théorie et, en partant de celles-ci, obtenir des propositions à l'aide desquelles on peut édifier la théorie de la première approximation.

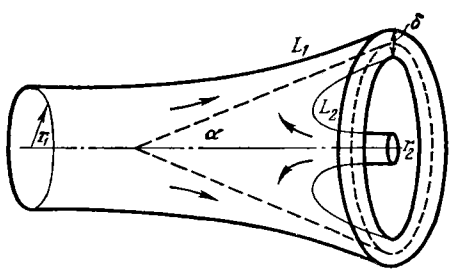

FIG. 133

Donnons plusieurs de ces considérations et propositions.

1°. Lorsque $y \to +\infty$, les courbes L_1 et L_2 ont des courbures de signes différents et tendent asymptotiquement vers la droite $y = x \operatorname{tg}\alpha + b$. Ainsi, il existe un cône asymptotique vers lequel tendent les surfaces libres des veines fluides qui limitent une «nappe» (fig. 133).

2°. L'épasseur δ de la bande comprise entre les courbes L_1 et L_2 tend vers zéro, lorsque $y \to +\infty$, de plus

$$2\pi y\delta = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \eta, \quad (12)$$

où η est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à δ. Pour élucider le sens physique de cette relation, remarquons que son premier membre représente l'aire de la section de la nappe et que πr_1^2 et πr_2^2 sont les aires des sections des jets lorsque $x \approx \mp \infty$ (cf. fig. 133). Loin du point de rencontre des jets, c'est-à-dire pour les $| x |$ grands, les vitesses en tous les points des sections de chaque jet sont approximativement les mêmes (égales à V_1 pour le premier jet et à V_2 pour le second). Donc, la condition d'incompressibilité du fluide, qui s'exprime par la constance du débit, s'écrit pour chaque jet sous la forme $\pi r_k^2 \approx 2\pi y \delta_k$, où δ_k est la largeur de la bande comprise entre L_k et γ ($k = 1, 2$; $\delta_1 + \delta_2 = \delta$); en additionnant ces deux relations nous trouvons (12).

3°. D'après le théorème de la constance de la quantité de mouvement, on peut obtenir une relation, importante pour la suite, entre les rayons des veines fluides, leurs densités et l'angle α. Considérons deux éléments de jet au voisinage de l'axe des x, lorsque $x \approx \pm\infty$, assimilables à des cylindres de hauteur unité; leur quantité de mouvement résultante est dirigée suivant l'axe des x et est égale à

$$I_1 = \pi\rho_1 r_1^2 V_1 - \pi\rho_2 r_2^2 V_2.$$

Après collision et un temps suffisamment grand, ces éléments se trouvent au voisinage du cône asymptotique et la projection de leur quantité de mouvement résultante sur l'axe des x est

$$I_2 = (\pi\rho_1 r_1^2 V_1 + \pi\rho_2 r_2^2 V_2) \cos\alpha.$$

D'après le théorème de la constance de la quantité de mouvement, nous avons $I_1 = I_2$, d'où, en posant

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \lambda, \quad \frac{r_2}{r_1} = k \tag{13}$$

et en tenant compte de la relation (3), nous trouvons

$$\cos\alpha = \frac{1-\lambda k^2}{1+\lambda k^2}, \quad k^2 = \frac{1}{\lambda}\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{14}$$

Les propositions citées sont suffisantes pour élaborer des formules de calcul de la théorie approximative de l'effet de la charge creuse.

3) Théorie de la perforation. Considérons le schéma déjà examiné de la collision de deux jets fluides dans un système de coordonnées par rapport auquel le jet de gauche (épais) est immobile. Par rapport à ce système de coordonnées, la vitesse du jet de droite, mobile, est égale à

$$w = V_1 + V_2 = (1 + \lambda) V_2.$$

La vitesse du point de collision des jets V_1 qui, dans la théorie de la charge creuse, est la *vitesse de pénétration* (nous la notons ω),

est donc égale à

$$\omega = \lambda V_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda} w. \tag{15}$$

Ainsi, la *vitesse de pénétration des jets est toujours inférieure à la vitesse des jets.* En particulier, si le jet et le blindage ont une même densité ($\lambda = 1$), alors la vitesse de pénétration est deux fois plus petite que la vitesse du jet.

Il découle aussi de la formule (15) la proposition importante suivante: si une section fixe du jet se déplace à une distance H, alors le point de pénétration du jet se déplace à la distance

$$h = H\frac{\omega}{w} = \frac{\lambda}{1+\lambda} H,$$

et le jet se rétrécit de la quantité

$$H - h = H\left(1 - \frac{\omega}{w}\right) = \frac{1}{1+\lambda} H.$$

Ainsi, le *rapport de la longueur de la partie consommée du jet* $h_2 = H - h$ *à la longueur de la partie perforée* h *est égal à*

$$\frac{h_2}{h} = \frac{H-h}{h} = \frac{1}{\lambda},$$

d'où

$$h = \lambda h_2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\, h_2. \tag{16}$$

En particulier, *si les densités du jet et du blindage sont les mêmes, alors* $h = h_2$, *c'est-à-dire que la profondeur de pénétration est égale à la longueur du jet consommé.*

La formule (16) s'accorde bien avec la supposition qu'un jet de l'effet de la charge creuse a une longueur finie. Supposons qu'une tige fluide cylindrique de diamètre faible par rapport à sa longueur heurte coaxialement une autre tige fluide cylindrique. Dans la période voisine à l'instant initial de la collision, nous avons un processus non permanent nettement exprimé. Cependant, en s'appuyant sur les principes généraux dont il a été question plus haut, on peut montrer que les phénomènes qui se déroulent à la tête du jet n'influent sensiblement qu'à une distance égale à 2 à 3 diamètres du jet. Quand un processus réel est voisin du processus permanent considéré plus haut, seule une partie insignifiante du jet (de quelques diamètres), que l'on peut négliger, est consommée. Donc, la longueur h_2 de la partie du jet consommée peut être tout simplement supposée égale à la longueur du jet et nous obtenons la formule approchée suivante de la *profondeur de pénétration d'un jet de l'effet de la charge creuse:*

$$h = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\, a, \tag{17}$$

où a est la longueur du jet, ρ_2 sa densité et ρ_1 la densité du blindage.

4) Théorie de la formation du jet. Le schéma de collision de deux jets considéré plus haut, avec $\rho_1 = \rho_2$, peut permettre de calculer les paramètres d'un jet de l'effet de la charge creuse. Dans ce but, introduisons un système de coordonnées mobile qui se déplace le long de l'axe des x de droite à gauche avec la vitesse $\frac{V}{\cos\alpha}$. Dans ce système, la nappe conique se déplace suivant sa normale avec la vitesse $W = V \operatorname{tg}\alpha$, la vitesse du jet de la charge creuse s'avère égale à $w = V + \frac{V}{\cos\alpha}$. En y portant $V = W \operatorname{ctg}\alpha$, nous obtenons la formule de la *vitesse d'un jet de la charge creuse* en fonction de l'angle α et de la « vitesse de serrage » W du cône :

$$w = W\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\operatorname{ctg}\alpha. \tag{18}$$

Il est également facile d'obtenir l'expression du rayon du jet en fonction de l'angle α et de l'épaisseur de l'enveloppe dans l'une de ses sections (*). Prenons, par exemple, l'épaisseur de l'enveloppe, lorsque $y = 1$, égale à δ.

Alors, d'après (12), nous avons approximativement :

$$2\delta = r_1^2 + r_2^2$$

et, d'après (14),

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

d'où pour le *rayon du jet* nous avons l'expression

$$r_2 = \sqrt{\delta(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2\delta}\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{19}$$

Tout comme dans la théorie de la perforation, nous passons de la considération du schéma idéal au calcul (en première approximation) de la charge creuse réelle. Considérons le cas où l'enveloppe est un cône d'épaisseur variable donnée par la formule (12) et où la charge est telle que tous les éléments de l'enveloppe acquièrent instantanément la vitesse W, constante en grandeur et dirigée normalement au cône asymptotique.

Si l'épaisseur du cône est petite par rapport à son hauteur, alors la phase non permanente initiale du processus peut être négligée et, par conséquent, on peut supposer que la formation du jet se fait d'après le schéma représenté sur la fig. 130 : le cône serré exprime un dard dont le rayon est défini par la formule (19) et qui se meut avec une vitesse définie par la formule (18).

(*) Connaissant l'épaisseur d'une section de l'enveloppe, on peut déterminer toute l'enveloppe, car la géométrie de l'enveloppe est définie par la forme de la nappe engendrée par les deux jets.

Dans le cas considéré, d'après ce qui a été dit plus haut, la longueur du jet et la profondeur de pénétration sont égales à la longueur de la génératrice du cône.

Pour terminer, notons que toutes les propositions et conclusions de la théorie de la première approximation, que nous venons de donner, sont entièrement confirmées par l'expérience pour des limites suffisamment grandes des diamètres des charges, des formes et épaisseurs des enveloppes, pour des matériaux de différentes densités et propriétés de résistance. Cependant, il s'est accumulé un nombre suffisant de données qui ne rentrent pas dans le cadre de la théorie exposée et qui exigent, même pour leur explication indirecte, des compléments essentiels à cette théorie. Le lecteur trouvera dans l'article de M. Lavrentiev [20] certaines de ces données et les positions de problèmes qui s'y rapportent.

59. Problèmes de la théorie de l'élasticité. Nous donnons ici plusieurs exemples de solution des problèmes du n° 51.

1) Solution des problèmes fondamentaux pour le cercle. Supposons que le domaine D soit le cercle unité. On demande de déterminer l'équilibre élastique lorsque les contraintes extérieures $F_n = X_n + iY_n$ (problème I) ou les déplacements $g = u + iv$ (problème II) sont donnés sur la circonférence unité C.

D'après les résultats du n° 51, la résolution de ces problèmes se ramène à la détermination de deux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ analytiques dans le cercle $|z| < 1$ qui vérifient sur la circonférence, dans le cas du problème I, la condition

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(z)} = f(\zeta), \tag{1}$$

où $f(\zeta) = i\int_{\zeta_0}^{\zeta} F_n\, ds$ est une fonction donnée sur C (cf. formule (8) du n° 51; d'après ce qui y a été dit, on peut prendre dans cette formule $A = 0$) et, dans le cas du problème II, la condition

$$\varkappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu g(\zeta), \tag{2}$$

où $\varkappa$ et μ sont des constantes (cf. formule (4) du n° 51).

Voyons en détail la résolution du problème I. Pour que le problème soit bien défini, donnons-nous la condition

$$\psi(0) = \operatorname{Im}\varphi'(0) = 0 \tag{3}$$

(cf. formule (10) du n°51). Tenons compte maintenant de ce que les valeurs $\psi(\zeta)$ sont les valeurs limites de la fonction $\psi(z)$ analytique dans le cercle $|z| < 1$. D'après la formule (22) du n° 52 et vu les conditions (1) et (3), nous obtenons alors pour tous les z, $|z| < 1$, la relation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\psi(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_1} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta = 0.$$

Etant donné que la fonction $\varphi(z)$ est analytique dans le cercle $|z| < 1$, en utilisant la formule de Cauchy cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{4}$$

Nous avons obtenu une équation pour déterminer la fonction $\varphi(z)$. Pour la résoudre, substituons le développement taylorien $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ dans l'intégrale du premier membre de (4):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{\bar{c}_1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta\,d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta}{\zeta-z}\sum_{k=2}^{\infty}k\bar{c}_k\bar{\zeta}^{k-1}\,d\zeta. \tag{5}$$

D'après la formule intégrale de Cauchy, le premier terme du second membre est égal à $\bar{c}_1 z$; pour transformer le second terme, remarquons que sur la circonférence $\bar{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$ et, par conséquent, la fonction à intégrer peut être ecrite sous la forme (*)

$$\frac{1}{\zeta-z}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\bar{c}_k}{\zeta^{k-2}}=\frac{2\bar{c}_2}{\zeta}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k'}{\zeta^k},$$

de plus, cette série converge pour $|\zeta|\geqslant 1$. En intégrant terme à terme, nous trouvons que le second terme, dans le second membre de (5), est égal à $2\bar{c}_2$.

Ainsi, la formule (4) nous donne l'expression suivante pour la fonction inconnue $\varphi(z)$:

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\bar{c}_1 z-2\bar{c}_2. \tag{6}$$

Il reste à déterminer les constantes $c_1=\varphi'(0)$ et $c_2=\frac{\varphi''(0)}{2}$. Il suffit de dériver (6) une fois, puis deux fois par rapport à z, ensuite d'y faire $z=0$; nous obtenons

$$c_1+\bar{c}_1=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta,\qquad c_2=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^3}\,d\zeta. \tag{7}$$

La deuxième équation détermine c_2; en ce qui concerne la première équation, remarquons d'abord qu'elle n'est résoluble que si l'on a la condition

$$\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta=\operatorname{Im}\frac{i}{2\pi}\int_C f(\zeta)\,d\bar{\zeta}=0$$

(nous tenons compte de ce que $\bar{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$ sur C) qui après substitution $f=f_1+if_2$ et $d\bar{\zeta}=dx-i\,dy$ s'écrit sous la forme

$$\int_C f_1\,dx+f_2\,dy=0 \tag{8}$$

et, du point de vue physique, exprime la condition d'après laquelle le moment résultant des contraintes extérieures est nul (comparer avec la formule (19)

(*) Nous développons $\frac{1}{\zeta-z}$ en série suivant les puissances de $\frac{z}{\zeta}$ et faisons le produit des séries.

du n° 51). En outre, avec la condition donnée, la première formule (7) détermine la partie réelle de c_1 et nous supposons nulle sa partie imaginaire conformément aux conditions (3) adoptées.

Ainsi, la fonction $\varphi(z)$ est donnée par la formule (6) dans laquelle les constantes c_1 et c_2 sont données par les formules (7). Connaissant cette fonction, nous trouvons de la condition (1) les valeurs frontières de la fonction analytique $\psi(z)$ et, d'après ces valeurs, à l'aide de la formule de Cauchy, nous reconstituons les valeurs de $\psi(z)$ à l'intérieur du cercle :

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\varphi(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{9}$$

D'après la formule (22) du n° 52, la deuxième intégrale du second membre est égale à $\overline{\varphi(0)}$; la troisième intégrale se calcule facilement à l'aide du théorème de Cauchy sur les résidus :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi'(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}=-\frac{\varphi'(0)}{z}+\frac{\varphi'(z)}{z}$$

(nous tenons compte de ce que $\bar{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$ sur C et de ce que la fonction à intégrer a deux pôles du premier ordre à l'intérieur de C : $\zeta=0$ et $\zeta=z$; on calcule les résidus en ces pôles à l'aide de la formule (5) du n° 23). Ainsi, la formule (9) s'écrit sous la forme

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\varphi'(z)}{z}+\frac{\varphi'(0)}{z}-\overline{\varphi(0)}. \tag{10}$$

D'après ce qui a été dit au numéro 51, les termes constants dans les formules (6) et (10) peuvent être négligés comme non essentiels, et, en tenant compte des formules (7), nous obtenons la solution du problème I sous la forme suivante

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{z}{4\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta,\\ \psi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{4\pi i z}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta-\frac{\varphi'(z)}{z}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Le problème II pour le cercle unité se résout d'une façon tout à fait analogue et les formules (11) sont remplacées par les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=\frac{\mu}{\varkappa\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{c_1}}{\varkappa}z,\\ \psi(z)&=-\frac{\mu}{\pi i}\int_C \frac{\overline{g(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{\varphi'(z)}{z}+\frac{c_1}{z},\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

où

$$c_1=\frac{\mu}{\pi i(\varkappa^2-1)}\left\{\varkappa\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\int_C \overline{g(\zeta)}\,d\zeta\right\}. \tag{13}$$

2) Cas d'un plan muni d'un orifice circulaire. Dans ce cas, les problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité se résol-

vent d'une façon analogue. Supposons d'abord que la résultante générale des contraintes extérieures appliquées au contour ainsi que les contraintes à l'infini soient nulles, c'est-à-dire que

$$X = Y = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma = \Gamma' = 0. \tag{14}$$

Comme nous l'avons vu (n° 51), il découle de cette supposition que les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont régulières au point à l'infini ; nous supposons en outre que $\varphi(\infty) = 0$.

Puisque les valeurs de $\psi(z)$ sur la circonférence C, que nous supposons comme précédemment être la circonférence unité, sont les valeurs limites d'une fonction analytique à l'extérieur du cercle $|z| > 1$, d'après la formule (23) du n° 52 et tenant compte de la condition aux limites (1), nous obtenons pour tous les z, tels que $|z| > 1$, la relation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta = 0,$$

ou, en vertu de la formule (20) du n° 52 et de la condition $\varphi(\infty) = 0$,

$$-\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Utilisant le développement taylorien $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$ qui converge pour $|z| > 1$, nous trouvons, de même que dans le cas du cercle, que l'intégrale du premier membre de la dernière formule est nulle et ainsi

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \tag{15}$$

On peut maintenant déterminer les valeurs frontières $\varphi(\zeta)$, déterminer à l'aide de la formule (1) les valeurs frontières $\psi(\zeta)$, et, d'après la formule (20) du n° 52, reconstituer, avec ces valeurs, les valeurs de $\psi(z)$ pour $|z| > 1$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \psi(\infty).$$

En y substituant les valeurs $\psi(\zeta)$ tirées de (1) et tenant compte des relations faciles à démontrer

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\varphi(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z} = 0, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi'(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = -\frac{\varphi(z)}{z},$$

nous obtenons

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{\varphi'(z)}{z} \tag{16}$$

(nous avons négligé un terme constant non essentiel).

Passons au cas général, lorsque les conditions (14) ne sont pas satisfaites. Nous avons alors, d'après les formules (20) du n° 51 :

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma z - \frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\operatorname{Ln} z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \Gamma' z + \varkappa\frac{X - iY}{2\pi(1+\varkappa)}\operatorname{Ln} z + \psi_0(z), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

où $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ sont des fonctions uniformes analytiques pour $|z| > 1$, de plus on peut poser $\varphi_0(\infty) = 0$ et supposer qu'il n'y a pas de rotation à l'infini, c'est-à-dire que Γ est une constante réelle. Portant ces expressions dans la condition aux limites (1), nous obtenons que les valeurs frontières des fonctions $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ sont reliées par une relation qui a exactement la même forme et dans laquelle dans le second membre $f(\zeta)$ est remplacé par

$$f_0(\zeta) = f(\zeta) - 2\Gamma\zeta - \frac{\overline{\Gamma'}}{\zeta} + \frac{X+iY}{2\pi}\operatorname{Ln}\zeta + \frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\zeta^2 \tag{18}$$

(nous avons tenu compte de ce que $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ sur C et que Γ est une constante réelle). Remarquons encore que la fonction $f_0(\zeta)$ est uniforme sur C car l'accroissement de $f(\zeta)$, lorsqu'on parcourt C, est égal à $X + iY$ et est compensé par l'accroissement du terme logarithmique.

Ainsi, la détermination des fonctions $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ se ramène à un problème déjà résolu et, par conséquent, ces fonctions sont données par les formules (15) et (16) dans lesquelles $f(\zeta)$ est remplacée par $f_0(\zeta)$ de (18). Il reste maintenant à déterminer les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ à l'aide des formules (17), c'est-à-dire que le problème sera résolu dans le cas général.

Le deuxième problème fondamental se résout d'une façon analogue.

3) Cas d'un demi-plan. Soit D le demi-plan inférieur. Dans ce cas, pour résoudre les problèmes fondamentaux, nous prolongeons les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, définies dans D, dans le demi-plan supérieur. Notamment, si z appartient au demi-plan supérieur, nous posons par définition

$$\varphi(z) = -z\overline{\varphi'(\bar{z})} - \overline{\psi(\bar{z})} + \text{const} ; \tag{19}$$

alors

$$\varphi'(z) = -\overline{\varphi'(\bar{z})} - z\overline{\varphi''(\bar{z})} - \overline{\psi'(\bar{z})}. \tag{20}$$

Désignant par $\varphi'_-(x)$ et $\varphi'_+(x)$ les valeurs limites de $\varphi'(z)$, lorsque $z \to x$, respectivement à droite et à gauche de l'axe des x (c'est-à-dire par les demi-plans inférieur et supérieur), nous avons

$$\varphi'_+(x) = -\overline{\varphi'_-(x)} - x\overline{\varphi''_-(x)} - \overline{\psi'_-(x)}. \tag{21}$$

D'autre part, des formules (26) du n° 50 nous obtenons dans le demi-plan inférieur

$$Y_y - iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \tag{22}$$

Nous voyons que sur les portions non chargées de l'axe des x, où $Y_y^- - iX_y^- = \varphi'_-(x) + \overline{\varphi'_-(x)} + x\overline{\varphi''_-(x)} + \overline{\psi'_-(x)} = 0$, la relation (21) prend la forme

$$\varphi'_+(x) = \varphi'_-(x).$$

Ainsi, le prolongement (20) de la fonction $\varphi'(z)$ dans le demi-plan supérieur est un prolongement analytique de cette fonction à travers les portions non chargées de l'axe des x.

La fonction $\psi'(z)$ s'exprime aussi à l'aide de la fonction $\varphi'(z)$ qui vient d'être prolongée dans le demi-plan supérieur. Pour trouver son expression, remplaçons z par $\bar{z}$ (de sorte que z appartienne au demi-plan *inférieur*) dans la formule (20) et passons aux quantités conjuguées complexes ; nous avons alors

$$\psi'(z) = -\varphi'(z) - \overline{\varphi'(\bar{z})} - z\varphi''(z)$$

($\bar{z}$ appartient au demi-plan supérieur). Portant cette expression dans (22), nous en déduisons l'expression des contraintes à l'aide de la fonction $\varphi(z)$:

$$Y_y - iX_y = \varphi'(z) - \varphi'(\bar{z}) + (z - \bar{z})\,\overline{\varphi''(z)}. \tag{23}$$

D'une façon analogue, nous obtenons de la formule (24) du n° 50 l'expression des déplacements à l'aide de cette même fonction

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) + \overline{\varphi(z)} - (z - \bar{z})\,\overline{\varphi'(z)} + \text{const}. \tag{24}$$

Passons à la résolution des problèmes aux limites. Dans le premier problème aux limites on se donne des contraintes extérieures sur l'axe réel : la pression $P(t) = -Y_y^-$ et la contrainte tangentielle $T(t) = X_y^-$; nous supposons qu'elles vérifient la condition de Hölder et sont nulles à l'infini. De la formule (23), dans laquelle on doit passer à la limite, lorsque $z \to t$, nous obtenons la condition aux limites pour la fonction $\varphi'(z)$:

$$\varphi'_+(t) - \varphi'_-(t) = P(t) + iT(t). \tag{25}$$

La solution du problème aux limites (25) en vertu de la formule (15) de Sokhotski du n° 52 est donnée immédiatement sous la forme d'une intégrale du type Cauchy

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t) + iT(t)}{t - z}\,dt. \tag{26}$$

Pour certaines conditions complémentaires imposées à $P(t)$ et $T(t)$, la fonction $\varphi'(z)$ donnée par la formule (26) satisfait à l'infini aux conditions nécessaires, lesquelles (comme il découle de la formule (22) du n° 51) sont de la forme :

$$\varphi'(z) = -\frac{X + iY}{2\pi}\cdot\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \tag{27}$$

où $o\left(\frac{1}{z}\right)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{z}$. Dans ces conditions, portant l'expression de $\varphi'(z)$ que l'on vient de trouver dans la formule (23), nous en déduisons les contraintes, et la formule (24) nous donne les déplacements (à un déplacement rigide près).

Dans le deuxième problème aux limites, on se donne sur l'axe réel les valeurs des composantes du déplacement : $u_- = g_1(t)$, $v_- = g_2(t)$; nous supposons que les dérivées $g_1'(t)$ et $g_2'(t)$ vérifient la condition de Hölder et sont nulles à l'infini.

Dérivant par rapport à x l'égalité (24), passant à la limite lorsque $z \to t$ par le demi-plan inférieur et utilisant les déplacements donnés, nous trouvons la condition aux limites du problème :

$$2\mu[g_1'(t) + ig_2'(t)] = \varkappa\varphi'_-(t) + \varphi'_+(t). \tag{28}$$

Désignons par $\chi(z)$ la fonction qui coïncide avec $\varphi'(z)$ dans le demi-plan supérieur et avec $-\varkappa\varphi'(z)$ dans le demi-plan inférieur. La condition (28) s'écrit alors sous la forme

$$\chi_+(t) - \chi_-(t) = 2\mu[g_1'(t) + ig_2'(t)],$$

et la fonction $\chi(t)$ est trouvée sous la forme d'une intégrale du type Cauchy

$$\chi(z) = \frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1'(t) + ig_2'(t)}{t - z}\,dt. \tag{29}$$

Connaissant χ, nous trouvons aussi la fonction à déterminer

$$\varphi'(z) = \begin{cases} \chi(z) & \text{pour Im } z > 0, \\ -\dfrac{1}{\varkappa}\chi(z) & \text{pour Im } z < 0. \end{cases} \tag{30}$$

4) Problème du poinçon. Soit un poinçon rigide à base horizontale rectiligne disposé au-dessus du segment $(-l, l)$ de l'axe réel qui représente la frontière d'un corps élastique (fig. 134). Nous supposons que les points du segment $(-l, l)$ sont en contact et adhèrent invariablement au poinçon et que le poinçon ne peut se déplacer que verticalement. Le problème est un *problème aux limites mixte* de la théorie de l'élasticité : on se donne les déplacements

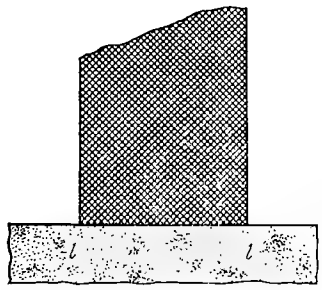

FIG. 134

$$u_- + iv_- = g_1(t) + ig_2(t) = \text{const} \qquad (31)$$

sur le segment $(-l, l)$ et sur l'autre partie de la frontière, c'est-à-dire sur les demi-droites $(-\infty, -l)$ et (l, ∞), les contraintes

$$X_y^- = Y_y^- = 0. \qquad (32)$$

Portant la condition (32) dans la formule (25), nous voyons qu'aux points des demi-droites $(-\infty, -l)$ et (l, ∞) la relation $\varphi_+'(t) = \overline{\varphi_-'(t)}$ est satisfaite, c'est-à-dire que la fonction $\varphi'(z)$ se prolonge analytiquement à travers ces demi-droites. Portant la condition (31) dans la formule (28), nous obtenons une relation entre les valeurs frontières de $\varphi'(z)$ sur les bords de la coupure $(-l, l)$: $\varkappa\varphi_-'(t) + \varphi_+'(t) = 0$, ou

$$\varphi_+'(t) = -\varkappa\varphi_-'(t). \qquad (33)$$

Ainsi, pour déterminer la fonction $\varphi'(z)$ nous aboutissons à un problème d'Hilbert-Privalov dans le cas de $b = 0$ et $a = -\frac{1}{\varkappa}$ et d'un contour non fermé C (cf. la fin du n° 53). L'indice de la fonction a est nul, donc le problème se résout à l'aide des formules (4) et (5) de Gakhov (n° 53) qui dans notre cas prennent la forme

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l} \frac{\ln\left(-\frac{1}{\varkappa}\right)}{\zeta - z}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}(\ln\varkappa + i\pi)\ln\frac{z-l}{+l},$$

$$\varphi_-'(z) = Ae^{-F^-(z)} = A\left(\frac{z-l}{z+l}\right)^{\frac{1}{2}-i\beta},$$

où $\beta = \frac{\ln\varkappa}{2\pi}$. Cependant, la fonction $\varphi_-'(z)$ que l'on vient de déterminer ne satisfait pas aux conditions à l'infini : elle y prend la valeur finie A, tandis que la fonction que nous voulons déterminer, conformément à la condition (27), doit y avoir un zéro du premier ordre. Donc, tenant compte de la remarque de la fin du n° 53 et multipliant la fonction trouvée par $\frac{1}{z-l}$, nous obtenons (*) :

$$\varphi_-'(z) = \frac{A}{z-l}\left(\frac{z-l}{z+l}\right)^{\frac{1}{2}-i\beta} = A\left(\frac{z+l}{z-l}\right)^{i\beta}\frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}}.$$

(*) Le facteur $\frac{1}{z-l}$ est choisi de manière que la fonction obtenue n'ait de singularités qu'aux extrémités du segment $(-l, l)$.

Le résidu de notre fonction au point $z = \infty$ est égal à A (pour le choix correspondant des branches des fonctions multiformes qui participent dans l'expression ci-dessus); donc, tenant compte de la formule (27), nous trouvons: $A = -\frac{X + iY}{2\pi}$, c'est-à-dire que la constante A est égale à la résultante des forces appliquées au poinçon. Dans nos conditions, $X = 0$, $Y = -P_0$ et nous obtenons l'expression définitive de la fonction $\varphi'(z)$:

$$\varphi'(z) = \frac{iP_0}{2\pi}\left(\frac{z+l}{z-l}\right)^{i\beta}\frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}}. \tag{34}$$

Calculons la pression $P(t)$ et la contrainte tangentielle $T(t)$ qui agit sur le corps sous le poinçon. D'après les formules (25) et (33), nous avons:

$$P(t) + iT(t) = \varphi_+'(t) - \varphi_-'(t) = \frac{1+\varkappa}{\varkappa}\varphi_+'(t).$$

Y portant l'expression (34), nous trouvons:

$$P(t) + iT(t) = \frac{iP_0}{2\pi}\frac{1+\varkappa}{\sqrt{\varkappa}}\left(\frac{t+l}{t-l}\right)^{i\beta}\frac{1}{\sqrt{t^2-l^2}}$$

où dans le second membre il faut prendre la valeur limite de la fonction lorsque $z \to t$ par les points du demi-plan supérieur (*). Nous avons après certaines transformations élémentaires

$$\left.\begin{aligned} P(t) &= \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-t^2}}\frac{1+\varkappa}{\sqrt{\varkappa}}\cos\left(\beta\ln\frac{l+t}{l-t}\right), \\ T(t) &= \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-t^2}}\frac{1+\varkappa}{\sqrt{\varkappa}}\sin\left(\beta\ln\frac{l+t}{l-t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Ces formules ont été obtenues par *V. Abramov* (cf. N. Muskhelishvili [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Petrovsky, Lectures on partial differential equations, Interscience Publ., 1954.

[2] E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, t. 3, 5ème éd. Gauthier-Villars, Paris 1942.

[3] Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.

[4] Д. Ю. Панов, Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, 1949.

[5] П. Ф. Фильчаков и В. И. Панчишин, Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге, Изд-во АН УССР, Киев, 1961.

[6] Н. Е. Кочин и И. А. Кибель, Теоретическая гидромеханика, ч. I-II, Гостехиздат, 1948.

[7] В. В. Голубев, Лекция по теории крыла, Гостехиздат, 1950.

[8] L. Sedov, Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics, Interscience Publ., John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sidney 1965.

[9] И. М. Аснин, Расчеты электромагнитных полей, изд. ВЭТА, Л., 1939.

(*) Dans ces circonstances on a le facteur $e^{\pi\beta} = \sqrt{\varkappa}$ (cf. ci-dessus la définition de la constante β).

[10] N. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, P. Noordhoff. Ltd., Groningen 1953.
[11] Г. В. Колосов, Применение комплексной переменной к теории упругости, ОНТИ, 1935.
[12] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids, 2nd ed., Oxford 1959.
[13] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, 1963.
[14] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1963.
[15] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, 1959.
[16] M. Lavrent'ev, Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations, P. Noordhoff, Ltd., Groningen 1963.
[17] Л. И. Волковыский, Квазиконформные отображения, Изд. Львовского ун-та, Львов, 1954.
[18] F. G. Tricomi, Sulle equazioni linearialle derivate pazziali di 2º ordine di tipo misto, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Mat. e Nat. (5) 14 (1923), 134-247.
[19] А. В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа, Труды ин-та имени В. А. Стеклова, вып. XLI, Изд-во АН СССР, 1953.
[20] М. А. Лаврентьев, Кумулятивный заряд и принципы его работы, Успехи мат. наук, т. XII, вып. 4 (1957), 41-56.

CHAPITRE IV

Principes variationnels des représentations conformes

Ce chapitre est consacré à la « dynamique » des représentations conformes. On y donne des propositions quantitatives et qualitatives permettant de juger de variations des représentations lorsque les frontières des domaines transformés varient. Des propositions de ce genre sont d'un intérêt particulier pour les applications, car elles donnent des méthodes simples de calcul lorsqu'on passe d'une construction donnée à une construction voisine. Supposons que pour les calculs d'une construction certaines quantités sortent des limites admissibles. Alors le problème de savoir où et de combien il faut faire varier la construction se pose naturellement. Dans certains cas, la solution de ce problème peut être obtenue en se basant sur les principes variationnels que nous allons exposer.

On donne à la fin du chapitre des exemples d'application des principes variationnels à des problèmes pratiques concrets.

§ 1. PRINCIPES VARIATIONNELS FONDAMENTAUX

Soient donnés dans le plan des z deux domaines simplement connexes D et $\widetilde{D}$ de frontières les courbes C et $\widetilde{C}$ et soient $w = f(z)$ et $w = \widetilde{f}(z)$ les fonctions qui réalisent les représentations conformes de D et de $\widetilde{D}$ sur un des domaines canoniques (qui peut être un cercle, un demi-plan, une bande) et qui sont normées de la même manière. Le problème dont nous venons de parler se pose de la manière suivante : *connaissant la représentation* $w = f(z)$ *et supposant que le contour* $\widetilde{C}$ *est voisin de* C, *déterminer la partie principale* δf *de l'accroissement*

$$\widetilde{f}(z) - f(z) = \delta f + r(f, \widetilde{f})$$

lorsqu'on passe du domaine D *au domaine* $\widetilde{D}$.

Nous avons deux types de résultats : les théorèmes qualitatifs et les méthodes de calcul approché de δf avec des estimations pour le reste $r(f, \widetilde{f})$. Commençons par les principes qualitatifs.

60. Principe variationnel fondamental. Introduisons certaines notations. Le domaine de frontière la courbe C est désigné par $D(C)$. Nous désignons la fonction qui réalise la représentation conforme de $D(C)$ sur le cercle unité de manière qu'un point intérieur

fixe z_0 ait pour image l'origine des coordonnées par

$$w = f(z, C);\ f(z_0, C) = 0. \tag{1}$$

Les fonctions qui vérifient les conditions mentionnées sont en nombre infini mais elles se distinguent les unes des autres par un facteur de la forme $e^{i\vartheta}$, où ϑ est un nombre réel. Nous notons $f(z, C)$ l'une quelconque d'entre elles, mais dans les questions où la quantité ϑ est essentielle, nous la définissons par une condition complémentaire. La courbe fermée dont l'image par la transformation (1) est la circonférence $|w| = \rho < 1$ est notée C_ρ et appelée *ligne de niveau*.

On appelle *déformation* du contour C l'opération qui consiste à remplacer ce dernier par le contour $\widetilde{C}$. Supposons que les domaines $D(C)$ et $D(\widetilde{C})$ soient *étoilés* par rapport à un point z_0, c'est-à-dire que leurs frontières C et $\widetilde{C}$ dans le système de coordonnées polaires de pôle z_0 puissent être représentées par les équations $r = r(\varphi)$ et $r = \widetilde{r}(\varphi)$ à l'aide des fonctions *uniformes* r et $\widetilde{r}$. Le point $z_2 = z_0 + r_2 e^{i\varphi_2}$ du contour C, en lequel le rapport $\frac{\widetilde{r}(\varphi)}{r(\varphi)}$ atteint un extrémum, et le point correspondant $\widetilde{z}_2 = z_0 + \widetilde{r}_2 e^{i\varphi_2}$ du contour $\widetilde{C}$ sont appelés *points de plus grande déformation* et le nombre $\lambda = \frac{\widetilde{r}_2}{r_2}$ *la plus grande déformation* du contour.

Le principe variationnel fondamental dit *principe de Lindelöf* affirme que si l'on se borne aux transformations sur le cercle unité des domaines contenant un point fixe z_0 (image réciproque du point $w = 0$ par chacune de ces transformations), alors lorsqu'on *déforme* la frontière vers l'intérieur du domaine : 1) toutes les lignes de niveau se contractent ; 2) la dilatation au point z_0 croît ; 3) la dilatation aux points de la frontière qui sont restés immobiles (et, en particulier, la longueur de l'image de la partie non déformée de la frontière) décroît ; 4) aux points de plus grande déformation la dilatation augmente au moins de $\frac{1}{\lambda}$ fois.

Autrement dit, on a le théorème suivant :

Théorème 1. *Si un domaine $D(\widetilde{C})$ est contenu dans un domaine $D(C)$, alors :*

1) *pour tout ρ $(0 < \rho < 1)$, le domaine $D(\widetilde{C}_\rho)$ est contenu dans le domaine $D(C_\rho)$, de plus le contact de $\widetilde{C}_\rho$ avec C_ρ n'est possible que si $\widetilde{C}$ et C coïncident ;*

2) *au point z_0, on a*

$$|f'(z_0, \widetilde{C})| \geqslant |f'(z_0, C)|, \tag{2}$$

de plus le signe d'égalité n'est possible que si $\widetilde{C}$ et C coïncident ;

3) *si les contours* $\widetilde{C}$ *et* C *ont un point commun* z_1, *alors en ce point*

$$|f'(z_1, \widetilde{C})| \leqslant |f'(z_1, C)|, \tag{3}$$

de plus le signe d'égalité n'est possible que si C *et* $\widetilde{C}$ *coïncident*;

4) *si les domaines sont étoilés par rapport au point* z_0, *alors aux points de plus grande déformation*

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C})| \geqslant \frac{1}{\lambda} |f'(z_2, C)|, \tag{4}$$

où $\lambda < 1$ *est la plus grande déformation du contour.*

Nous donnons une démonstration géométrique directe de ce principe, qui montre d'une manière claire son essence et permet

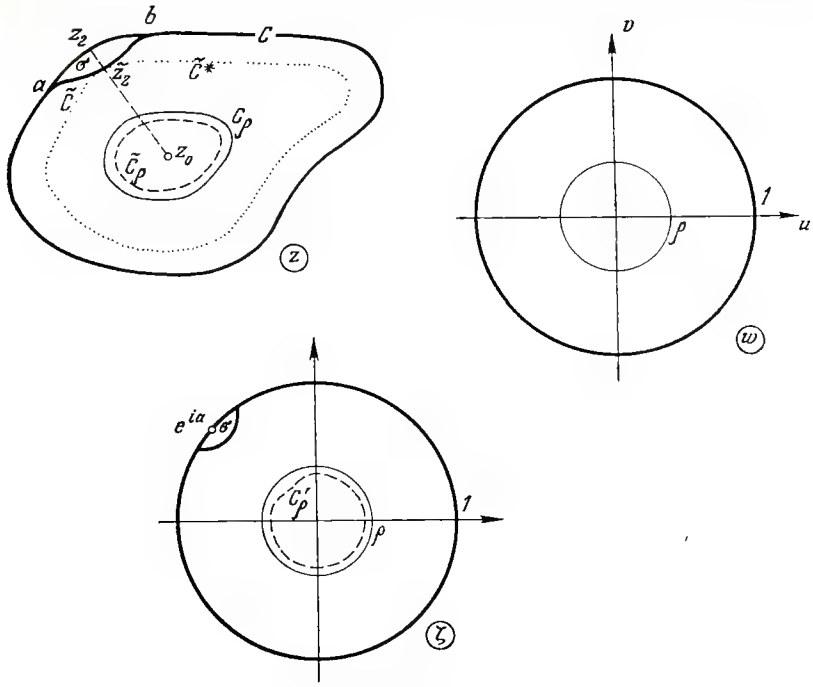

FIG. 135

d'obtenir des estimations quantitatives. Remarquons pour cela qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où le contour $\widetilde{C}$ ne diffère de C que sur une petite portion (a, b) où il est un arc de courbe dont la courbure est voisine de la courbure de C sur (a, b), de sorte que $D(\widetilde{C})$ s'obtient en retranchant de $D(C)$ une petite aire σ (fig. 135). En effet, toute variation de C peut être obtenue par l'application successive de cette variation simple, et si le théorème est démontré pour elle, il l'est aussi dans le cas général.

Introduisons maintenant un plan auxiliaire des ζ et transformons d'une manière conforme le domaine $D\ (C)$ sur le cercle unité $|\ \zeta\ | < 1$:

$$\zeta = f\ (z,\ C),\quad f\ (z_0,\ C) = 0.$$

Supposons en outre que $\widetilde{C}$ ait pour image la courbe $\widetilde{C}'$ et que l'aire comprise entre $\widetilde{C}'$ et la circonférence $|\ \zeta\ | = 1$ soit égale à σ' (fig. 135). Transformons d'une manière conforme le domaine $D\ (\widetilde{C}')$ sur le cercle unité du plan des w:

$$w = g\ (\zeta),\quad g\ (0) = 0.$$

Aux infiniment petits d'ordre supérieur près, l'aire σ' peut être assimilée à une lunule circulaire (*); on peut donc prendre pour g la transformation (9) du n° 34:

$$w = g\ (\zeta) = \zeta\left\{1 + \frac{\sigma'}{2\pi}\,\frac{1+\zeta e^{-i\alpha}}{1-\zeta e^{-i\alpha}}\right\},\qquad (5)$$

où α est l'argument d'un point quelconque de l'aire σ'. Trouvons la transformation inverse de g. Pour cela écrivons la formule (5) sous la forme

$$\zeta \approx w\left\{1 - \frac{\sigma'}{2\pi}\,\frac{1+\zeta e^{-i\alpha}}{1-\zeta e^{-i\alpha}}\right\}$$

(nous nous sommes servis de $\frac{1}{1+\eta} \approx 1 - \eta$ aux infiniment petits d'ordre supérieur près pour les petits η). Puisque w diffère de ζ d'une quantité de l'ordre de σ', sans changer l'ordre de précision, on peut remplacer ζ par w dans les termes qui contiennent le facteur σ' de sorte que

$$\zeta \approx w\left\{1 - \frac{\sigma'}{2\pi}\,\frac{1+we^{-i\alpha}}{1-we^{-i\alpha}}\right\}.\qquad (6)$$

Désignons par C'_ρ la courbe du plan des ζ qui a pour image la circonférence $|\ w\ | = \rho$ par la transformation $w = g\ (\zeta)$. Pour obtenir les équations paramétriques de C'_ρ, nous posons $\zeta = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$ et nous prenons le logarithme de l'expression (6):

$$\ln\frac{\zeta}{w} = \ln\frac{r}{\rho} + i\ (\varphi - \theta) \approx -\frac{\sigma'}{2\pi}\,\frac{1+\rho e^{i(\theta-\alpha)}}{1-\rho e^{i(\theta-\alpha)}},$$

(*) Cette proposition peut être justifiée dans le cas où la courbure k du contour C, comme fonction de la longueur d'arc s de ce contour, satisfait à la condition de Hölder

$$|\ k\ (s+h) - k\ (s)\ | < A\ |\ h\ |^{\alpha},\quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Pour l'argumenter il faut utiliser une série de propriétés frontières des transformations $w = f\ (z)$. Nous donnons plus loin une démonstration du principe qui n'utilise pas des propriétés frontières de la fonction $f\ (z)$.

puis séparons les parties réelles et imaginaires:

$$\left.\begin{aligned} r &= \rho\left(1-\frac{\sigma'}{2\pi}\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}\right), \\ \varphi &= \theta-\frac{\sigma'}{2\pi}\,\frac{2\rho\sin(\theta-\alpha)}{1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

On obtient de ces équations toutes les propositions du théorème à démontrer. Il est clair que nous avons:

$$w = f(z,\ \widetilde{C}) = g\,[f(z,\ C)]; \tag{8}$$

par conséquent, par la transformation $\zeta = f(z,\ C)$, le domaine $D(\widetilde{C}_\rho)$ a pour image le domaine $D(C'_\rho)$. Puisque $D(C_\rho)$ par cette transformation a pour image le cercle $|\zeta| < \rho$, pour démontrer la première partie du théorème, il suffit de démontrer que $D(C'_\rho)$ est contenu dans le cercle $|\zeta| < \rho$. Mais comme $1 - 2\rho\cos(\theta - \alpha) + \rho^2 \leqslant (1+\rho)^2$, d'après la formule (7) pour tous les points du contour C'_ρ nous avons:

$$|\zeta| = r \leqslant \rho\left(1-\frac{\sigma'}{2\pi}\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\right) < \rho. \tag{9}$$

Ainsi, la première proposition du théorème est entièrement démontrée.

Divisant l'inégalité (9) par ρ et faisant tendre ρ vers 0, nous avons à la limite

$$\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|_{w=0} \leqslant 1-\frac{\sigma'}{2\pi} < 1.$$

Mais alors $|g'(0)| > 1$ et d'après la formule (8)

$$|f'(z_0,\ \widetilde{C})| = |g'(0)|\cdot|f'(z_0,\ C)| > |f'(z_0,\ C)|,$$

ce qui démontre la deuxième proposition.

Soit maintenant $\zeta = re^{i\varphi}$ un point qui tend vers le point $e^{i\varphi}$ de la circonférence $|\zeta| = 1$ suivant le rayon de cette circonférence, de plus $e^{i\varphi}$ se trouve à l'extérieur de σ'. Alors, vu que la représentation est conforme, le point correspondant $w = \rho e^{i\theta}$ tend vers le point $e^{i\theta}$ suivant une direction tangente au rayon de la circonférence $|w| = 1$ et nous avons: $|\Delta\zeta| = |\zeta - e^{i\varphi}| = 1 - r$, $|\Delta w| = |w - e^{i\theta}| \approx 1 - \rho$. Mais il vient de l'inégalité (9):

$$\frac{1-\rho}{1-r} \leqslant \frac{1-\rho}{1-\rho+\dfrac{\sigma'\rho}{2\pi}\,\dfrac{1-\rho}{1+\rho}} \approx 1-\frac{\sigma'}{2\pi}\,\frac{\rho}{1+\rho},$$

et en passant à la limite lorsque $r \to 1$, nous obtenons:

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=e^{i\varphi}} = \lim_{r\to 1}\frac{1-\rho}{1-r} \leqslant 1-\frac{\sigma'}{4\pi}.$$

D'où il découle la proposition 3) du théorème.

Pour démontrer la dernière proposition du théorème désignons par $\widetilde{C}^*$ le contour qui s'obtient de C par l'homothétie $\zeta = z_0 + \lambda (z - z_0)$ (fig. 135). Il est clair que la fonction

$$w = f(\zeta, \widetilde{C}^*) = f\left(z_0 + \frac{\zeta - z_0}{\lambda}, C\right) \tag{10}$$

réalise la représentation conforme du domaine $D(\widetilde{C}^*)$ sur le cercle unité. Mais $D(\widetilde{C}^*)$ est contenu dans $D(\widetilde{C})$ et le point $\widetilde{z}_2$ appartient aussi bien à $\widetilde{C}$ qu'à $\widetilde{C}^*$. Donc, d'après la proposition 3) du théorème

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}^*)| < |f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C})|.$$

Mais puisque de (10) nous avons $f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}^*) = \frac{1}{\lambda} f'(z_2, C)$, il vient

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C})| \geqslant \frac{1}{\lambda} |f'(z_2, C)|.$$

Le théorème est complètement démontré.

Une conséquence simple du théorème qui vient d'être démontré est le *principe de Montel*:

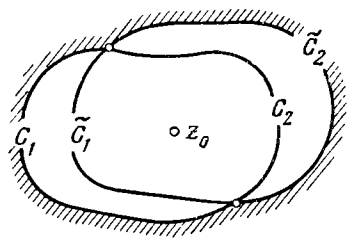

FIG. 136

Théorème 2. *Soient $D(C)$ et $D(\widetilde{C})$ des domaines qui contiennent le point z_0 et $C = C_1 \cup C_2$, $\widetilde{C} = \widetilde{C}_1 \cup \widetilde{C}_2$; de plus $\widetilde{C}_1$ appartient à $D(C)$, $\widetilde{C}_2$ se trouve à l'extérieur de $D(C)$, C_1 à l'extérieur de $D(\widetilde{C})$ et C_2 dans $D(\widetilde{C})$* (fig. 136). *Supposons en outre que par les transformations*

$$w = f(z, C), \quad w = f(z, \widetilde{C})$$

les arcs de courbe C_1 et $\widetilde{C}_1$ ont pour images respectivement les arcs de courbe ϑ_1 et $\widetilde{\vartheta}_1$; alors les longueurs de ces arcs de courbe vérifient la relation (*)

$$\widetilde{\vartheta}_1 \geqslant \vartheta_1, \tag{11}$$

de plus, le signe d'égalité n'a lieu que si C et $\widetilde{C}$ coïncident.

Pour démontrer ce théorème introduisons le domaine auxiliaire $D(C')$ de frontière la courbe $C' = \widetilde{C}_1 \cup C_2$ et désignons par ϑ' l'image de C_2 par la transformation $w = f(z, C')$. Puisque $D(C')$ appartient à $D(\widetilde{C})$ et que l'arc de courbe $\widetilde{C}_1$ appartient à C' et à $\widetilde{C}$, d'après la troisième proposition du principe de Lindelöf, on a en chaque point de $\widetilde{C}_1$

$$|f'(z, \widetilde{C})| \geqslant |f'(z, C')|.$$

(*) Nous désignons par la même lettre la longueur d'un arc de courbe et l'arc de courbe.

Par conséquent, tenant compte du sens géométrique du module de la dérivée, nous avons:

$$\widetilde{\vartheta}_1 \geqslant 2\pi - \vartheta'. \tag{12}$$

D'autre part, $D(C')$ est intérieur au domaine $D(C)$ et l'arc de courbe C_2 appartient aux courbes C' et C, donc, d'après les mêmes considérations,

$$\vartheta' \leqslant 2\pi - \vartheta_1. \tag{13}$$

Réunissant les inégalités (12) et (13) nous trouvons l'inégalité cherchée (11).

Pour terminer remarquons que les principes variationnels de Montel et de Lindelöf qui viennent d'être démontrés peuvent aussi être obtenus à l'aide du lemme de Schwarz (n° 15). En effet, ces principes découlent de la proposition selon laquelle le domaine $D(C'_\rho)$, l'image du cercle $|w| < \rho$ par la transformation $\zeta = h(w)$ inverse de la transformation $w = g(\zeta)$, appartient au cercle $|\zeta| < \rho$ (nous nous en tenons aux notations introduites dans la démonstration du théorème 1). Mais comme la fonction $\zeta = h(w)$, $h(0) = 0$, transforme le cercle $|w| < 1$ sur le domaine $D(C')$ qui appartient au cercle $|\zeta| < 1$, d'après le lemme de Schwarz pour tout w, $|w| < 1$, nous avons $|h(w)| < |w|$. D'où il découle la proposition d'après laquelle pour tout ρ le domaine $D(C'_\rho)$ appartient au cercle $|\zeta| < \rho$.

Ces principes peuvent aussi être obtenus directement du principe du maximum pour les fonctions harmoniques (n° 42). Cette méthode a une importance particulière lorsqu'on généralise les principes variationnels à des transformations plus générales que les transformations conformes et notamment aux transformations quasi conformes (n° 56) pour lesquelles le principe du maximum est valable.

Soient $w = f(z)$, $f(z_0) = 0$ et $w = \widetilde{f}(z)$, $\widetilde{f}(z_0) = 0$ les fonctions qui réalisent respectivement la représentation conforme des domaines $D(C)$ et $D(\widetilde{C})$ sur le cercle unité. La fonction

$$P(x, y) = \ln |f(z)|$$

est harmonique partout dans le domaine $D(C)$, excepté au point $z = z_0$, de plus $P(x, y) - \ln |z - z_0|$ est régulière dans ce domaine. Puisque $|f(z)| = 1$ sur C, $P(x, y)$ s'annule sur C. Sur la courbe C_ρ nous avons:

$$P(x, y) = \ln \rho, \tag{14}$$

de sorte que (14) peut être considérée comme l'équation de C_ρ.

Il nous faut démontrer que, pour une déformation du contour C vers l'intérieur du domaine $D(C)$, pour tout ρ, $0 < \rho < 1$, le domaine $D(\widetilde{C}_\rho)$ est contenu à l'intérieur de $D(C_\rho)$. Mais, d'après le principe du maximum, nous avons $P(x, y) < 0$ partout à l'intérieur de $D(C)$ et vu que sur la portion de $\widetilde{C}$ qui ne coïncide pas avec C

$\widetilde{P}(x, y) = \ln |\widetilde{f}(z)| = 0$, alors que sur la portion commune de C et $\widetilde{C}$ ces deux fonctions sont nulles, on a partout à l'intérieur de $D(\widetilde{C})$

$$P(x, y) < \widetilde{P}(x, y).$$

En vertu de l'équation (14) et de l'équation analogue pour la courbe $\widetilde{C}_\rho$, on peut affirmer que $D(\widetilde{C}_\rho)$ est contenu dans $D(C_\rho)$ pour tout ρ, $0 < \rho < 1$.

61. Extension du principe. Le principe variationnel fondamental démontré ci-dessus (n° 60) s'étend aussi aux fonctions qui réalisent la représentation conforme sur d'autres types de domaines canoniques.

1) Extérieur du cercle. Désignons par $\Delta(C)$ le domaine extérieur au contour fermé C; soit

$$w = F(z, C), \quad F(\infty, C) = \infty \tag{1}$$

la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine $\Delta(C)$ sur l'extérieur du cercle unité $|w| > 1$. Conservant les notations adoptées, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 1. *Si un domaine $\Delta(\widetilde{C})$ est contenu dans un domaine $\Delta(C)$, alors*

1) *pour tout $\rho > 1$, le domaine $\Delta(\widetilde{C}_\rho)$ est contenu dans le domaine $\Delta(C_\rho)$; le contact des contours $\widetilde{C}_\rho$ et C_ρ pour un ρ quelconque n'est possible que si $\widetilde{C}$ et C coïncident;*

2) *au point à l'infini*

$$|F'(\infty, \widetilde{C})| \geqslant |F'(\infty, C)|; \tag{2}$$

3) *au point z_1 commun aux contours $\widetilde{C}$ et C*

$$|F'(z_1, \widetilde{C})| \leqslant |F'(z_1, C)|; \tag{3}$$

4) *si les contours sont étoilés par rapport au point $z = 0$, alors aux points de plus grande déformation z_2 et $\widetilde{z_2}$*

$$|F'(\widetilde{z_2}, \widetilde{C})| \geqslant \frac{1}{\lambda} |F'(z_2, C)|. \tag{4}$$

Le signe d'égalité n'a lieu que si $\widetilde{C}$ et C coïncident.

La démonstration peut être faite de la même manière qu au n° 60 si au lieu de (5) on utilise la transformation de l'extérieur du cercle unité duquel on a retranché une lunule sur l'extérieur d'un cercle. Il est plus simple d'obtenir ce théorème en le ramenant au théorème déjà démontré à l'aide du changement de variables

$$z - z_0 = \frac{1}{\zeta}, \quad w = \frac{1}{\omega}.$$

2) Cas d'un demi-plan. Supposons que la courbe C passe par le point à l'infini et possède à l'infini une tangente et une courbure finie (*); alors la circonférence $|z| = R$, pour R suffisamment grand, coupe C en deux points dont la différence des arguments est aussi voisine que l'on veut de π.

Supposons encore que le demi-axe imaginaire positif, en sa partie suffisamment éloignée, ne coupe pas C et désignons par $D(C)$ le domaine de frontière C contenant cette partie. Nous convenons de désigner par

$$w = f(z, C), \quad f(\infty, C) = \infty, \quad |f'(\infty, C)| = 1, \qquad (5)$$

la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine $D(C)$ sur le demi-plan supérieur $v > 0$. D'après le théorème d'existence, pour les conditions imposées à la courbe C, la fonction f existe et est définie à une constante additive réelle près. Etant donné que par la suite cette constante ne joue aucun rôle, nous sous-entendons par f une fonction quelconque satisfaisant à ces conditions. Soient enfin C_v et $\widetilde{C}_v$ les courbes qui ont pour image, par les transformations $w = f(z, C)$, $w = f(z, \widetilde{C})$, la droite $v = \text{const}$ (fig. 137). Avec ces notations nous avons le théorème suivant:

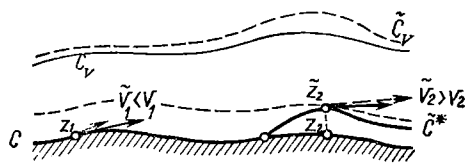

FIG. 137

Théorème 2. *Soit $\widetilde{C}$ une courbe qui passe par le point ∞ et y possède une tangente commune avec C. Si, de plus, le domaine $D(\widetilde{C})$ est contenu dans le domaine $D(C)$, alors:*

1) *pour tout $v > 0$, le domaine $D(\widetilde{C}_v)$ est contenu dans le domaine $D(C_v)$, de plus le contact de $\widetilde{C}_v$ avec C_v n'est possible que si $\widetilde{C}$ et C coïncident;*

2) *si C et $\widetilde{C}$ ont un point régulier commun z_1, alors en ce point*

$$|f'(z_1, \widetilde{C})| \leqslant |f'(z_1, C)|, \qquad (6)$$

de plus le signe d'égalité n'est possible que si $\widetilde{C}$ et C coïncident;

3) *si les courbes C et $\widetilde{C}$ sont données par les fonctions uniformes $y = y(x)$, $y = \widetilde{y}(x)$ et si z_2 et $\widetilde{z}_2$ sont respectivement les points de ces courbes en lesquels $\widetilde{y}(x) - y(x)$ atteint un maximum, alors*

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C})| \geqslant |f'(z_2, C)|, \qquad (7)$$

(*) Cela signifie que la courbe C^* qui s'obtient de C par la transformation $\zeta = \frac{1}{z}$ possède au point $\zeta = 0$ une tangente et une courbure finie.

de plus le signe d'égalité n'a lieu que dans le cas où $\widetilde{C}$ s'obtient de C par une translation parallèle à l'axe des y.

En vertu des considérations données au n° 60, il suffit de considérer le cas où C coïncide avec l'axe des x et $\widetilde{C}$ diffère de C sur un intervalle infiniment petit $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, sur lequel $\widetilde{C}$ est un arc de circonférence de faible courbure. Mais dans ce cas $f(z,\ C)\equiv z$ et, en vertu de la formule (7) du n° 34,

$$f(z,\ \widetilde{C})\approx z+\frac{\sigma}{\pi}\cdot\frac{1}{z-a} \tag{8}$$

aux infiniment petits d'ordre supérieur près. On trouve la fonction inverse de la même manière qu'au n° 60 et elle est de la forme

$$z\approx w-\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{w-a}.$$

Posant ici $w=u+iv$ et séparant les parties réelle et imaginaire, pour v fixe, nous trouvons les équations paramétriques de la courbe $\widetilde{C}_v$:

$$\left.\begin{aligned} x&\approx u-\frac{\sigma}{\pi}\frac{u-a}{(u-a)^2+v^2},\\ y&\approx v+\frac{\sigma}{\pi}\frac{v}{(u-a)^2+v^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

De la seconde équation (9) on voit que $\widetilde{C}_v$ se trouve dans le domaine $y>v$, c'est-à-dire dans le domaine $D\ (C_v)$. Ceci démontre la première proposition du théorème.

Pour démontrer la proposition 2), prenons un point arbitraire sur l'axe des x, éloigné de a par rapport à σ, et calculons en ce point la dérivée de la fonction (8) ; nous avons

$$f'(x,\ \widetilde{C})\approx 1-\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{(x-a)^2}<1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour démontrer la proposition 3) désignons par $\widetilde{C}^*$ la courbe qui s'obtient de $\widetilde{C}$ par une translation de vecteur $\widetilde{z}_2-z_2$ (vers le haut). Nous avons évidemment $f(z,\ \widetilde{C}^*)=f(z-\widetilde{z}_2+z_2,\ C)$, d'où

$$f'(\widetilde{z}_2,\ \widetilde{C}^*)=f'(z_2,\ C).$$

D'autre part, $D\ (\widetilde{C}^*)$ appartient au domaine $D\ (\widetilde{C})$ et $\widetilde{z}_2$ est un point commun à $\widetilde{C}$ et $\widetilde{C}^*$; par conséquent, d'après la proposition 2) déjà démontrée

$$|f'(\widetilde{z}_2,\ \widetilde{C}^*)|\leqslant|f'(\widetilde{z}_2,\ \widetilde{C})|.$$

Comparant les deux dernières relations nous en déduisons l'inégalité cherchée (7). Le théorème est démontré.

Le théorème qui vient d'être démontré a une interprétation hydrodynamique simple. Supposons que le profil du fond d'un

canal très profond à parois verticales planes dans lequel circule un liquide parfait incompressible ait la forme de la courbe C. Alors *si en une partie quelconque du canal on relève le fond, alors toutes les lignes de courant s'élèvent, et la vitesse diminue aux points non déformés du fond et augmente au point de plus grande déformation.*

3) Cas de la bande. Soient C_0 et C deux arcs de courbe sans points communs autres que les extrémités a_1, a_2. En outre, nous n'excluons pas le cas où l'un des points a ou les deux points coïncident avec le point $z = \infty$. Désignons par $D(C_0, C)$ le domaine de frontière les courbes C_0 et C et par

$$w = f(z, C_0, C); \quad f(a_1, C_0, C) = -\infty, \quad f(a_2, C_0, C) = \infty \tag{10}$$

la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine $D(C_0, C)$ sur la bande $0 < v < 1$. La fonction $f(z, C_0, C)$ est définie à un terme additif réel près qui pour l'instant ne nous intéresse pas. Par C_v nous désignons la courbe qui a pour image, par la transformation (10), la droite $v = \text{const}$ $(0 < v < 1)$.

Supposons encore que les courbes C_0 et C soient données par des fonctions uniformes $y = y_0(x)$ et $y = y(x)$ telles que $|y_0'(x)|$ et $|y'(x)|$ ne soient pas supérieures à une constante positive m. Considérons le faisceau de droites parallèles $y = kx + b$, où $|k| < \frac{1}{m}$, dont chacune coupe C_0 et C au plus en un point. Le point z_2 du contour C_0 en lequel le segment de droite du faisceau, compris entre C_0 et $\widetilde{C}_0$, atteint sa plus grande valeur et le point correspondant $\widetilde{z}_2$ du contour $\widetilde{C}_0$ sont appelés *points de plus grande déformation* (dans la direction k).

On a le théorème:

Théorème 3. *Si le domaine $D(\widetilde{C}_0, C)$ est contenu dans le domaine $D(C_0, C)$, alors:*

1) *pour tout v $(0 < v < 1)$ le domaine $D(\widetilde{C}_v, C)$ est contenu dans le domaine $D(C_v, C)$, de plus le contact des courbes $\widetilde{C}_v$ et C_v n'est possible que si $\widetilde{C}_0$ et C_0 coïncident;*

2) *si les courbes $\widetilde{C}_0$ et C_0 ont un point commun z_1, alors en ce point*

$$|f'(z_1, \widetilde{C}_0, C)| \leqslant |f'(z_1, C_0, C)|; \tag{11}$$

3) *en un point quelconque z de la courbe C*

$$|f'(z, \widetilde{C}_0, C)| \geqslant |f'(z, C_0, C)|; \tag{12}$$

4) *aux points de plus grande déformation*

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0, C)| \geqslant |f'(z_2, C_0, C)|. \tag{13}$$

Le signe d'égalité dans (11)-(13) *n'a lieu que si les courbes $\widetilde{C}_0$ et C coïncident.*

Comme dans les cas précédents, la démonstration peut être faite en supposant que $D\ (C_0,\ C)$ soit la bande unité $0 < y < 1$ (C_0 est l'axe des x, C la droite $y = 1$) et que $\widetilde{C}_0$ coïncide partout avec C_0 sauf sur une petite portion $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, où elle a la forme d'un arc de circonférence de faible courbure. Avec cette supposition la fonction $f\ (z,\ \widetilde{C}_0,\ C)$, en vertu de la formule (13) du n° 34, a la forme :

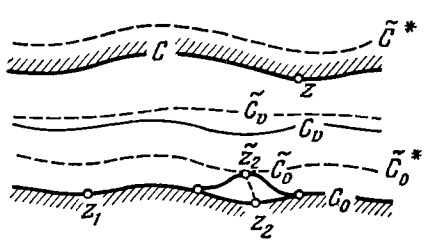

FIG. 138

$$w = f\ (z,\ \widetilde{C}_0,\ C) \approx$$

$$\approx z + \frac{\sigma}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi\,(z-a)}{2}, \quad (14)$$

où σ est l'aire de la lunule que l'on a retranchée. On vérifie la proposition 1) du théorème de la même manière que précédemment et pour cette raison nous ne la donnons pas. Pour démontrer les propositions 2) et 3) considérons la dérivée de la fonction (14). Nous avons sur l'axe des x :

$$f'\ (x,\ \widetilde{C}_0,\ C) \approx 1 - \frac{\pi\sigma}{4}\,\frac{1}{\mathrm{sh}^2\,\frac{\pi}{2}\,(x-a)} < 1,$$

d'où il découle l'inégalité (11). Sur la droite $y = 1$

$$f'\ (x+i,\ \widetilde{C}_0,\ C) \approx 1 + \frac{\pi\sigma}{4}\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\frac{\pi\,(x-a)}{2}} > 1,$$

d'où il découle (12) (remarquons que $\mathrm{sh}\left(\frac{\pi i}{2} + z\right) = i\,\mathrm{ch}\,z$).

Pour démontrer la proposition 4) désignons par $\widetilde{C}_0^*$ et $\widetilde{C}^*$ les courbes qui s'obtiennent de C_0 et C par une translation de vecteur $z_2\widetilde{z}_2$ (cf. la fig. 138). Il est clair que la fonction

$$w = f\ (z,\ \widetilde{C}_0^*,\ \widetilde{C}^*) = f\ (z + z_2 - \widetilde{z}_2,\ C_0,\ C) \quad (15)$$

réalise la transformation de $D\ (\widetilde{C}_0^*,\ \widetilde{C}^*)$ sur la bande $0 < v < 1$. Puisque $D\ (C_0,\ C)$ contient le domaine $D\ (\widetilde{C}_0^*,\ C)$ et $\widetilde{C}_0^*$ et $\widetilde{C}_0$ ont un point commun $\widetilde{z}_2$, d'après (11)

$$|\ f'\ (\widetilde{z}_2,\ \widetilde{C}_0^*,\ C)\ | \leqslant |\ f'\ (\widetilde{z}_2,\ \widetilde{C}_0,\ C)\ |. \quad (16)$$

D'autre part, puisque $D\ (\widetilde{C}_0^*,\ C)$ est contenu dans $D\ (\widetilde{C}_0^*,\ \widetilde{C}^*)$, d'après (12), en tout point de la frontière non déformée $\widetilde{C}_0^*$ et, en particulier, au point $\widetilde{z}_2$

$$|\ f'\ (\widetilde{z}_2,\ \widetilde{C}_0^*,\ \widetilde{C}^*)\ | \leqslant |\ f'\ (\widetilde{z}_2,\ \widetilde{C}_0^*,\ C)\ |. \quad (17)$$

Réunissant les inégalités (16) et (17) nous obtenons:

$$| f' (\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0^*, \widetilde{C}^*) | \leqslant | f' (\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0, C) |,$$

mais il vient de (15) $f' (\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0^*, \widetilde{C}^*) = f' (z_2, C_0, C)$ et l'inégalité (13) est démontrée ainsi que le théorème 3.

Le théorème 3 admet aussi une interprétation hydrodynamique. Supposons que les parois d'un canal de fond horizontal aient la forme de surfaces cylindriques à génératrices verticales et qu'un liquide parfait incompressible soit en mouvement dans le canal à débit fixe. Alors,

lorsqu'on déforme vers l'intérieur une paroi du canal, toutes les lignes de courant se rapprochent de la paroi opposée, la vitesse dans des parties non déformées de la première paroi diminue tandis que la vitesse aux points de plus grande déformation et en tous les points de la deuxième paroi augmente.

62. Dérivées frontières. Les principes variationnels établis plus haut admettent différentes améliorations quantitatives. Avant de passer à ces améliorations notons une application simple de ces principes pour l'estimation de la dérivée frontière. Revenons au cas de la transformation des domaines simplement connexes D (C) sur le cercle unité $| w | < 1$ avec la condition qu'un point quelconque fixe z_0 de ces domaines a pour image le centre du cercle $w = 0$.

Soit z_1 un point régulier quelconque de C; faisons passer par le point z_1 deux contours fermés C_1 et C_2 tangents à C au point z_1 de manière que le domaine D (C_1) contienne le point z_0 et soit contenu dans le domaine D (C) et que le domaine D (C_2) contienne le domaine D (C). En vertu du théorème 1 du n° 60 nous avons:

$$| f' (z_1, C_1) | < | f' (z_1, C) | < | f' (z_1, C_2) |. \qquad (1)$$

Si on prend pour D (C_1) et D (C_2) les domaines que l'on transforme sur le cercle unité à l'aide de fonctions connues, alors les inégalités obtenues donnent des estimations supérieures et inférieures numériques concrètes pour $| f' (z, C) |$.

Appliquons cette considération générale à l'estimation de $| f' (z, C) |$ dans le cas où la courbe C diffère peu de la circonférence unité.

Théorème 1. *Supposons que la courbe C satisfasse aux conditions suivantes*:

1) *C appartient à la couronne* $1 - \varepsilon < | z | < 1 + \varepsilon$;

2) *les angles de la tangente à C et de la tangente à la circonférence* $| z | = 1$ *aux points d'argument égal ne sont pas supérieurs à* μ;

3) *la courbure k de la courbe C diffère de l'unité au plus de* ε_1.

Dans ces conditions nous avons pour la dérivée frontière de la fonction $w = f (z, C)$, $f (0, C) = 0$, *qui réalise la représentation conforme*

de D (C) sur le cercle unité, les estimations:

$$\frac{1-\varepsilon-2\varepsilon_1-\mu^2}{1+\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1}<|f'(z, C)|<\frac{1+\varepsilon+2\varepsilon_1-\mu^2}{1-\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon\varepsilon_1}, \tag{2}$$

ou les estimations plus grossières

$$1-2\varepsilon-\varepsilon_1-\eta<|f'(z, C)|<1+2\varepsilon+\varepsilon_1+\eta, \tag{3}$$

dans lesquelles η est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier par rapport à ε, ε_1 et μ. Pour obtenir les estimations cherchées, il suffit d'utiliser le procédé général décrit plus haut.

Soit $z_1 = re^{i\varphi}$ un point arbitraire de C; faisons passer par z_1 la circonférence C_1 de rayon $r_1 = \frac{1}{1+\varepsilon_1}$ tangente à la courbe C et, pour plus de simplicité, supposons que par la transformation considérée le point z_1 correspond au point $w = 1$. Considérons la fonction $z = g(w)$ $(g(0) = 0,\ g(1) = z_1)$ qui réalise la représentation conforme du cercle $|w|<1$ sur le cercle C_1. En vertu du principe variationnel fondamental (cf. n° 60)

$$|f'(z_1, C)|>\frac{1}{|g'(1)|}. \tag{4}$$

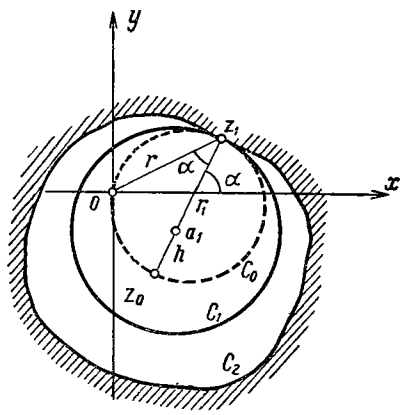

FIG. 139

Le calcul de $g'(1)$ se simplifie grâce à la remarque suivante. Considérons la famille de toutes les transformations du cercle $|w|<1$ sur le cercle C_1 qui font correspondre w_1 à un point fixe z_1 de la circonférence C_1 et qui possèdent en ce point une dilatation fixe. Il est clair que cette famille dépend d'un paramètre réel. Montrons que l'image de tout point du cercle $|w|<1$ par toutes les transformations de cette famille décrit une certaine circonférence C_0 tangente à C_1 au point z_1. Pour le démontrer transformons d'une manière conforme les cercles $|w|<1$ et C_1 sur les demi-plans supérieurs $\operatorname{Im}\omega>0$ et $\operatorname{Im}\zeta>0$ de manière que les points w_1 et z_1 aient pour images les points à l'infini. La famille considérée se transforme en une famille de transformations du demi-plan supérieur sur lui-même qui conservent immobile le point ∞ et qui y ont une dilatation fixe, c'est-à-dire des transformations de la forme $\zeta = \alpha_0\omega + \beta$, où α_0 fixe et β variable sont des paramètres réels. Pour les différentes transformations de la famille, l'image d'un point fixe ω décrit évidemment une droite parallèle à l'axe $\operatorname{Im}\zeta = 0$, et revenant aux anciennes variables w et z nous obtenons ce que nous voulions.

Tenant compte de cette remarque nous menons la circonférence C_0 tangente à C au point z_1 et passant par l'origine des coordonnées, et nous remplaçons la condition $g(0) = 0$ par la condition $g(0) = z_0$, où z_0 désigne un point de C_0 diamétralement opposé à z_1. Désignons par a_1 le centre de la circonférence C_1, $h = |z_0 - a_1|$ et $\alpha_1 = \arg(z_1 - a_1)$. Nous avons (fig. 139) : $z_0 = a_1 - he^{i\alpha_1}$, $z_1 = a_1 + r_1 e^{i\alpha_1}$, et la fonction

$$z = r_1 e^{i\alpha_1}\zeta + a_1$$

réalise la représentation conforme du cercle $|\zeta| < 1$ sur le cercle C_1 de manière que les points $\zeta = 0$, 1 et $-\frac{h}{r_1}$ aient pour images les points $z = a_1$, z_1 et z_0. D'autre part, la fonction

$$\zeta = \frac{w - \frac{h}{r_1}}{1 - \frac{h}{r_1} w}$$

transforme le cercle $|w| < 1$ sur le cercle $|\zeta| < 1$ de manière que les points $w = 0$, 1 aient pour images les points $\zeta = -\frac{h}{r_1}$, 1.

On obtient donc pour la fonction à déterminer $z = g(w)$ ($g(0) = z_0$, $g(1) = z_1$) l'expression

$$z = g(w) = \frac{r_1 w - h}{r_1 - hw} r_1 e^{i\alpha_1} + a_1$$

et

$$|g'(1)| = \frac{r_1^2 - h^2}{(r_1 - h)^2} r_1 = \frac{r_1 + h}{r_1 - h} r_1. \tag{5}$$

Désignons par α l'angle des vecteurs z_1 et $z_1 - z_0$; il vient du triangle rectangle $z_0 O z_1$: $r = (r_1 + h)\cos\alpha$, d'où $\frac{h}{r_1} = \frac{r}{r_1 \cos\alpha} - 1$, et d'après (5)

$$|g'(1)| = \frac{1}{\frac{2}{r}\cos\alpha - \frac{1}{r_1}}.$$

Compte tenu de (4) nous avons :

$$|f'(z_1, C)| > \frac{2}{r}\cos\alpha - \frac{1}{r_1}. \tag{6}$$

D'après les conditions du théorème nous avons $1 - \varepsilon < r < 1 + \varepsilon$, $|\alpha| < \mu$, par conséquent, $\frac{2}{r}\cos\alpha \geqslant \frac{2}{1+\varepsilon}\left(1 - \frac{\mu^2}{2}\right)$, et comme $\frac{1}{r_1} < 1 - \varepsilon_1$, nous avons aux infiniment petits d'ordre supérieur au deuxième près :

$$|f'(z_1, C)| > \frac{(2-\mu^2)(1-\varepsilon_1) - (1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon_1)} \approx \frac{1 - \varepsilon - 2\varepsilon_1 - \mu^2}{1 + \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon\varepsilon_1} = 1 - 2\varepsilon - \varepsilon_1 - \eta,$$

où η est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

Remplaçant le cercle C_1 par le cercle C_2 de rayon $r_2 = \frac{1}{1-\varepsilon_1}$, nous obtenons une estimation supérieure analogue

$$|f'(z_1, C)| < \frac{2}{r}\cos\alpha - \frac{1}{r_2} \approx \frac{1+\varepsilon+2\varepsilon_1-\mu^2}{1-\varepsilon+\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1} = 1+2\varepsilon+\varepsilon_1+\eta,$$

et le théorème 1 est démontré.

Des estimations du module de la dérivée frontière avec la supposition supplémentaire $f'(0, C) > 0$ on peut également obtenir une estimation sur la frontière pour $|\arg f(z, C) - \arg z|$. Démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Pour toute transformation $w = f(z, C)$, $f(0, C) = 0$, $f'(0, C) > 0$, il existe sur la courbe C un point $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ d'argument fixe tel que*

$$f(r_0 e^{i\varphi_0}, C) = e^{i\varphi_0}.$$

Pour la démonstration désignons par $g(w)$ la fonction inverse de f et considérons dans le cercle unité $|w| < 1$ la fonction $\frac{g(w)}{w}$. Elle est analytique dans ce cercle et y est partout différente de zéro car $\lim\limits_{w\to 0}\frac{g(w)}{w} = g'(0) > 0$, donc la fonction $h(w) = \arg\frac{g(w)}{w} = \operatorname{Im}\ln\frac{g(w)}{w}$ y est harmonique. Nous avons $h(0) = \operatorname{Im}\ln g'(0) = 0$ et sur la circonférence $h(w) = \varphi - \theta$, où $\varphi = \arg g(\rho e^{i\theta})$. D'après le théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques

$$0 = h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi-\theta)\,d\theta;$$

par conséquent, il existe au moins un point pour lequel $\varphi - \theta = 0$. Le lemme est démontré.

Démontrons maintenant le théorème:

Théorème 2. *Dans les conditions du théorème précédent et avec la condition supplémentaire $f'(0, C) > 0$, en tout point $z = re^{i\varphi}$ de la frontière C, nous avons*:

$$|\arg f(z, C) - \arg z| < \pi(3\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta), \tag{7}$$

où η est un infiniment petit du deuxième ordre par rapport à ε, ε_1 et μ.

Soient φ_0 l'argument fixe, $\theta = \arg f(re^{i\varphi}, C)$ et ds l'élément de longueur de l'arc de courbe C au point $re^{i\varphi}$; nous avons:

$$\theta - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} |f'(re^{i\varphi}, C)|\,ds.$$

Dans nos conditions $\frac{1}{1+\varepsilon}\,d\varphi < ds < \frac{1}{1-\varepsilon}\,d\varphi$; par conséquent, tenant compte du premier membre de l'inégalité (3), nous avons

$$\theta - \varphi_0 > \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1-2\varepsilon-\varepsilon_1-\eta}{1+\varepsilon}\,d\varphi = (\varphi-\varphi_0) - (3\varepsilon+\varepsilon_1+\eta)(\varphi-\varphi_0),$$

ou

$$\theta - \varphi > -(3\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta)(\varphi - \varphi_0). \tag{8}$$

De la même manière, à l'aide du second membre de (3), nous avons :

$$\theta - \varphi < (3\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta)(\varphi - \varphi_0). \tag{9}$$

Réunissant les inégalités obtenues et remarquant que l'on ne peut considérer que les φ pour lesquels $|\varphi - \varphi_0| < \pi$ nous en déduisons l'inégalité cherchée (7).

L'estimation de $|\theta - \varphi|$ peut aussi être obtenue sans avoir recours à l'inégalité (3) et, de plus, avec des suppositions moins restrictives, par exemple sans supposer que ε_1 est petit. Indiquons brièvement la voie qui permet d'obtenir de telles estimations.

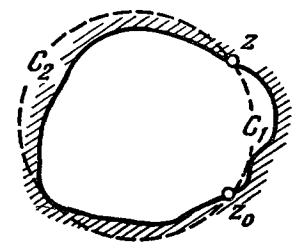

FIG. 140

Comme plus haut, il suffit d'évaluer la longueur de l'arc ϑ de la circonférence $|w| = 1$ correspondant à l'arc $\overset{\frown}{z_0 z}$ de la courbe C dont l'une des extrémités coïncide avec le point z_0 d'argument fixe. Réunissons pour cela les points z_0 et z par un arc de circonférence C_1, appartenant à $D(C)$ et tangent à $\overset{\frown}{z_0 z}$, et par un arc de circonférence C_2 appartenant à l'extérieur de $D(C)$ et tangent à C en un point extérieur à $\overset{\frown}{z_0 z}$ (fig. 140). D'après le principe de Montel (n° 60), par la représentation $w = f(z, C_1 \cup C_2)$, qui est réalisée par des fonctions élémentaires (cf. n° 34), l'arc de courbe C_1 a pour image un arc de circonférence $|w| = 1$ de longueur supérieure à ϑ ; nous obtenons donc l'estimation supérieure pour ϑ. Changeant les rôles de C_1 et C_2 nous obtenons l'estimation inférieure. Pour $\varepsilon < \mu < 0{,}1$ cette voie nous conduit à l'inégalité

$$|\arg f(z, C) - \arg z| < 1{,}6\,\mu. \tag{10}$$

Les deux théorèmes que l'on vient de démontrer donnent des estimations de la variation du module de la dérivée et de l'argument de la fonction qui réalise la transformation en fonction de la variation de la frontière du domaine. Ces théorèmes sont démontrés pour les points frontières, mais, en vertu du principe du maximum, ils sont vrais aussi dans l'intérieur du domaine.

§ 2. TRANSFORMATIONS DES DOMAINES VOISINS

On donne dans ce paragraphe des formules approchées de la représentation conforme des domaines qui diffèrent peu des domaines dont les transformations sur des domaines canoniques sont connues. Les résultats obtenus (n° 62) nous permettent d'évaluer la précision de ces formules approchées. Nous commençons par des domaines qui diffèrent peu du cercle unité.

63. Domaines voisins du cercle. Comme précédemment nous supposons que la courbe fermée C est voisine de la circonférence unité $|z| = 1$ du point de vue de la configuration et de la courbure, c'est-à-dire que dans son équation en coordonnées polaires

$$r = r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi) \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi) \tag{1}$$

nous supposons que

$$|\delta(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Nous obtenons la partie principale de $f(z, C)$ en partant de la formule (9) du n° 34 pour la représentation d'un cercle duquel on a retranché une lunule d'aire σ_t dont les points anguleux sont voisins de e^{it}

$$w \approx z\left\{1 + \frac{\sigma_t}{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\right\} = z + \frac{\sigma_t}{2\pi}\eta_t(z) \tag{3}$$

$$(w(0) = 0, \quad w'(0) > 0).$$

Supposons que l'on a retranché du cercle $|z| < 1$ deux lunules d'aires σ_{t_1} et σ_{t_2} dont les points anguleux sont respectivement voisins de e^{it_1} et e^{it_2}. Nous trouvons de la formule (3) la représentation du cercle $|z| < 1$ duquel on a retranché la lunule σ_{t_1} sur le cercle $|\omega| < 1$:

$$\omega \approx z + \frac{\sigma_{t_1}}{2\pi}\eta_{t_1}(z). \tag{4}$$

Pour le degré de précision adopté nous pouvons supposer que la lunule σ_{t_2} a pour image une lunule de même aire et de points anguleux voisins de $\omega = e^{it_2}$. Utilisons de nouveau la formule (3) d'après laquelle la fonction

$$w \approx \omega + \frac{\sigma_{t_2}}{2\pi}\eta_{t_2}(\omega) \tag{5}$$

réalise la représentation du cercle $|\omega| < 1$ duquel on a retranché la lunule σ_{t_2} sur le cercle $|w| < 1$. En portant dans (5) l'expression de ω tirée de (4) et en remarquant que grâce à la présence du facteur σ_{t_2} devant la fonction $\eta_{t_2}(\omega)$, pour le degré de précision adopté, on peut remplacer ω par z, nous obtenons la transformation du cercle $|z| < 1$ duquel on a retranché deux lunules sur le cercle

unité

$$w \approx z + \frac{\sigma_{t_1}}{2\pi}\,\eta_{t_1}(z) + \frac{\sigma_{t_2}}{2\pi}\,\eta_{t_2}(z). \qquad (6)$$

La formule (6) reste en vigueur si les portions de cercle que nous avons retranchées diffèrent des lunules par leur forme.

Passons au cas général d'un domaine D de frontière la courbe (1). Remplaçons cette courbe par une ligne polygonale formée d'arcs de circonférence et de segments de rayon (fig. 141). L'aire du secteur retranché est $\sigma_k = (1 - r(t_k))\,\Delta t_k = \delta(t_k)\,\Delta t_k$, où $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, donc en appliquant la formule (6), généralisée au cas de n secteurs retranchés, nous avons:

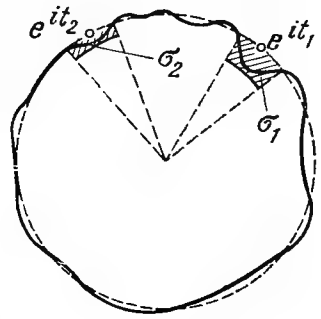

FIG. 141

$$f(z, C) \approx z + \frac{1}{i2\pi}\sum_{k=1}^{n}\delta(t_k)\,\eta_{t_k}(z)\,\Delta t_k.$$

Remplaçant la somme par l'intégrale et substituant à $\eta_t(z)$ son expression tirée de (3) nous trouvons la *formule* approchée *de la représentation conforme d'un domaine voisin du cercle sur un cercle*

$$f(z, C) \approx z\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right\} \qquad (7)$$

$$(f(0, C) = 0, \quad f'(0, C) > 0).$$

L'établissement de la formule (7) que nous venons de donner est géométriquement clair, néanmoins il n'est pas suffisamment rigoureux et ne donne pas l'estimation de l'erreur commise par cette formule. Pour cette raison nous donnons, en suivant G. Siryk (*), l'établissement analytique de cette formule basé sur l'intégrale de Schwarz (4) du n° 44.

Désignons par $z = g(w)$ la fonction inverse de la fonction $w = f(z, C)$. Alors $\frac{g(w)}{w}$ est une fonction régulière analytique dans le cercle $|w| < 1$, différente de zéro, donc $\ln\frac{g(w)}{w}$ peut être représentée par l'intégrale de Schwarz. Si l'on suppose connue la correspondance $\varphi = \varphi(\theta)$ des arguments des points $w = e^{i\theta}$ de la circonférence unité et des points $z = re^{i\varphi}$ de la courbe C et si l'on tient compte de ce que sur la circonférence $\operatorname{Re}\ln\frac{g(w)}{w} = \ln r[\varphi(\theta)]$,

(*) Г. В. Сирык, «О конформном отображении близких областей», Успехи матем. наук, т. XI, вып. 5 (71), 1956, 57-60.

où $r = r(\varphi)$ est l'équation polaire de C, alors cette intégrale s'écrit sous la forme

$$\ln \frac{g(w)}{w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln r[\varphi(\theta)] \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\, d\theta \tag{8}$$

(nous posons $C = 0$ dans la formule (4) du n° 44 car d'après les conditions adoptées $g'(0) > 0$ et, par conséquent, le premier membre de (8) est réel pour $w = 0$).

Pour estimer l'intégrale (8) nous avons recours au lemme suivant :

L e m m e. *Si une fonction $u(t)$ réelle, continûment dérivable sur le segment $[0, 2\pi]$ satisfait aux conditions*

$$u(0) = u(2\pi), \quad |u(t)| < \varepsilon, \quad |u'(t)| < \varepsilon, \tag{9}$$

alors l'intégrale de Schwarz

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dt \tag{10}$$

pour tous les z, $|z| < 1$, satisfait à l'inégalité :

$$|F(z)| < M\varepsilon, \tag{11}$$

où M est une constante.

Pour démontrer ce lemme remarquons d'abord qu'il découle des propriétés de l'intégrale de Schwarz que pour tous les z, $|z| < 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dt = 1,$$

donc

$$F(re^{i\varphi}) - u(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(t) - u(\varphi)] \frac{e^{it}+re^{i\varphi}}{e^{it}-re^{i\varphi}}\, dt.$$

Mais d'après les conditions du lemme et le théorème de la moyenne $|u(t) - u(\varphi)| < \varepsilon |t - \varphi|$, par conséquent, d'après le théorème de l'estimation des intégrales

$$|F(re^{i\varphi}) - u(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} |t-\varphi| \cdot \left| \frac{e^{it}+re^{i\varphi}}{e^{it}-re^{i\varphi}} \right| dt.$$

Il est clair que l'intégrale du second membre est bornée pour tous les r, $0 \leqslant r \leqslant 1$, et pour tous les φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, et comme par hypothèse $|u(\varphi)| < \varepsilon$, il vient

$$|F(re^{i\varphi})| \leqslant |F(re^{i\varphi}) - u(\varphi)| + |u(\varphi)| < M\varepsilon,$$

où M est une constante. Le lemme est démontré.

Revenons à l'établissement de la formule (7). En vertu de la condition $|\delta(\varphi)|<\varepsilon$, nous avons :

$$\ln r[\varphi(\theta)] = \ln\{1-\delta[\varphi(\theta)]\} = -\delta[\varphi(\theta)] + O(\varepsilon^2).$$

De plus, comme on le voit de la démonstration du théorème 2 du n° 62, pour les conditions (2) $\varphi'(\theta) = 1 + O(\varepsilon)$, donc

$$\{\delta[\varphi(\theta)]\}' = \delta'[\varphi(\theta)]\,\varphi'(\theta) = O(\varepsilon)$$

et

$$\{\ln r[\varphi(\theta)]\}' = -\frac{\{\delta[\varphi(\theta)]\}'}{1-\delta[\varphi(\theta)]} = -\{\delta[\varphi(\theta)]\}' + O(\varepsilon^2).$$

Ainsi, d'après le lemme démontré, le remplacement de $\ln r[\varphi(\theta)]$ par $-\delta[\varphi(\theta)]$ dans l'intégrale (8) donne une erreur de l'ordre de $O(\varepsilon^2)$.

Puis, d'après le théorème 2 du n° 62 $\theta - \varphi = O(\varepsilon)$, donc dans nos conditions

$$\delta(\varphi) = \delta(\theta) + \delta'(\varphi^*)(\theta - \varphi) = \delta(\theta) + O(\varepsilon^2),$$

$$\{\delta(\varphi(\theta))\}' - \delta'(\theta) = \delta'(\varphi)[1 + O(\varepsilon)] - \delta'(\theta) =$$

$$= \delta'(\varphi) - \delta'(\theta) + O(\varepsilon^2) = \delta''(\varphi^{**})(\varphi - \theta) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2)$$

(φ^*, φ^{**} sont des points compris entre θ et φ). Ainsi, d'après le lemme on peut encore remplacer $\delta[\varphi(\theta)]$ par $\delta(\theta)$ dans l'intégrale considérée avec le degré de précision adopté, et nous obtenons :

$$\ln\frac{g(w)}{w} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\,d\theta + O(\varepsilon^2). \qquad (12)$$

Puisque d'après ce même lemme, dans nos conditions, $\ln\frac{g(w)}{w} = O(\varepsilon)$, on a $\frac{g(w)}{w} = e^{\ln\frac{g(w)}{w}} = 1 + \ln\frac{g(w)}{w} + O(\varepsilon^2)$ et au lieu de (12) on peut écrire

$$z = g(w) = w\left\{1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\,d\theta\right\} + O(\varepsilon^2). \qquad (13)$$

De cette formule il est aussi facile d'obtenir la formule de la transformation inverse $w = f(z, C)$; pour cela il suffit d'écrire (13) sous la forme

$$w = \frac{z}{1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\,d\theta} + O(\varepsilon^2) =$$

$$= z\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\,d\theta\right\} + O(\varepsilon^2),$$

et de remarquer, compte tenu des relations $\delta(\theta) = O(\varepsilon)$, $w - z = O(\varepsilon)$, que l'on peut remplacer w par z dans l'intégrale en conservant le degré de précision adopté. Ainsi, nous avons démontré le théorème :

Théorème. *Si une courbe C d'équation polaire*

$$r = r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi)$$

vérifie les conditions

$$|\delta(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon,$$

alors la fonction $w = f(z, C)$, $f(0, C) = 0$, $f'(0, C) > 0$, qui réalise la représentation conforme du domaine $D(C)$ sur le cercle unité peut être représentée sous la forme

$$w = f(z, C) = z\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right\} + O(\varepsilon^2). \tag{14}$$

Il est utile, à des fins pratiques, de noter encore les relations entre les coordonnées polaires des points $z = re^{i\varphi}$ et $w = \rho e^{i\theta}$ qui se correspondent par la transformation considérée :

$$\left.\begin{aligned} r &\approx \rho\left\{1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}\,dt\right\}, \\ \varphi &\approx \theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\,\frac{2\rho\sin(\theta-t)}{1-2\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ces relations s'obtiennent en séparant les parties réelles et imaginaires dans la formule (13) (cf. n° 44) et elles sont valables aux infiniment petits d'ordre ε^2 près. Pour $\rho = \text{const}$ elles donnent les équations paramétriques des images réciproques des circonférences $|w| = \rho$.

La deuxième formule (15) est vraie aussi pour $\rho = 1$

$$\varphi \approx \theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta(t)\sin(\theta-t)}{1-\cos(\theta-t)}\,dt = \theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt,$$

d'où

$$\Delta\theta \approx \varphi - \theta \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,dt. \tag{16}$$

L'intégrale dans la formule (16) doit être comprise comme une intégrale singulière, car au point $t = \theta$ la fonction à intégrer devient infinie du premier ordre. Remarquant que d'après la propriété de l'intégrale d'une fonction périodique, les limites d'intégration dans (16) peuvent être prises de $\theta - \pi$ à $\theta + \pi$ et tenant compte de

ce que la fonction cotangente est impaire, nous obtenons que la valeur principale de l'intégrale est égale à

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-0}{2}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\,d\tau = \lim_{\alpha\to 0}\left\{\int_{-\pi}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi}\right\} = 0.$$

C'est pourquoi la formule (16) peut être écrite sous la forme

$$\Delta\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\delta(t) - \delta(\theta)\} \operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,dt, \tag{17}$$

où l'intégrale est comprise au sens ordinaire (cf. n° 52 ; la fonction $\delta(t)$ satisfait à la condition de Hölder puisqu'elle est deux fois dérivable).

La formule (16) est la plus importante pour les applications pratiques. On peut non seulement calculer la valeur de φ en fonction de θ à l'aide de cette formule, mais, avec les conditions (2), on peut encore calculer la valeur de la dérivée frontière. En effet, représentant la différence $\Delta\theta = \varphi - \theta$ à l'aide de la formule (17) et dérivant par rapport au paramètre θ, nous trouvons

$$\frac{d\varphi}{d\theta} \approx 1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{2\sin^2\frac{t-\theta}{2}} - \delta'(\theta)\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\right\}dt =$$

$$= 1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}\,dt,$$

car, comme nous l'avons souligné plus haut, l'intégrale de $\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}$ de 0 à 2π est nulle.

Mais aux infiniment petits du deuxième ordre par rapport à ε près la quantité $|g'(e^{i\theta})|$ est égale au rapport des longueurs des arcs de courbe qui se correspondent par la transformation (13), c'est-à-dire

$$|g'(e^{i\theta})| \approx \{1 - \delta(\varphi)\}\frac{d\varphi}{d\theta}. \tag{18}$$

D'où finalement

$$|g'(e^{i\theta})| \approx 1 - \delta(\varphi) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}\,dt, \tag{19}$$

ou, en passant à la fonction inverse,

$$|f'(z, C)| \approx 1 + \delta(\theta) - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(t)-\delta(\theta)}{\sin^2\frac{t-\theta}{2}}\,dt. \tag{20}$$

En raisonnant comme plus haut on peut évaluer l'erreur donnée par la formule (19) et, en particulier, on peut montrer que cette erreur est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à ε.

Dans les calculs pratiques de la fonction $f(z, C)$ d'après la variation $\delta(\varphi)$ il est plus simple de donner δ à l'aide d'une somme trigonométrique :

$$\delta(\varphi) = \varepsilon(a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \\ + b_2 \sin 2\varphi + \ldots). \qquad (21)$$

Portant ce développement dans la formule (14) nous aboutissons au calcul d'intégrales de la forme

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nt \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin nt \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt.$$

Pour les calculer remarquons que sur la circonférence unité, où $\zeta = e^{it}$, nous avons $\cos nt = \operatorname{Re}\zeta^n$ et $\sin nt = \operatorname{Re}(-i\zeta^n)$. Donc, en utilisant l'intégrale de Schwarz du n° 44, on peut affirmer que pour $|z| < 1$ ces intégrales sont respectivement égales à $I_1 = z^n$ et $I_2 = -iz^n$.

Tenant compte de ces résultats, nous tirons de (14) l'expression approchée de la fonction qui réalise la transformation du domaine $D(C)$ sur le cercle unité :

$$f(z, C) = z + \varepsilon z[a_0 + (a_1 - ib_1) z + \\ + (a_2 - ib_2) z^2 + \ldots] + O(\varepsilon^2). \qquad (22)$$

On trouve l'expression approchée de la fonction inverse de la manière ordinaire et elle a la forme

$$g(w) = w - \varepsilon w[a_0 + (a_1 - ib_1) w + (a_2 - ib_2) w^2 + \ldots] + \\ + O(\varepsilon^2),$$

d'où il est facile de trouver

$$g'(w) = 1 - \varepsilon[a_0 + 2(a_1 - ib_1) w + 3(a_2 - ib_2) w^2 + \ldots] + \\ + O(\varepsilon^2)$$

et notamment la dilatation sur la frontière

$$|g'(e^{i\theta})| = e^{\operatorname{Re}\ln g'(e^{i\theta})} = 1 - \varepsilon[a_0 + 2(a_1\cos\theta + \\ + b_1 \sin\theta) + 3(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \ldots] + \\ + O(\varepsilon^2), \qquad (23)$$

ainsi que la correspondance des arguments des points frontières

$$\varphi = \theta + \operatorname{Im}\ln\frac{g(w)}{w} = \theta - \varepsilon(a_1 \sin\theta - b_1\cos\theta + \\ + a_2 \sin 2\theta - b_2 \cos 2\theta + \ldots) + O(\varepsilon^2). \qquad (24)$$

Dans le cas où $\delta(\varphi)$ est donnée sous la forme d'un polynôme trigonométrique, les formules (22)-(24) sont très commodes pour les calculs.

Exemple. Considérons la transformation d'une ellipse de demi-axes $a = 1 + \varepsilon$ et $b = 1$ sur le cercle unité. Puisque $x = (1 + \varepsilon)\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ sont les équations de l'ellipse, on a $\rho = \sqrt{(1+\varepsilon)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 + \varepsilon\cos^2\varphi + O(\varepsilon^2)$, par conséquent, $\delta(\varphi) = -\varepsilon\cos^2\varphi = -\frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi)$ et d'après la formule (22)

$$f(z, C) = z - \frac{\varepsilon}{2} z(1 + z^2) + O(\varepsilon^2). \tag{25}$$

Pour terminer notons que toutes les formules de ce numéro restent en vigueur pour les représentations conformes

$$w = F(z, C), \quad F(\infty, C) = \infty$$

de l'*extérieur* des domaines voisins du cercle sur l'*extérieur* du cercle unité. Il faut de plus définir $\delta(\varphi)$ non pas de l'équation (1) mais de l'équation en coordonnées polaires de la courbe C donnée sous la forme

$$r = r(\varphi) = 1 + \delta(\varphi). \tag{26}$$

En effet, la formule (3), point de départ pour toutes les formules ultérieures de ce numéro, est vraie aussi pour les transformations de l'extérieur du cercle unité du plan des z duquel on a retranché une lunule sur l'extérieur du cercle unité du plan des w. On peut s'en convaincre facilement en faisant les transformations complémentaires $z = \frac{1}{\zeta}$, $w = \frac{1}{\omega}$ des plans des z et des w.

64. Domaines voisins d'un domaine donné. On donne ici la solution approchée du problème suivant, important pour les applications :

Soit donné un domaine simplement connexe $D(C)$ qui contient un point z_0 et supposons connue la fonction qui réalise la représentation conforme de $D(C)$ sur le cercle unité

$$w = f(z, C); \quad f(z_0, C) = 0, \quad f'(z_0, C) > 0. \tag{1}$$

On demande de déterminer la représentation conforme sur le cercle unité

$$w = f(z, \widetilde{C}); \quad f(z_0, \widetilde{C}) = 0, \quad f'(z_0, \widetilde{C}) > 0, \tag{2}$$

du domaine $D(\widetilde{C})$ voisin de $D(C)$.

Nous pouvons immédiatement donner, à l'aide des formules du n° 63, la solution du problème qui vient d'être posé. Soit z_1 un point de C qui a pour image le point $w = 1$. Désignons par s la longueur de l'arc de courbe du contour C compris entre les points z_1 et z. Quand z, partant du point z_1, décrit C dans le sens positif, la quantité s varie de

0 à l, où l est la longueur du contour C. Connaissant la transformation (1), par là même nous connaissons la relation entre l'argument θ des points de la circonférence $|w| = 1$ et la coordonnée s:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= |f'(z, C)|, \\ \theta &= \int_0^s |f'(z, C)|\, ds. \end{aligned}\right\}^{(*)} \tag{3}$$

Supposons maintenant que le contour $\widetilde{C}$ soit voisin de C au sens suivant. Désignons par $\delta(s)$ la longueur du segment de la normale à la courbe C, compris entre C et $\widetilde{C}$, prise avec le signe plus si ce segment se trouve à l'intérieur de $D(C)$ et avec le signe moins dans le cas contraire (fig. 142); nous supposons que

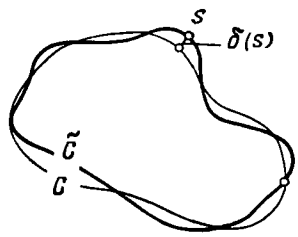

FIG. 142

$$|\delta(s)| < \varepsilon, \quad |\delta'(s)| < \varepsilon, \quad |\delta''(s)| < \varepsilon, \tag{4}$$

où ε est un petit nombre fixe.

Pour la transformation donnée $\omega = f(z, C)$ du domaine $D(C)$ sur le cercle unité du plan des $\omega = \rho e^{i\theta}$, la courbe $\widetilde{C}$ a pour image une certaine courbe $\widetilde{C}^*$ voisine de la circonférence unité (**); l'équation polaire de cette courbe, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, est de la forme:

$$\rho \approx 1 - |f'(z, C)|\,\delta(s) = 1 - \frac{d\theta}{d}\,\delta(s) = 1 - \delta^*(s),$$

où s est la fonction θ, définie par les formules (3). Soit

$$w = f(\omega, \widetilde{C}^*); \quad f(0, \widetilde{C}^*) = 0, \quad f'(0, \widetilde{C}^*) > 0, \tag{5}$$

la fonction définie par la formule (7) du n° 63, où l'on a remplacé $\delta(t)$ par $\delta^*(t)$; alors la transformation cherchée du domaine $D(\widetilde{C})$ sur le cercle unité peut évidemment être construite à l'aide de la formule suivante (***):

$$w = f(z, \widetilde{C}) = f[f(z, C, \widetilde{C}^*] \approx$$

$$\approx f(z, C)\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta^*(t)\,\frac{e^{it} + f(z, C)}{e^{it} - f(z, C)}\,dt\right\}. \tag{6}$$

(*) On suppose C suffisamment régulier.

(**) Si $\widetilde{C}$ a des parties qui appartiennent à l'extérieur de $D(C)$, il faut alors faire d'abord une homothétie de centre z_0 et de coefficient voisin de l'unité, après quoi l'image de $\widetilde{C}$ appartiendra à $D(C)$.

(***) Pour qu'il soit possible d'appliquer la formule (6) nous devons supposer que non seulement $\delta, \delta', \delta''$ sont petits mais aussi $\delta^*, \delta^{*\prime}, \delta^{*\prime\prime}$, ce qui a toujours lieu si le contour de départ est suffisamment différentiable, par exemple possède une courbure deux fois différentiable.

Utilisant les formules (16) et (19) du n° 63, on peut encore trouver la variation de la correspondance des frontières et la variation de la dérivée lorsqu'on passe d'une transformation donnée à une transformation voisine.

Arrêtons-nous encore sur un cas particulier important du problème que nous venons d'étudier, à savoir le cas où le contour $\widetilde{C}$ ne diffère de C que par un petit arc de centre au point a du contour (*variation locale*).

Soit σ l'aire comprise entre $\widetilde{C}$ et C ; nous prenons σ avec le signe plus si C se trouve dans D (C) et avec le signe moins dans le cas contraire. Pour la variation locale la formule (6) prend la forme

$$f(z, \widetilde{C}) \approx f(z, C)\left\{1+\frac{\sigma}{2\pi}|f'(a, C)|^2 \frac{e^{i\theta_0}+f(z, C)}{e^{i\theta_0}-f(z, C)}\right\}, \qquad (7)$$

où θ_0 est l'argument d'un point de la circonférence $|\omega| = 1$ correspondant, par la transformation $\omega = f(z, C)$, au centre de variation a. En effet, dans ce cas, au lieu de prendre la formule (7) du n° 63, nous avons recours à la formule (3) de ce même numéro, de plus au lieu de σ on prend $\sigma^* = |f'(a, C)|^2 \sigma$. Il découle immédiatement de la formule (7) que la *variation de la transformation f est proportionnelle à l'aire* σ *et, au voisinage de la portion du contour qui a subi la variation, est inversement proportionnelle à la distance à cette portion.*

Dans le cas d'une variation locale, lorsque la fonction $\delta(\varphi)$ est non nulle seulement sur une portion de longueur η au voisinage du point $e^{i\theta_0}$ de la circonférence $|\omega| = 1$, la formule (19) du n° 63 de la dilatation sur la frontière prend la forme :

$$\left|\frac{d\omega}{dw}\right| \approx 1+\frac{\delta(\theta_0)}{4\pi}\frac{\eta}{\sin^2\frac{\theta-\theta_0}{2}} \approx 1+\frac{\sigma^*}{4\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta-\theta_0}{2}} \qquad (8)$$

(nous supposons que $\omega = e^{i\theta}$ appartient à la portion non déformée de la frontière, c'est-à-dire $\delta(\theta) = 0$). Puis, d'après la formule de la dérivée d'une fonction composée

$$|f'(z, \widetilde{C})| = \left|\frac{dw}{d\omega}\right| \cdot \left|\frac{d\omega}{dz}\right| = \frac{|f'(z, C)|}{\left|\frac{d\omega}{dw}\right|},$$

en y substituant (8), nous trouvons la dérivée frontière

$$|f'(z, \widetilde{C})| \approx |f'(z, C)|\left\{1-\frac{\sigma}{4\pi}|f'(a, C)|^2 \frac{1}{\sin^2\frac{\theta-\theta_0}{2}}\right\}, \qquad (9)$$

où θ_0 et θ sont les arguments des points de la circonférence $|\omega| = 1$ qui correspondent par la transformation $\omega = f(z, C)$ aux points a et z du contour C.

On voit de la formule (9) que la *variation de la dérivée frontière de la fonction f est proportionnelle à l'aire* σ *et, au voisinage de la portion frontière qui a subi la variation, est inversement proportionnelle au carré de la distance à cette portion.*

65. Extension de résultats. Toutes les propositions et formules qui viennent d'être exposées peuvent être étendues au cas de la représentation conforme sur d'autres domaines canoniques. Cette extension peut être réalisée soit à l'aide d'une représentation conforme auxiliaire d'un cercle sur un tel domaine, soit directement à l'aide des principes variationnels du n° 60.

Donnons les formules les plus intéressantes qui s'y rapportent.

1) Cas du demi-plan. Conservons les notations adoptées au n° 60 et supposons que la courbe C est donnée par l'équation $y = y(x)$, de plus

$$|y| < \varepsilon, \quad |y'| < \varepsilon, \quad |y''| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} xy(x) = 0. \tag{1}$$

Dans ces conditions la fonction

$$w = f(z, C), \quad f'(\infty, C) = 1,$$

qui réalise la représentation conforme du domaine $D(C)$ sur le demi-plan supérieur, peut être représentée sous la forme approchée suivante

$$w = f(z, C) \approx z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)\,dt}{z-t} \tag{2}$$

(comparer avec la formule (7) du n° 34). Pour la fonction $g(w)$, inverse de $f(z, C)$, il en découle :

$$g(w) \approx w - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)\,dt}{w-t}. \tag{3}$$

Cette dernière formule est vraie pour toutes les valeurs w, $\operatorname{Im} w \geqslant 0$; en particulier, faisant $w = u$ nous obtenons la correspondance entre les points de la courbe C et de l'axe des u

$$x \approx u - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)\,dt}{u-t}, \tag{4}$$

ainsi que la formule approchée de la dérivée

$$|g'(u)| \approx 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t) - y(u)}{(t-u)^2}\,dt \tag{5}$$

(comparer avec la démonstration de la formule (19) du n° 64).

Toutes les formules que nous venons de donner sont vraies aux infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à ε près (*).

2) Cas de la bande. D'une façon entièrement analogue, en s'appuyant sur les principes variationnels du n° 58 et sur la formule (13) du n° 34, on peut obtenir facilement les formules approchées de la représentation conforme d'un domaine voisin de la bande $0 < y < 1$ sur la bande $0 < v < 1$.

Soient deux courbes C_0 et C: $y = y_0(x)$ et $y = y(x)$, où $y_0(x)$ et $y(x)$ sont des fonctions uniformes, en outre

$$|y_0| < \varepsilon, \quad |y_0'| < \varepsilon, \quad |y_0''| < \varepsilon,$$
$$|y - 1| < \varepsilon, \quad |y'| < \varepsilon, \quad |y''| < \varepsilon. \tag{6}$$

Dans ces conditions la fonction

$$w = f(z, C_0, C); \quad f(\pm\infty, C_0, C) = \pm\infty$$

aux infiniment petits du deuxième ordre par rapport à ε près peut être donnée par la formule suivante:

$$f(z, C_0, C) \approx z + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \operatorname{cth}\frac{\pi(z-t)}{2}\,dt + \\ + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \{1 - y(t)\} \operatorname{th}\frac{\pi(z-t)}{2}\,dt, \tag{7}$$

et la fonction $z = g(w)$, inverse de f, par la formule

$$z = g(w) \approx w - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \operatorname{cth}\frac{\pi(w-t)}{2}\,dt - \\ - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \{1 - y(t)\} \operatorname{th}\frac{\pi(w-t)}{2}\,dt. \tag{8}$$

Cette dernière formule est vraie dans la bande fermée $0 \leqslant v \leqslant 1$. En particulier, posant $w = u$ nous obtenons la correspondance entre les points de l'axe des u et ceux de la courbe C_0:

$$x \approx u - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \operatorname{cth}\frac{\pi(u-t)}{2}\,dt - \\ - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \{1 - y(t)\} \operatorname{th}\frac{\pi(u-t)}{2}\,dt. \tag{9}$$

(*) Les intégrales (4) et (5) ainsi que (2) et (3) pour les z et w réelles doivent être comprises comme des intégrales singulières.

Pour pouvoir dériver l'intégrale singulière (9) nous allons procéder de la manière suivante. Remarquant que la valeur principale de l'intégrale est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}\frac{\pi(u-t)}{2}\,dt = -\frac{2}{\pi}\lim_{\substack{M\to\infty\\ \alpha\to 0}}\left\{\left[\ln\left|\operatorname{sh}\frac{\pi(u-t)}{2}\right|\right]_{-M}^{u-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \left[\ln\left|\operatorname{sh}\frac{\pi(u-t)}{2}\right|\right]_{u+\alpha}^{M}\right\} = -\frac{2}{\pi}\lim_{M\to\infty}\ln\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(u-M)}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\pi(u+M)}{2}}\right| = 2u,$$

nous écrivons la formule (9) sous la forme

$$x \approx u - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{y_0(t)-y_0(u)\}\operatorname{cth}\frac{\pi(u-t)}{2}\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{1-y(t)\}\operatorname{th}\frac{\pi(u-t)}{2}\,dt - y_0(u)\,u.$$

Maintenant, en dérivant par rapport à u nous avons :

$$|g'(u)| \approx 1 - y_0(u) + \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0(t)-y_0(u)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi(t-u)}{2}}\,dt -$$

$$-\frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-y(t)}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi(t-u)}{2}}\,dt. \quad (10)$$

Donnons encore deux formules dans le cas où la variation est de caractère local. Soient $y(x) \equiv 1$ et $y_0(x) = 0$ en tous les points de l'axe des x, excepté sur un petit intervalle de centre au point a, et soit σ l'aire comprise entre l'axe des x et la courbe $y = y_0(x)$.

Dans ces conditions, à l'extérieur du voisinage du point a nous avons :

$$|f'(x, C)| \approx 1 + \frac{\pi}{4}\frac{\sigma}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi(x-a)}{2}},$$

$$|f'(x+i, C)| \approx 1 - \frac{\pi}{4}\frac{\sigma}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi(x-a)}{2}}. \quad (11)$$

Nous voyons des formules (11) que *dans le cas d'une bande l'influence de la variation locale s'amortit comme* e^{-l}, *où* l *est la distance à la portion qui a subi la variation.*

Répétant un nombre de fois suffisant la variation locale qui vient d'être décrite, on peut démontrer une proposition plus générale.

Principe de localisation. *Soit* $d(z)$ *le diamètre du plus grand cercle qui est tangent au point* z *à la courbe* C_0 *et qui est entièrement intérieur à la bande* $D(C_0, C)$ *et supposons que pour tous les points* z *de cette courbe*

$$d = \theta d^*, \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, \tag{12}$$

où d^*, $\theta_1 > 0$ *et* $\theta_2 < \infty$ *sont des constantes. Alors, pour une variation arbitraire de la bande* $D(C_0, C)$ *à l'extérieur du cercle* $|z - z_0| \leqslant l$ *la variation de la dilatation au point* z_0 *de la représentation conforme de la bande* $D(C_0, C)$ *sur la bande* $0 < v < h$ *satisfait à l'inégalité*

$$\delta |f'(z_0, C_0, C)| < Me^{-m\frac{l}{d^*}}, \tag{13}$$

où M *et* m *sont des constantes.*

On peut calculer que si la portion qui a subi la variation se trouve éloignée du point z_0 à une distance quatre fois supérieure à la largeur de la bande, alors la variation de $\ln |f'(z_0, C_0, C)|$ constitue moins de 1%.

Il découle aussi de la formule (13) la possibilité d'appliquer la formule (10) dans des conditions plus larges que celles qui ont permis de l'établir. Ainsi, si

$$\max \{|y_0|, |y-1|, |y_0'|, |y'|, |y_0''|, |y''|\} < \\ < \varepsilon \{|x - x_0|^{\mu} + 1\}, \tag{14}$$

où μ est un nombre positif quelconque, alors au point $z_0 = x_0 + iy_0(x_0)$

$$|f'(z_0, C_0, C)| = \\ = 1 - \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0(t) - y_0(x_0)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(t-x_0)}{2}}\, dt + \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - y(t)}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi(t-x_0)}{2}}\, dt + R, \tag{15}$$

de plus le reste R vérifie l'inégalité

$$|R| < k\varepsilon^2, \tag{16}$$

où k est une constante ne dépendant que de μ et de $\max |y(z) - y_0(x)|$.

3) Bandes étroites. La valeur en un point frontière quelconque de la dérivée de la représentation conforme d'une bande donnée sur une bande rectiligne dépend de la position de ce point et de toute la frontière de la bande. Dans le cas des bandes étroites ou des bandes dont la courbure varie lentement, pour les valeurs frontières de $|f'(z, C_0, C)|$ on peut donner une formule approchée dans laquelle ne participent que la largeur de la bande, l'angle entre C_0 et C et les courbures de ces courbes, de plus toutes ces quantités sont calculées au point frontière donné z d'une des courbes et en un certain point (défini par le point z) de l'autre courbe frontière. Nous allons nous arrêter sur le cas des bandes étroites.

Soit donnée une bande $D(C_0, C)$ et soit z_0 un point arbitraire de la courbe C. Par analogie avec les lunules (cf. n° 34) désignons par $n = n(z_0)$ le segment z_0z_0' de la normale à C au point z_0, par $\vartheta = \vartheta(z_0)$ l'angle des normales à C_0 et à C aux points z_0 et z_0' et par $k_0(z_0)$ et $k_0(z_0')$ les courbures de C et C_0 en ces points.

Soit encore

$$w = f(z, C_0, C, h); \quad f(\pm\infty, C_0, C, h) = \pm\infty$$

la fonction qui réalise la transformation de $D(C_0, C)$ sur la bande étroite $0 < v < h$. Dans ces notations nous avons le théorème :

T h é o r è m e. *Si h est un petit nombre positif et si les courbes C_0 et C satisfont aux conditions*

$$a_1h < n < a_2h; \quad |\vartheta| < a_3h, \quad \left\{\left|\frac{k-k_0}{h}\right|, \quad |k|, |k_0|\right\} < a_4, \tag{17}$$

$$\left\{\left|\frac{dk}{ds}\right|, \left|\frac{dk_0}{ds}\right|\right\} < a_5, \quad \left\{\left|\frac{d^2k}{ds^2}\right|, \left|\frac{d^2k_0}{ds^2}\right|\right\} < a_6,$$

où a_ν sont des constantes indépendantes de h, alors

$$|f'(z, C_0, C, h)| = \frac{h}{n}\left\{1 + \frac{n}{6}k_0 + \frac{n}{3}k + \frac{n^2}{12}k^2 + \frac{1}{3}\vartheta^2\right\} + R, \tag{18}$$

de plus le reste R vérifie l'inégalité

$$|R| < Ah^3, \tag{19}$$

où A est une constante ne dépendant que des constantes a_ν.

Faisons passer par les points z_0 et z_0' les circonférences $\widetilde{C}$ et $\widetilde{C}_0$ en contact respectivement avec les courbes C et C_0 ; désignons par $D(\widetilde{C}_0, \widetilde{C})$ la lunule qui a ces circonférences pour frontière (fig. 143). Puisque d'après la formule (18) du n° 34 la dilatation au point z_0 par la représentation de $D(\widetilde{C}_0, \widetilde{C})$ sur la bande de largeur h est

$$|f'|z_0, \widetilde{C}_0, \widetilde{C}, h)| = \frac{h}{n}\left\{1 + \frac{n}{6}k_0 + \frac{n}{3}k + \frac{n^2}{12}k^2 + \frac{1}{3}\vartheta^2\right\} + O(h^3), \tag{20}$$

pour démontrer le théorème il suffit de montrer que $|f'(z_0, \widetilde{C}_0, \widetilde{C}, h)|$ diffère de $|f'(z_0, C_0, C, h)|$ par des infiniment petits d'ordre non inférieur à h^3.

Dans les conditions du théorème à démontrer, les courbures des courbes C_0 et C sont finies et leur différence est un infiniment petit d'ordre h. A l'aide des calculs élémentaires, il en découle que les points anguleux de la lunule $D(\widetilde{C}_0, \widetilde{C})$ se trouvent à une distance finie de z_0 (*). D'après le principe de localisation, toute déformation

(*) Le calcul montre que le carré de la demi-base de la lunule est

$$d^2 = \frac{\alpha}{1 + k_0k\alpha}\left(1 - \frac{kh}{2}\right)(2 + k_0h)\left(1 + \frac{k_0k\alpha}{2}\right),$$

où $\alpha = \dfrac{h}{k - k_0}$ est une quantité bornée.

du domaine à l'extérieur du cercle $|z - z_0| \leqslant l$ donne une variation de la dilatation $|f'(z_0, C_0, C)|$ d'infiniment petits d'ordre non inférieur à h^3 si $e^{-m\frac{l}{h}} \leqslant Mh^3$, c'est-à-dire $l \geqslant \frac{h}{m}\left(3 \ln \frac{1}{h} - \right.$ $\left. - \ln M\right)$ (*). Nous pouvons donc dans nos estimations considérer que le domaine $D(C_0, C)$ coïncide avec la lunule $D(\widetilde{C}_0, \widetilde{C})$ à l'extérieur du cercle $|z - z_0| \leqslant l_0 = \frac{3h}{m} \ln \frac{1}{h}$. Supposons d'abord que

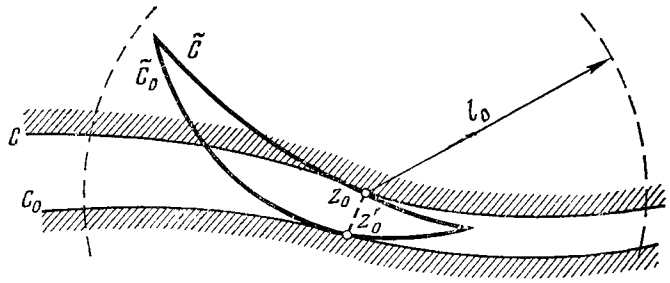

FIG. 143

dans le cercle $|z - z_0| \leqslant l_0$ la courbe $\widetilde{C}_0$ coïncide avec C_0. Faisons une représentation conforme de la lunule $D(\widetilde{C}_0, \widetilde{C})$ sur la bande $0 < \eta < h$ du plan des $\zeta = \xi + i\eta$ de manière que $\widetilde{C}_0$ ait pour image le bord inférieur de la bande $\widetilde{\Gamma}_0$, $\widetilde{C}$ le bord supérieur $\widetilde{\Gamma}$ et le point z_0 le point $\zeta_0 = ih$. La courbe C a pour image la courbe Γ qui est en contact avec la droite $\widetilde{\Gamma}$ au point $\zeta_0 = ih$. D'après (20) la dilatation donnée par notre transformation est bornée inférieurement et supérieurement, donc il suffit de montrer que pour $|\xi| < l_0$ la dilatation au point ζ_0 de la transformation de la bande $D(\Gamma_0, \Gamma)$ sur la bande $0 < v < h$ diffère de l'unité (dilatation par la transformation de la bande $D(\widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma})$ sur elle-même) par des infiniment petits d'ordre non inférieur à h^3.

Au voisinage du point $\xi = 0$, nous représentons l'équation de Γ par la formule de Taylor

$$\eta = h + \alpha\xi^3 + \beta\xi^4 + o(\xi^4)$$

(les coefficients de ξ et de ξ^2 sont nuls, car Γ est en contact avec la droite $\widetilde{\Gamma}$). Pour $|\xi| < l_0$, le reste de la formule est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $h^4 \ln^4 \frac{1}{h}$, c'est-à-dire que l'on peut le négliger par rapport au degré de précision adopté.

(*) Il est clair que dans nos conditions le principe peut être appliqué, de plus on peut prendre $d^* = h$.

Choisissons les constantes a et b de manière que la fonction

$$\zeta = w + aw^2 + bw^4 \tag{21}$$

réalise la représentation de la bande $0 < v < h$ sur la bande du plan des ζ de frontière l'axe des ξ et (au moins pour $|\xi| < l_0$) la courbe d'équation $\eta = h + \alpha\xi^3$. Si a et b sont réels, alors, pour les $w = u$ réels, les valeurs de ζ sont aussi réelles, c'est-à-dire que les bords inférieurs des bandes se correspondent. Pour $w = u + ih$ nous avons

$$\eta = h + 2ahu + 4bhu\,(u^2 - h^2),$$
$$\xi = u + a\,(u^2 - h^2) + b\,(u^4 - 6h^2u^2 + h^4);$$

donc, posant $a = 2bh^2$, $4bh = \alpha$, nous obtenons:

$$\eta = h + \alpha u^3;\quad \xi = u + \frac{\alpha}{4h}(u^4 - 4h^2u^2 - h^4).$$

On voit de la deuxième équation que $u = \xi + O\left(h^3 \ln^3 \frac{1}{h}\right)$; donc on peut prendre dans la première équation $u = \xi$ vu le degré de précision adopté, et nous obtenons $\eta = h + \alpha\xi^3$, ce qu'il fallait démontrer. Substituant dans (21) les valeurs que l'on vient de trouver pour a et b nous en déduisons la transformation cherchée

$$\zeta = w + \frac{\alpha h}{2} w^2 + \frac{\alpha}{4h} w^4. \tag{22}$$

On voit de la formule (22) que le point $w_0 = ih + o\left(h^3 \ln^3 \frac{1}{h}\right)$ correspond au point $\zeta_0 = ih$; donc la dilatation de la transformation (22) en ce point est

$$\left[\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|\right]_{w_0} = \left[\left|1 + \alpha hw + \frac{\alpha}{h} w^3\right|\right]_{w_0} = 1 + o\left(h^4 \ln^3 \frac{1}{h}\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

De la même manière on peut choisir les constantes c et d de sorte que la fonction

$$\zeta = w + cw^3 + dw^5$$

réalise la représentation de la bande $0 < v < h$ sur la bande de frontière l'axe des ξ et la courbe d'équation $\eta = h + \beta\xi^4$. Pour $w = u + ih$, nous avons:

$$\eta = h + ch\,(3u^2 - h^2) + dh\,(5u^4 - 10h^2u^2 + h^4),$$
$$\xi = u + cu\,(u^2 - 3hu) + du\,(u^4 - 10h^2u^2 + 5h^4);$$

donc, posant $3c = 10\,dh^2$, $5\,dh = \beta$, nous trouvons:

$$\eta = h + \beta u^4 - \frac{7}{15}\beta h^4,\quad \xi = u + O\left(h^4 \ln^4 \frac{1}{h}\right),$$

d'où, pour le degré de précision adopté, $\eta = h + \beta\xi^4$.

Ainsi, la transformation cherchée est de la forme:

$$\zeta = w + \frac{2}{3}\beta h w^3 + \frac{\beta}{5h} w^5 \tag{23}$$

et sa dilatation au point $w_0 = ih + o\left(h^4 \ln^4 \frac{1}{h}\right)$ est égale à

$$\left[\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|\right]_{w_0} = \left[\left|1 + 2\beta h w^2 + \frac{\beta}{h} w^4\right|\right]_{w_0} = 1 + O(h^3).$$

Il est clair que la transformation

$$\zeta = w + \frac{\alpha h}{2} w^2 + \frac{\alpha}{4h} w^4 + \frac{2}{3}\beta h w^3 + \frac{\beta}{5h} w^5$$

coïncide, avec le degré de précision voulu, avec la transformation de la bande $0 < v < h$ sur la bande $D(\Gamma_0, \Gamma)$ et que sa dilatation au point w_0 correspondant à $\zeta_0 = ih$ est égale à $1 + O(h^3)$. Dans le cas où la courbe C_0 coïncide avec $\widetilde{C}_0$ dans le cercle $|z - z_0| < l_0$ le théorème est démontré.

On considère de la même manière le cas où les courbes C et $\widetilde{C}$ coïncident, et le cas général se ramène aux deux cas considérés, car on peut d'abord passer du domaine $D(C_0, C)$ au domaine $D(C_0, \widetilde{C})$, puis de $D(C_0, \widetilde{C})$ à $D(\widetilde{C}_0, \widetilde{C})$. Le théorème est donc complètement démontré.

Pour terminer donnons un résultat qui s'obtient de la formule (18) par des estimations élémentaires.

Soit C_0 une courbe qui coïncide avec l'axe des x et supposons que la courbe C: $y = y(x)$, satisfasse aux conditions suivantes:

$$a_1 h < y(x) < a_2 h,$$

$$|y'| < a_3 h^{3/2}, \quad |y''| < a_4 h, \quad |y'''| < a_5 h^{1/2}. \tag{24}$$

Dans ces conditions, en tout point de la courbe C, nous avons

$$|f'|(z, C_0, C, h)| = \frac{h}{y(x)}\left\{1 + \frac{1}{3} yy''\right\} + R$$

$$|R| < A h^{5/2}, \tag{25}$$

où A ne dépend que des constantes a_ν.

Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour ces conditions et pour le degré de précision adopté, on peut dans la formule (18) remplacer

$$\vartheta = \operatorname{arctg} y' \approx y', \quad n = \frac{y}{\cos\vartheta} \approx y, \quad k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx y''$$

et négliger aussi les termes en $n^2 k^2$ et ϑ^2.

§ 3. APPLICATIONS

Nous donnons dans ce paragraphe des applications des principes variationnels à des problèmes de la mécanique des milieux continus.

66. Calcul de la portance. Le modèle d'un fluide parfait n'est que la première approximation de la description du mouvement d'un liquide ou d'un gaz réel. Ainsi, les formules de la portance obtenues au n° 49 ne sont pas exactes: des résistances, la non-uniformité de l'écoulement et d'autres facteurs, qui, en outre, dépendent dans une bonne mesure du caractère de la répartition de la vitesse du fluide autour d'une aile, surgissent en plus de la portance, lorsqu'on tient compte de la viscosité, de la compressibilité, etc. Aussi pour la résolution du problème de l'amélioration de la qualité d'une aile d'avion, les méthodes simples de calcul de la répartition des vitesses, lorsqu'on passe d'un profil donné C à un profil voisin $\widetilde{C}$, acquièrent une grande importance.

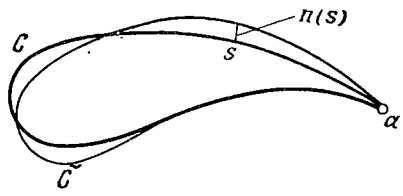

FIG. 144

Nous aboutissons ainsi au problème suivant:

déterminer la variation de la vitesse et de la portance d'un profil C en fonction de la variation de sa forme.

On peut donner une solution simple à ce problème si l'on a recours aux formules approchées des représentations conformes des domaines voisins. Soient donnés un contour C avec un point anguleux a et un autre contour $\widetilde{C}$, voisin par la forme et la courbure. Nous supposons, en outre, que a appartient à $\widetilde{C}$ et que les deux tangentes à $\widetilde{C}$ au point a sont aussi des tangentes à C (fig. 144).

Supposons ensuite que l'écoulement autour de C soit connu; nous pouvons alors supposer que la vitesse d'écoulement V, fonction de la longueur d'arc s du contour C, est connue. Nous prenons le point a pour origine des s et nous supposons que le parcours positif sur C correspond aux s croissants ($0 \leqslant s \leqslant l$). De plus, nous supposons que la représentation conforme

$$\zeta = F(z, C); \quad F(\infty, C) = \infty \tag{1}$$

de l'extérieur du contour C sur l'extérieur du cercle unité $|\zeta| > 1$ soit donnée et, notamment, la correspondance des points de C et des points de la circonférence $\zeta = e^{i\theta}$:

$$\theta = \theta(s); \quad s = s(\theta). \tag{2}$$

Désignons par $n(s)$ la longueur du segment de la normale à C compris entre les courbes C et $\widetilde{C}$, précédée du signe moins ou du signe plus suivant que cette normale se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de

C. Par la transformation (1), la courbe $\widetilde{C}$ a pour image la courbe $\widetilde{C}^*$, dont l'équation en coordonnées polaires aux infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à $\max |n(s)|$ près est de la forme:

$$\rho = 1 + n[s(\theta)]\frac{d\theta}{ds} = 1 + \delta(\theta) \tag{3}$$

(nous posons $\zeta = \rho e^{i\theta}$). Il est clair que la transformation de l'extérieur de $\widetilde{C}$ sur l'extérieur du cercle unité $|w| > 1$ peut être représentée sous la forme

$$w = F(z, \widetilde{C}) = F[F(z, C), \widetilde{C}^*], \quad F[\infty, \widetilde{C}] = \infty, \tag{4}$$

où $w = F(\zeta, \widetilde{C}^*)$, $F(\infty, \widetilde{C}^*) = \infty$, transforme l'extérieur de $\widetilde{C}^*$ sur $|w| > 1$. D'où, d'après la formule de différentiation des fonctions composées,

$$|F'(z, \widetilde{C})| = |F'(\zeta, \widetilde{C}^*)| \cdot |F'(z, C)|, \tag{5}$$

de plus, dans le second membre la fonction $|F'(z, C)|$ est connue et $|F'(\zeta, \widetilde{C}^*)|$ est donnée par l'expression approchée (20) du n° 63

$$|F'(\zeta, \widetilde{C}^*)| \approx 1 + \delta(\theta) - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 \frac{t-\theta}{2}}\, dt \tag{6}$$

(cf. la remarque donnée à la fin du n° 63). Si l'on remarque que la transformation (4) ramène le problème d'écoulement autour de $\widetilde{C}$ au problème d'écoulement autour d'un cylindre circulaire, alors la valeur absolue de la vitesse au point z du contour $\widetilde{C}$ peut être déterminée par la formule (9) du n° 49:

$$|\widetilde{\mathbf{V}}| = \frac{2v_\infty}{|F'(\infty, \widetilde{C})|}\,|\sin\widetilde{\theta} - \sin\widetilde{\theta}_0| \cdot |F'(z, \widetilde{C})|,$$

où v_∞ est la vitesse à l'infini (*) et $\widetilde{\theta} = \theta + \Delta\theta$ et $\widetilde{\theta}_0 = \theta_0 + \Delta\theta_0$ sont les arguments des images des points z et a par la transformation (4). Comparons cette formule à une formule semblable de la vitesse en des points de C

$$|\mathbf{V}| = \frac{2v_\infty}{|F'(\infty, C)|}\,|\sin\theta - \sin\theta_0| \cdot |F'(z, C)|,$$

et tenons compte des formules (5) et (6); nous obtenons:

$$|\widetilde{\mathbf{V}}| \approx \frac{|\mathbf{V}|}{|F'(\infty, \widetilde{C}^*)|}\left|\frac{\sin\widetilde{\theta} - \sin\widetilde{\theta}_0}{\sin\theta - \sin\theta_0}\right|\left\{1 + \delta(\theta) - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 \frac{t-\theta}{2}}\, dt\right\}. \tag{7}$$

(*) Nous supposons que la vitesse à l'infini est dirigée suivant l'axe réel, c'est-à-dire, avec les notations du n° 49, $\vartheta = 0$.

En dérivant par rapport à z la formule (7) du n° 63, puis en passant à la limite lorsque $z \to \infty$, nous trouvons

$$|F'(\infty, \widetilde{C}^*)| \approx 1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\,dt. \tag{8}$$

D'autre part,

$$\frac{\sin\widetilde{\theta} - \sin\widetilde{\theta}_0}{\sin\theta - \sin\theta_0} \approx \frac{\sin\theta + \cos\theta\Delta\theta - \sin\theta_0 - \cos\theta_0\Delta\theta_0}{\sin\theta - \sin\theta_0} = 1 + \frac{\cos\theta\Delta\theta - \cos\theta_0\Delta\theta_0}{\sin\theta - \sin\theta_0},$$

où $\Delta\theta$ et $\Delta\theta_0$ sont données par les formules (16) du n° 63

$$\Delta\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\operatorname{ctg}\frac{\theta - t}{2}\,dt, \quad \Delta\theta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\operatorname{ctg}\frac{\theta_0 - t}{2}\,dt \tag{9}$$

(nous changeons le signe de ces formules car, avec les notations du n° 63, ce sont les quantités de la forme $\theta - \varphi$ et $\theta_0 - \varphi$ qui nous intéressent). Portant dans la formule (7) les expressions trouvées et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous avons

$$|\widetilde{\mathbf{V}}| = |\mathbf{V}|\left\{1 + \delta(\theta) + \frac{\cos\theta\Delta\theta - \cos\theta_0\Delta\theta_0}{\sin\theta - \sin\theta_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(t)\,dt - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2\dfrac{t-\theta}{2}}\,dt\right\}. \tag{10}$$

La formule (10) donne une relation entre les vitesses des points des contours $\widetilde{C}$ et C qui se trouvent sur une même normale à C.

Conformément à ce qui a été dit (n° 63), notons qu'il est plus judicieux de faire les calculs pratiques d'après la formule (10) en approchant $\delta(t)$ par un polynôme trigonométrique

$$\delta(t) = \varepsilon(a_0 + a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos 2t + \\ + b_2\sin 2t + \ldots). \tag{11}$$

Dans ce cas, il est plus commode d'utiliser la formule (23) du n° 63 $\left(\text{tenant compte de ce que } F'(\zeta, \widetilde{C}^*) = \dfrac{1}{g'(e^{i\theta})}\right)$ à la place de la formule (6) et au lieu de (10) nous avons alors :

$$|\widetilde{\mathbf{V}}| = |\mathbf{V}|\left\{1 + \frac{\cos\theta\Delta\theta - \cos\theta_0\Delta\theta_0}{\sin\theta - \sin\theta_0} + \varepsilon[2a_0 + \right.$$
$$\left. + 2(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) + 3(a_2\cos 2\theta + b_2\sin 2\theta) + \ldots]\right\}, \tag{12}$$

où

$$\Delta\theta = \varepsilon(a_1\sin\theta - b_1\cos\theta + a_2\sin 2\theta - b_2\cos 2\theta + \ldots),$$
$$\Delta\theta_0 = \varepsilon(a_1\sin\theta_0 - b_1\cos\theta_0 + a_2\sin 2\theta_0 - b_2\cos 2\theta_0 + \ldots) \tag{13}$$

(comparer avec les formules (23) et (24) du n° 63).

On peut aussi utiliser les formules (12) et (13) pour résoudre le problème inverse :

connaissant la variation de la vitesse sur l'aile, déterminer la variation correspondante du profil de l'aile.

Considérons le cas particulier de variation du contour C lorsque $\widetilde{C}$ ne diffère de C que par un petit arc de courbe de centre au point s_1 (*variation locale*). Dans ce cas, nous posons :

$$\theta_1 = \theta(s_1), \quad \int_0^{2\pi} \delta(t)\, dt = \sigma,$$

et, à l'extérieur de la portion qui a subi la variation, à la place des formules (9) et (10) nous avons aux infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à σ près :

$$\Delta\theta = \frac{\sigma}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_1}{2}, \quad \Delta\theta_0 = \frac{\sigma}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}, \tag{14}$$

$$|\widetilde{\mathbf{V}}| = |\mathbf{V}| \left\{ 1 + \frac{\sigma}{2\pi} \left[\frac{\cos\theta \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_1}{2} - \cos\theta_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}}{\sin\theta - \sin\theta_0} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 1 - \frac{1}{2\sin^2 \frac{\theta - \theta_1}{2}} \right] \right\}.$$

Passons au calcul de la variation de la portance. Pour cela, le plus simple est d'utiliser la formule de Joukovski (8) du n° 49, d'après laquelle la valeur de la portance qui agit sur le contour C est

$$P = 4\pi\rho \frac{v_\infty^2}{|F'(\infty, C)|} \sin\theta_0. \tag{15}$$

Appliquant cette formule aux contours C et $\widetilde{C}$, nous trouvons :

$$\widetilde{P} = P \frac{\sin\widetilde{\theta}_0}{\sin\theta_0} \left| \frac{F'(\infty, C)}{F'(\infty, \widetilde{C})} \right| = P \frac{\sin\widetilde{\theta}_0}{\sin\theta_0} \cdot \frac{1}{|F'(\infty, \widetilde{C}^*)|}, \tag{16}$$

ou encore, en utilisant la formule (8) et en remplaçant $\sin\widetilde{\theta}_0 = \sin\theta_0 + \cos\theta_0 \Delta\theta_0$,

$$\widetilde{P} = P \left\{ 1 + \operatorname{ctg}\theta_0 \Delta\theta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t)\, dt \right\}. \tag{17}$$

Dans le cas d'une variation locale, la formule (17) prend la forme

$$\widetilde{P} \approx P \left\{ 1 + \frac{\sigma}{2\pi} \left[\operatorname{ctg}\theta_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2} + 1 \right] \right\}. \tag{18}$$

On déduit de la formule (18) le résultat qualitatif suivant.

Soient a_0 et a_1 les points de fuite et de ramification d'un courant autour d'un profil C à portance P positive. Lorsqu'on remplace C par un profil $\widetilde{C}$, la portance : 1) *augmente si $\widetilde{C}$ coïncide avec C sur la courbe inférieure a_0ba_1 et se trouve au-dessus de la courbe supérieure $a_0b'a_1$*; 2) *diminue si $\widetilde{C}$ coïncide avec C sur la courbe supérieure et se trouve au-dessous de la courbe inférieure* (fig. 145).

Pour démontrer cette proposition, nous considérons la variation du contour C comme une suite de variations locales. Puisque d'après

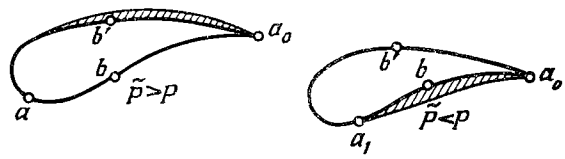

FIG. 145

nos conditions $P > 0$ et $\sigma > 0$ (*), selon (18) le signe de la variation $\delta P = \widetilde{P} - P$ de la portance coïncide avec le signe de l'expression

$$\Delta = 1 + \operatorname{ctg}\theta_0 \operatorname{ctg}\frac{\theta_0 - \theta_1}{2}, \tag{19}$$

en outre, θ_0 se trouve dans le IV^e quadrant (pour fixer les idées nous supposons $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < 0$); donc, ctg $\theta_0 < 0$.

Considérons d'abord le cas 1). Par la transformation (4), le centre de variation locale coïncide dans ce cas avec le point θ_1 de la circonférence, qui se trouve sur l'arc de courbe supérieur $\widehat{\theta_1\theta_0'}$, où θ_0' est le point de la circonférence qui correspond au point de ramification a_1 du courant, c'est-à-dire $0 < \theta_1 - \theta_0 < \pi + 2|\theta_0|$ (cf. exemple 2), n° 49). Pour $0 < \theta_1 - \theta_0 \leqslant \pi$, nous avons $\operatorname{ctg}\frac{\theta_0 - \theta_1}{2} \leqslant 0$ et, par conséquent, $\Delta \geqslant 1$. Pour $\pi < \theta_1 - \theta_0 < \pi + 2|\theta_0|$ posons $\frac{\theta_1 - \theta_0}{2} = \frac{\pi}{2} + \alpha$, où $0 < \alpha < |\theta_0|$; alors $\operatorname{ctg}\frac{\theta_0 - \theta_1}{2} = \operatorname{tg}\alpha$, le module du second terme du deuxième membre de la formule (19), égal à $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}|\theta_0|}$, n'est pas supérieur à l'unité et, par conséquent, $\Delta > 0$. Ainsi, dans le cas 1), la variation de la portance $\delta P > 0$.

D'une manière analogue, nous avons dans le cas 2) $0 < \theta_0 - \theta_1 < \pi - |\theta_0|$, posons $\frac{\theta_0 - \theta_1}{2} - \frac{\pi}{2} = \alpha$, alors $|\theta_0| < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Le module du second terme du deuxième membre de la formule (19),

(*) Le contour $\widetilde{C}$ se trouvant à l'extérieur de C, σ est positif (cf. la condition adoptée plus haut).

égal à $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}|\theta_0|}$, est supérieur à l'unité, et il est clair que le signe de ce terme est négatif. Donc, dans le cas 2), la variation de la portance $\delta P < 0$. La proposition énoncée est démontrée.

67. Ondes dans un liquide pesant. Considérons un canal ouvert, indéfiniment long, de section rectangulaire et de fond horizontal. Supposons que le canal soit rempli d'un liquide pesant dont le mouvement est subordonné aux conditions suivantes : 1) le mouvement est plan : le champ des vitesses est parallèle aux parois verticales et identique dans toutes les sections parallèles à ces parois ; 2) supposons qu'un système de coordonnées rectangulaires (x, y) (l'axe des x se trouve sur le fond et est parallèle aux parois, l'axe des y est dirigé suivant la verticale ascendante) se déplace avec une vitesse constante v_0 dans la direction de l'axe des x ; nous supposons que dans le système de coordonnées (x, y), la surface libre et le champ des vitesses du liquide ne dépendent pas du temps t.

Nous appelons *mouvement ondulatoire permanent* du liquide dans le canal le mouvement d'un liquide subordonné aux conditions qui viennent d'être énumérées ; le nombre v_0 est appelé vitesse de propagation du mouvement ondulatoire. D'après la définition, du point de vue d'un observateur attaché au système référentiel (x, y), ce champ engendre un mouvement permanent du liquide au sens ordinaire.

On pose de la manière suivante le problème général de la théorie des ondes permanentes dans un canal : supposant le liquide parfait, déterminer tous les mouvements ondulatoires permanents possibles.

Le problème que l'on vient de poser se ramène à un problème de la théorie des représentations conformes. A cette fin, introduisons plusieurs autres paramètres. Soit C: $y = y(x)$, la section de la surface libre par un plan des (x, y) ; nous appelons profondeur moyenne du canal le nombre

$$H = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{1} y(x)\, dx. \tag{1}$$

Soient ensuite g l'accélération de la pesanteur, ρ la densité du liquide,

$$h = v_0 H.$$

Passons maintenant à l'énoncé mathématique du problème. D'après le n° 48, le liquide étant parfait et le mouvement dans le plan des (x, y) permanent, il découle que le potentiel complexe

$$\zeta = f(z, C, h), \quad f(\pm \infty, C, h) = \pm \infty \tag{2}$$

est la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine $D(C)$: $0 < y < y(x)$, sur une bande rectangulaire ; la largeur de la

bande doit être égale à h car le débit, par hypothèse, est égal à $v_0 H - h$. Sur la surface (ondulatoire) libre, la pression doit être constante et égale à la pression atmosphérique; donc, d'après le théorème de Bernoulli bien connu en hydrodynamique, en chaque point de la ligne C, on doit avoir la relation

$$p = A - \frac{1}{2}\rho |f'(z, C, h)|^2 - g\rho y = \text{const}, \tag{3}$$

où p est la pression et A une constante.

Ainsi, notre problème est ramené au problème suivant: *déterminer toutes les courbes* C: $y = y(x)$, *telles que les représentations conformes* $f(z, C, h)$ *du domaine* $D(C)$: $0 < y < y(x)$, *sur la bande* $0 < y < h$, *de largeur donnée* h, *satisfassent en chaque point de* C *à la relation* (3).

Vu que la condition (3) n'est pas linéaire, la solution complète de ce problème suscite de grandes difficultés et n'est toujours pas connue. Nous exposons ci-dessous une solution approchée basée sur les formules approchées de la théorie des représentations conformes. Nous allons chercher dans nos problèmes particuliers des courbes périodiques paires $y = y(x)$ qui diffèrent peu de la droite $y = H$.

Pour faciliter nos calculs, réalisons des homothéties des plans de l'écoulement et du potentiel complexe en posant $z = Hz_1$ et $\zeta = h\zeta_1$. La relation (3) se transforme alors en la relation

$$\left|\frac{d\zeta_1}{dz_1}\right|^2 + 2\nu y_1 = c, \tag{4}$$

où c est une constante et

$$\nu = g\frac{H^3}{h^2} = \frac{gH}{v_0^2} \tag{5}$$

un paramètre sans dimension.

Nous allons considérer le cas où $\alpha = \nu - 1$ est un petit nombre positif. Introduisons les variables $z_2 = \alpha z_1$, $\zeta_2 = \alpha\zeta_1$ et supposons que dans le plan des z_2 l'image de la courbe C satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} a_1\alpha < y_2 < a_2\alpha, \quad |y_2'| < a_3\alpha^{3/2}, \\ |y_2''| < a_4\alpha, \quad |y_2'''| < a_5\alpha^{1/2}, \end{aligned} \tag{6}$$

où a_k sont des constantes. Nous obtenons alors, de la formule (25) du n° 65, l'expression approchée

$$\left|\frac{d\zeta_2}{dz_2}\right| = \frac{\alpha}{y_2}\left(1 + \frac{1}{3}y_2y_2''\right) + O(\alpha^{5/2})$$

ou en passant aux variables z_1 et ζ_1 :

$$\left|\frac{d\zeta_1}{dz_1}\right| = \frac{1}{y_1}\left(1 + \frac{1}{3}y_1y_1''\right) + O(\alpha^{5/2}).$$

Portant cette expression dans la formule (4), nous obtenons, compte tenu des conditions (6), une équation approchée qui est vérifiée aux infiniment petits d'ordre $O(\alpha^{5/2})$ près sur la courbe qui correspond à C dans le plan des z_1:

$$\frac{1}{y_1^2}\left(1+\frac{2}{3}y_1y_1''\right)+2\nu y_1=c. \tag{7}$$

Prenons pour nouvel axe réel dans le plan des z la droite $y = H$, c'est-à-dire posons $y = H(1 + \eta)$ ou, ce qui revient au même, $y_1 = 1 + \eta$; l'équation (7) devient alors

$$\frac{2}{3}\eta''+2\nu(1+\eta)^2+\frac{1}{1+\eta}-c(1+\eta)=0.$$

Si l'on choisit la constante c de manière que $\eta = 0$ soit solution de la dernière équation ($c = 2\nu + 1$) et si l'on tient compte de l'identité

$$\frac{1}{1+\eta}=1-\eta+\eta^2-\frac{\eta^3}{1+\eta},$$

on peut alors écrire cette équation sous la forme

$$\eta''+3(\nu-1)\eta+\frac{3}{2}(2\nu+1)\eta^2-\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{1+\eta}=0. \tag{8}$$

Etant donné que nous cherchons des solutions qui diffèrent peu de la droite $y = H$, on peut alors supposer que η est une petite quantité. Nous supposons que $\max|\eta|$ a le même ordre que α, alors, tenant compte du degré de précision adopté, on peut négliger le dernier terme dans le premier membre de (8). Introduisant la quantité $\alpha = \nu - 1$ à la place de ν et négligeant le terme $\alpha\eta^2$, nous avons:

$$\eta''+3\alpha\eta+\frac{9}{2}\eta^2=0. \tag{9}$$

Nous allons continuer l'exposé en faisant deux suppositions différentes.

1°. Théorie linéaire. Supposons d'abord que le nombre $\max|\eta|$ soit petit par rapport à α (ondes de petite amplitude). On peut alors linéariser l'équation (9) en y négligeant le terme non linéaire

$$\eta'' + 3\alpha\eta = 0. \tag{10}$$

Puisque, d'après la condition adoptée précédemment, $\alpha > 0$, on peut prendre comme solutions de cette équation les ondes linéaires

$$\eta=\frac{a}{H}\cos\sqrt{3\alpha}\,x_1,$$

où a est une constante arbitraire. Par rapport aux coordonnées x et y, l'équation de ces ondes est de la forme

$$y = H + a\cos\frac{\sqrt{3\alpha}}{H}x. \tag{11}$$

La période des ondes, après y avoir substitué la valeur $\nu = \alpha + 1$ tirée de la formule (5), s'écrit sous la forme

$$T = \frac{2\pi H}{\sqrt{3\alpha}} = \frac{2\pi H}{\sqrt{3\left(g\frac{H}{v_0^2} - 1\right)}},$$

d'où

$$v_0 = \sqrt{\frac{gH}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi H}{T}\right)^2}}. \tag{12}$$

Ainsi, *pour la vitesse de propagation v_0 et la période T données, il existe un ensemble infini de solutions du problème qui dépendent d'un paramètre, l'amplitude de l'onde.*

De plus, la profondeur moyenne H du canal est donnée par la relation (12). Il découle aussi de cette relation que la vitesse de propagation des ondes linéaires croît avec leur longueur mais n'est jamais supérieure à $\sqrt{gH}$. En négligeant le terme $\left(\frac{2\pi H}{T}\right)^2$ dans (12), nous obtenons la *formule de Lagrange* $v_0 = \sqrt{gH}$.

2°. Ondes longues. Etudions maintenant le cas où $\max|\eta|$ a le même ordre que α. Dans ce cas nous avons à considérer l'équation (9) dans sa forme complète et le problème devient non linéaire.

Il est clair que l'équation (9) admet l'intégrale première

$$\left(\frac{d\eta}{dx_1}\right)^2 = A - 3\alpha\eta^2 - 3\eta^3, \tag{13}$$

où A est une constante arbitraire. Admettant que pour la crête de l'onde, c'est-à-dire pour $x_1 = 0$, nous avons $\eta = \eta_0 > 0$, nous obtenons pour A la valeur

$$A = 3\eta_0^2(\alpha + \eta_0).$$

Pour qu'il existe des solutions périodiques de l'équation (9), il faut qu'on trouve encore une valeur $\eta = \eta_1 < \eta_0$ (creux de l'onde) pour laquelle $\frac{d\eta}{dx_1} = 0$. En vertu de (13) cette valeur doit être racine de l'équation

$$\eta^3 + \alpha\eta^2 - \eta_0^2(\alpha + \eta_0) = 0.$$

Cette équation a la racine $\eta = \eta_0$; divisant les deux membres par $\eta - \eta_0$, nous trouvons:

$$\eta^2 + (\alpha + \eta_0)\,\eta + \eta_0\,(\alpha + \eta_0) = 0,$$

d'où

$$\eta_{1,2} = -\frac{\alpha + \eta_0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+\eta_0)^2 - 4\eta_0\,(\alpha+\eta_0)}. \tag{14}$$

Ainsi, pour qu'il existe des solutions périodiques il faut que $(\alpha + \eta_0)^2 - 4\eta_0\,(\alpha + \eta_0) \geqslant 0$, c'est-à-dire $-\alpha \leqslant \eta_0 \leqslant \frac{\alpha}{3}$. Puisque nous avons $\eta_0 > 0$, cette condition a la forme

$$\eta_0 \leqslant \frac{\alpha}{3}. \tag{15}$$

Pour cette condition, de la relation (13), que nous pouvons écrire sous la forme:

$$\frac{d\eta}{dx_1} = H\,\frac{d\eta}{dx} = \sqrt{A - 3\alpha\eta^2 - 3\eta^3},$$

nous trouvons la demi-période des ondes considérées

$$\frac{T}{2} = H\int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{A - 3\alpha\eta^2 - 3\eta^3}} \tag{16}$$

Pour $\eta_0 < \frac{\alpha}{3}$ l'expression qui se trouve sous le radical a des racines simples aux extrémités η_0 et η_1 de l'intervalle d'intégration, donc la quantité T est finie. Il est également facile d'écrire l'équation de la demi-onde $\left(\text{sur l'intervalle } 0 \leqslant x \leqslant \frac{T}{2}\right)$:

$$x = H\int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{A - 3\alpha\eta^2 - 3\eta^3}}. \tag{17}$$

On voit directement que la condition $\eta_0 < \frac{\alpha}{3}$ est suffisante pour l'existence des solutions de l'équation (9) qui ont un caractère ondulatoire. Contrairement au cas linéaire, l'*amplitude de l'onde ne peut être arbitraire* et, pour une vitesse fixe v_0, elle dépend de la période T.

Donnons encore quelques propriétés qualitatives des solutions obtenues; ces propriétés découlent des formules données plus haut.

a) *La période T de l'onde croît avec l'ordonnée η_0 et aussi avec l'amplitude $\eta_0 - \eta_1 = 2a$. La valeur minimale $T = \frac{2\pi H}{\sqrt{3\alpha}}$ correspond au cas linéaire où η_0 est un infiniment petit. Lorsque η_0 tend vers la valeur $\frac{\alpha}{3}$, la quantité T croît indéfiniment et pour $\eta_0 = \frac{\alpha}{3}$ la solution*

périodique dégénère en une courbe qui a un maximum unique pour $x = 0$ *et l'asymptote* $\eta = -\frac{2}{3}\alpha$ (fig. 146).

Dans ce dernier cas, il est facile d'écrire la solution sous forme explicite si l'on remarque que pour $\eta_0 = \frac{\alpha}{3}$ nous obtenons de (14)

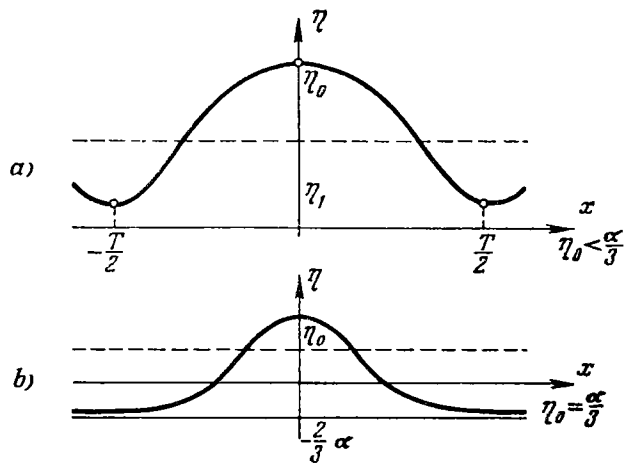

FIG. 146

$\eta_{1,2} = -\frac{2}{3}\alpha$ et, par conséquent, l'équation (13) prend la forme

$$\frac{d\eta}{dx_1} = \sqrt{3(\eta_0 - \eta)(\eta_1 - \eta)}.$$

Cette équation différentielle à variables séparables s'intègre au moyen de fonctions élémentaires et sa solution, qui pour $x_1 = 0$ prend la valeur $\eta = \eta_0 = \frac{\alpha}{3}$, se met sous la forme

$$\eta = \alpha\left(\frac{1}{3} - \operatorname{th}^2\frac{\sqrt{3\alpha}}{2}x_1\right),$$

ou, par rapport aux variables x et y,

$$y = H + \alpha H\left(\frac{1}{3} - \operatorname{th}^2\frac{\sqrt{3\alpha}}{2H}x\right). \tag{18}$$

La solution apériodique que l'on vient d'obtenir porte le nom d'*onde solitaire*.

b) *La courbure à la crête de l'onde est toujours supérieure à la courbure au creux.*

c) *La vitesse de propagation de l'onde décroît avec la croissance de* α.

Pour terminer, voyons dans quelle mesure la solution qui vient

d'être trouvée satisfait aux conditions pour lesquelles l'expression approchée que l'on a prise pour $|f'|$ diffère peu de l'expression exacte (cf. n° 65). Pour cela, nous devons trouver des estimations de la fonction η et de ses trois premières dérivées. Nous avons:

$$-\alpha^* < \eta < \frac{1}{2}\alpha^*.$$

Mais alors, en vertu de (14) et de (9),

$$|\eta'| < k_1 \alpha^{*3/2}, \quad |\eta''| < k_2 \alpha^{*2}, \quad |\eta'''| < k_3 \alpha^{*5/2},$$

où k_1, k_2, k_3 sont des constantes numériques. Ainsi, lorsqu'on remplace $|f'|$ par son expression approchée, nous faisons une erreur de l'ordre de $\alpha^{*5/2}$.

Utilisant la solution approchée que l'on vient de déterminer et les théorèmes variationnels généraux, on peut démontrer d'une manière rigoureuse l'existence de tout le système d'ondes décrit et montrer que nos solutions approchées diffèrent de la solution exacte par des infiniment petits d'ordre supérieur.

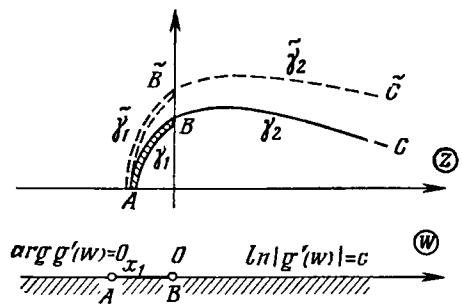

FIG. 147

68. Ecoulement avec décollement. Le problème d'un écoulement avec décollement a été posé au n° 48. Nous donnons ici sa solution approchée et les résultats de l'étude qualitative basée sur les principes variationnels développés dans ce chapitre (cf. M. Lavrentiev [1]). Pour plus de simplicité, nous nous limitons au cas des écoulements à symétrie axiale autour de corps symétriques par rapport à cet axe. Voyons d'abord le problème de l'écoulement autour des arcs symétriques. Conformément au n° 48, ce problème se ramène au problème suivant de la théorie des représentations conformes:

Soit donné dans le demi-plan supérieur des z un arc de courbe γ_1 réunissant le point $x_1 \leqslant 0$ de l'axe des x au point ib de l'axe des y. On demande de réunir le point ib au point $z = \infty$ par une courbe γ_2 appartenant au demi-plan supérieur et telle que la fonction

$$w = f(z, \gamma); \quad f(\infty, \gamma) = \infty, \quad f'(\infty, \gamma) = 1, \tag{1}$$

qui réalise la représentation conforme du domaine D (γ) qui se trouve au-dessus de la courbe $\gamma = (-\infty, x_1) + \gamma_1 + \gamma_2$ sur le demi-plan supérieur (*), *satisfasse à la condition*

$$|f'(z, \gamma)| = c = \text{const} \tag{2}$$

sur l'arc de courbe γ_2 (fig. 147).

Indiquons la méthode approchée de résolution du problème. Désignons par $z = g(w)$ la fonction inverse de la fonction cherchée (1); étant donné que (1)

(*) Comme on le voit de (1), nous nous limitons aux écoulements avec une vitesse à l'infini égale à l'unité et dirigée suivant l'axe des x. Le cas général se ramène facilement à celui-ci.

réalise la représentation conforme sur le demi-plan supérieur, $g'(w)$ est analytique et non nulle dans ce demi-plan, donc la fonction

$$\ln g'(w) = \ln |g'(w)| + i \arg g'(w) \tag{3}$$

y est analytique. Il est clair que nous avons $\arg g'(u) = 0$ sur l'intervalle $(-\infty, A)$ de l'axe des u qui correspond à l'intervalle $(-\infty, x_1)$ de l'axe des x, et $\ln |g'(u)| = c_1$, où c_1 est une constante, sur l'intervalle (B, ∞) qui correspond à γ_2 (cf. fig. 147). Sur le segment (A, B) qui correspond à γ_1, $\arg g'(u)$ est inconnu car la correspondance entre les points de (A, B) et de γ_1 est inconnue. Or, si l'on se donne une correspondance quelconque $\zeta = \zeta(u)$ entre les points de (A, B) et de γ_1, nous trouvons alors:

$$\arg g'(u) = \arg \zeta'(u) = \varphi(u). \tag{4}$$

La détermination de la fonction $\ln g'(w)$ se ramène maintenant à un problème aux limites mixte pour le demi-plan supérieur, car $\operatorname{Im} \ln g'(w)$ est connue sur l'intervalle $(-\infty, A)$ et $\operatorname{Re} \ln g'(w)$ sur l'intervalle (A, ∞). Résolvant ce problème par exemple à l'aide de la formule de Keldych-Sédov (n° 54), nous trouvons la fonction

$$z = g(w) \tag{5}$$

qui réalise la représentation conforme du demi-plan supérieur sur le domaine $D(\widetilde{\gamma})$, où $\widetilde{\gamma} = (-\infty, x_1) \cup \widetilde{\gamma}_1 \cup \widetilde{\gamma}_2$ (cf. fig. 147).

Par construction, la fonction $w = f(z, \widetilde{\gamma})$ inverse de (5) résout le problème d'un écoulement avec décollement autour de l'arc de courbe $\widetilde{\gamma}_1$. Si ce dernier diffère beaucoup de γ_1, nous devons modifier la donnée de la fonction $\varphi(u)$ de (4). Pour que ce changement soit plus judicieux, nous devons être en possession de renseignements qualitatifs sur la variation de la fonction (1) lorsque l'arc de courbe γ_1 est soumis à des déformations. Donnons sans démonstration les résultats fondamentaux qui s'y rapportent.

1) *Si γ_1 est composé d'un nombre fini d'arcs de courbe à courbure bornée et si chaque droite $x = x_0$ $(x_1 < x_0 \leqslant 0)$ coupe γ_1 soit en un point, soit suivant un segment, alors la solution du problème de l'écoulement avec décollement existe et est unique.*

On admet, en outre, que la courbe γ_2, à partir d'un point $x = \xi > 0$, coïncide avec l'axe des x; nous désignons l'équation d'une telle courbe par

$$y = \quad (x, \xi). \tag{6}$$

Dans ce cas, la condition (2) de constance de la vitesse sur l'intervalle (ξ, ∞) est remplacée par la condition de coïncidence des vitesses lorsqu'on s'approche de l'intervalle par en haut et par en bas, c'est-à-dire par la condition d'uniformité du potentiel complexe (1) de l'écoulement avec décollement autour de l'arc de courbe Γ_1 formé de γ_1 et de l'arc symétrique de γ_1 par rapport à l'axe des x. En d'autres termes, on admet la convergence des jets en aval de l'arc de courbe.

2) *Si pour une valeur $x = x_2$ l'ordonnée du point de γ_2 s'annule, alors, pour $x > x_2$, l'arc de courbe γ_2 coïncide avec l'axe des x* (en d'autres termes, $x_2 = \xi$).

3) *Sur l'intervalle $(0, \xi)$, l'arc de courbe γ_2 est analytique.*

4) *Sur γ_2, le coefficient angulaire de la tangente ne peut atteindre un extrémum.*

5) *Lorsque $\xi < \infty$, la courbe γ_2 ne peut avoir de points d'ordonnées supérieures à l'ordonnée maximale des points de la courbe γ_1.*

6) *Si l'ordonnée maximale des points de la courbe γ_1 correspond à $x = 0$, alors $\xi = \infty$, c'est-à-dire que γ_2 a une branche infinie.*

7) *Supposons que pour des abscisses égales les ordonnées des points de la courbe $\widetilde{\gamma}_1$ soient supérieures ou égales aux ordonnées des points de γ_1 et que ces courbes*

aient des extrémités communes. Alors $\tilde{\xi} \leqslant \xi$ *et*

$$y(x, \tilde{\xi}) \leqslant y(x, \xi), \tag{7}$$

de plus lorsque $0 < x < \xi$, *l'égalité ne peut avoir lieu que si* γ_1 et $\tilde{\gamma}_1$ *coïncident* (fig. 148).

Tous ces résultats sont obtenus par les méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe et, notamment, à l'aide des principes variationnels du n° 61. Le lecteur trouvera leur démonstration dans l'article de M. Lavrentiev [5].

Il découle de 7) que $y(x, \xi)$ est toujours inférieur à $y_b(x)$, l'ordonnée du jet le long du segment vertical $(0, ib)$, cas étudié par Kirchhoff. Il découle

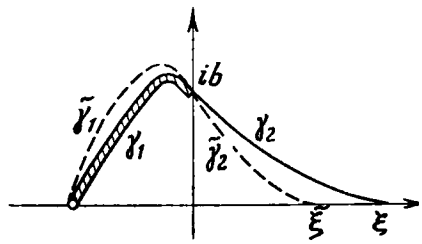

FIG. 148

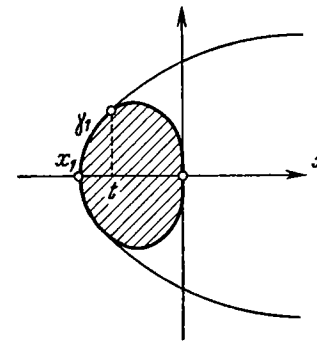

FIG. 149

toujours de la même proposition 7) que dans ses conditions, on a pour la résultante des forces de pression sur l'arc de courbe $\Gamma_1 = \gamma_1 \cup \gamma_1'$, où γ_1' est l'image symétrique de γ_1 par rapport à l'axe des x, $P(\Gamma_1) \leqslant P(\tilde{\Gamma}_1)$, où $\tilde{\Gamma}_1 = \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_1'$.

Pour terminer donnons, toujours sans démonstration, certains résultats qui concernent un écoulement symétrique autour des contours convexes. Soit donné un contour C fermé, convexe et symétrique par rapport à l'axe des x et qui coupe l'axe des x aux points $x_1 < 0$ et $x = 0$. Soit γ_t la partie du contour C qui se trouve en dessous du segment (x_1, t) de l'axe des x $(x_1 < t < 0)$. Il est clair que la solution

$$y = y_t(x, \xi) \tag{8}$$

du problème étudié plus haut pour l'arc de courbe γ_t donne le jet libre d'un écoulement avec décollement autour d'un contour fermé C si la courbe (8) se trouve entièrement à l'extérieur de C.

On a les propositions suivantes :

1) *L'ensemble des points du contour* C, *pour lesquels dans un écoulement symétrique il y a décollement, est l'arc de courbe* C_0 *de centre au point* x_1 *et d'extrémités qui se trouvent à gauche des points du contour* C *d'ordonnées extrémales* (fig. 149).

2) *Les jets libres qui correspondent à deux écoulements distincts autour de* C *n'ont pas de points communs.*

3) *Pour deux écoulements distincts avec décollement autour de* C, *la pression du fluide sur* C *est d'autant plus grande que le jet décolle plus tôt.*

Pour la démonstration de ces propositions voir l'article cité de M. Lavrentiev [5].

69. Mouvement des eaux souterraines. Comme le montre l'expérience, le mouvement des eaux souterraines dans un sol homogène est suffisamment bien régi par les lois de mouvement d'un fluide parfait. Se limitant comme précédemment au cas plan, supposons qu'un liquide s'infiltre dans un domaine D du sous-sol et supposons encore que le mouvement soit permanent. Désignons par $p(z)$ la pression en un point quelconque z du domaine D. On a la loi expérimentale suivante (*Darcy*) : *la vitesse des particules liquides au point z est proportionnelle au gradient de pression et dirigée dans le sens contraire au gradient de p* :

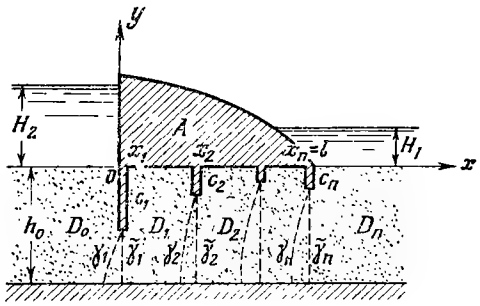

FIG. 150

$$\mathbf{V} = -\varkappa \operatorname{grad} p. \quad (1)$$

Le coefficient de proportionnalité $\varkappa$ ne dépend que du caractère du sol et est appelé *coefficient de filtration*. Ajoutant à la loi de Darcy la condition d'incompressibilité du liquide

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

nous voyons que le champ des vitesses du mouvement du liquide qui s'infiltre dans un domaine D possède un potentiel u :

$$u(z) = -\varkappa p(z), \quad (3)$$

qui est une fonction harmonique régulière dans le domaine D.

Lorsqu'on projette un barrage, l'un des éléments essentiels de leur calcul est la solution du problème suivant.

Soit donné un domaine D dont la frontière C est formée des parties rectilignes suivantes :

1) la droite $y = -h_0$ (*base*),
2) la demi-droite $(-\infty, 0)$ de l'axe des x,
3) le segment $(0, l)$ (*radier*),
4) la demi-droite (l, ∞) de l'axe des x,
5) les segments verticaux (*palplanches*) c_j issus des points $x_1 = 0$, $x_2, \ldots, x_n$ du radier et étant de longueur l_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Le domaine D contient un sol perméable de coefficient de filtration $\varkappa$. La construction A est érigée au-dessus du radier $(0, l)$; à gauche de A, au-dessus de l'axe des x, se trouve une couche de liquide libre d'épaisseur H_2 et à droite de A une couche de liquide libre d'épaisseur H_1 $(H_1 < H_2)$. On suppose que les parois de la construction A, le radier, les palplanches et la base sont imperméables (fig. 150).

On demande, pour les conditions énumérées, de déterminer le mouvement permanent du liquide dans le domaine D, de plus, les

ingénieurs s'intéressent aux trois quantités suivantes: 1) le débit, 2) les pressions maximale et totale sur le radier, 3) la vitesse « de sortie » maximale sur la demi-droite (l, ∞).

Trouvons les conditions aux limites que le potentiel des vitesses u doit vérifier. En vertu de l'imperméabilité de la base $y = -h_0$, du radier et des palplanches, sur toutes les portions de C qui correspondent à ces éléments il doit y avoir écoulement, c'est-à-dire que la relation

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{4}$$

doit être satisfaite. De plus, sur les demi-droites $(-\infty, 0)$ et (l, ∞) la pression p doit être constante : sur la portion de gauche $p = \rho H_2 + p_0$, sur la portion de droite $p = \rho H_1 + p_0$, où ρ est la densité du liquide, p_0 la pression atmosphérique. Donc, sur $(-\infty, 0)$

$$u = \varkappa (\rho H_2 + p_0) = u_2, \tag{5}$$

et sur (l, ∞)

$$u = \varkappa (\rho H_1 + p_0) = u_1. \tag{6}$$

Ainsi, *le problème du mouvement des eaux souterraines sous une construction se ramène à un cas particulier d'un problème aux limites mixte pour les fonctions harmoniques* (n° 55).

Indiquons deux procédés de résolution de ce problème qui tiennent compte du caractère spécifique des conditions aux limites (4), (5) et (6).

a) Désignons par v la fonction de courant; en vertu de la condition (4), v a une valeur constante v_0 sur $y = -h_0$ et une valeur constante $v = v_1$ sur le radier et les palplanches. Le potentiel complexe $u + iv$ réalise la représentation conforme du domaine D sur le rectangle limité par les droites $u = u_0$, $u = u_1$, $v = v_0$, $v = v_1$, en outre, les points $-\infty$, 0, l, ∞ ont pour images les sommets du rectangle. Ayant en vue que le rectangle est transformé sur le demi-plan supérieur à l'aide du sinus elliptique (cf. n° 39, exemple 1), on peut se limiter à la transformation

$$\zeta = f(z) \tag{7}$$

du domaine D sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} \zeta > 0$. Supposons que par cette transformation les images des points $-\infty$, 0, l, ∞ soient les points a_1, a_2, a_3, a_4; à l'aide d'une transformation linéaire auxiliaire, nous pouvons faire de manière que les images de ces points sont $-\frac{1}{k}$, $-1, \frac{1}{k}$, 1. En d'autres termes, on peut supposer dès le début que

$$f(\pm\infty) = \pm\frac{1}{k}, \quad f(0) = -1, \quad f(l) = 1.$$

Alors, le potentiel cherché est de la forme

$$u + iv = \operatorname{sn}(\zeta, k) + \frac{u_0 + u_1}{2} + iv_0, \tag{8}$$

où sn est le sinus elliptique (cf. n° 39). Les côtés $2K$ et K' du rectangle sont donnés par la formule (3) du n° 39

$$2K = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}},$$

sa hauteur $v_0 - v_1 = K'$ donne le débit sous la construction.

b) Par la transformation (7), les fonctions $u(z)$ et $v(z)$ se transforment en les fonctions

$$u[g(\zeta)] = U(\zeta), \quad v[g(\zeta)] = V(\zeta), \tag{9}$$

où $z = g(\zeta)$ est la fonction inverse de (7), de plus, U est régulière partout à l'extérieur des segments $\left(-\frac{1}{k}, -1\right)$ et $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ et prend respectivement sur ces segments les valeurs u_0 et u_1, et V est régulière à l'extérieur des segments $\left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$, $(-1, 1)$ et $(1, \infty)$ et prend sur ces segments les valeurs v_1, v_0, v_1. C'est pourquoi l'expression de $U(\zeta) + iV(\zeta)$ peut être obtenue par la formule de Keldych-Sédov (n° 54).

Appliquant à ce problème les principes variationnels, on peut obtenir facilement plusieurs résultats concernant le caractère de la variation du débit, de la vitesse de sortie et de la pression lorsque les dimensions des éléments de la construction subissent des modifications.

1) *Si l'on augmente la longueur d'une ou plusieurs palplanches, alors toutes les lignes de courant baissent, le débit et la vitesse de sortie diminuent. Si l'on veut diminuer la vitesse de sortie, l'allongement de la palplanche qui se trouve le plus à droite est le moyen le plus efficace.*

2) *Si l'on augmente la longueur d'une palplanche, alors la pression sur le radier augmente à gauche de cette palplanche tandis qu'elle diminue à droite; en particulier, l'augmentation de la longueur de la palplanche qui se trouve le plus à droite augmente la pression partout sur le radier.*

Les mêmes théorèmes et les formules correspondantes donnent également la possibilité de fonder et de préciser les différents procédés approchés de la résolution numérique du problème.

L'un des procédés les plus répandus de détermination approchée du potentiel u est la *méthode des fragments* proposée par l'académicien Pavlovski en 1922 (cf. [9]).

Exposons l'essence de cette méthode.

Faisons passer par les extrémités des palplanches c_j les lignes γ_j équipotentielles $u = u_j$ qui réunissent ces extrémités à la base de sorte que c_j et γ_j forment une courbe une fois continûment différentiable, orthogonale à la base. Les lignes γ_j partagent le domaine D en $n + 1$ parties, « fragments », $D_0, D_1, \ldots, D_n$ (fig. 150). Dans

le fragment D_0, le potentiel u vérifie les conditions

$$u = \begin{cases} U_0 & \text{sur } (-\infty, 0), \\ u_1 & \text{sur } \gamma_1, \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur les autres parties de la frontière ; dans le fragment D_n

$$u = \begin{cases} U_n & \text{sur } (l, \infty), \\ u_n & \text{sur } \gamma_n, \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur les autres parties de la frontière. Pour le fragment D_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, les conditions aux limites ont la forme

$$u = \begin{cases} u_j & \text{sur } \gamma_j, \\ u_{j+1} & \text{sur } \gamma_{j+1}, \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur les autres parties de la frontière.

Remarquons maintenant que si les distances entre deux palplanches consécutives sont grandes par rapport à leur longueur, alors les lignes γ_j diffèrent peu des segments de droite $\widetilde{\gamma}_j$ perpendiculaires à la base. Désignons par $\widetilde{D}_j$ le rectangle obtenu de D_j en remplaçant γ_j et γ_{j+1} par les segments de droite $\widetilde{\gamma}_j$ et $\widetilde{\gamma}_{j+1}$; les domaines $\widetilde{D}_0$ et $\widetilde{D}_n$ sont alors des demi-bandes (fig. 150).

Passons à la construction de l'expression approchée du potentiel u. Construisons d'abord dans chaque rectangle $\widetilde{D}_j$ une fonction harmonique $\widetilde{u}_j(z)$ satisfaisant aux conditions aux limites suivantes:

$$\widetilde{u}_j(z) = \begin{cases} 0 & \text{sur } \widetilde{\gamma}_j, \\ 1 & \text{sur } \widetilde{\gamma}_{j+1}, \end{cases} \tag{10}$$

$\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial n} = 0$ sur les autres parties de la frontière de $\widetilde{D}_j$. Il est clair que la construction de $\widetilde{u}_j$ se ramène à la transformation du rectangle sur le demi-plan et à l'application de la formule de Keldych-Sédov, de plus, cette dernière a une forme très simple vu la simplicité des conditions aux limites.

On prend pour valeur approchée cherchée de u dans le domaine $\widetilde{D}_j$:

$$u \approx (u_{j+1} - u_j)\,\widetilde{u}_j(z) + u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{11}$$

Il est clair que cette fonction satisfait aux conditions aux limites dans le rectangle $\widetilde{D}_j$ et diffère d'autant moins de la valeur exacte de u que $\widetilde{\gamma}_j$ et $\widetilde{\gamma}_{j+1}$ diffèrent moins de γ_j et γ_{j+1}.

Les formules (11) dépendent de n paramètres inconnus $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qu'on peut déterminer à partir de la condition d'égalité

des débits à travers les rectangles voisins. Soient $\widetilde{v}_j(z)$ la fonction conjuguée de $\widetilde{u}_j(z)$ et

$$m_j = \int_{-h_0}^{-l_j} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x}\, dy, \quad m'_j = \int_{-h_0}^{-l_{j+1}} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x}\, dy \tag{12}$$

ses accroissements sur les segments de droite $\widetilde{\gamma}_j$ et $\widetilde{\gamma}_{j+1}$. Alors, la fonction $v(z)$ conjuguée de $u(z)$ dans le domaine $\widetilde{D}_j$ est approximativement égale à $(u_{j+1} - u_j)\,\widetilde{v}_j(z)$ et, par conséquent, la condition d'égalité des débits à travers les rectangles $\widetilde{D}_{j-1}$ et $\widetilde{D}_j$ s'écrit sous la forme (*)

$$m_{j-1}(u_j - u_{j-1}) = m_j(u_{j+1} - u_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Le système (13) est un système de n équations linéaires à n inconnues u_j. Résolvant ce système par rapport aux u_j et portant leurs valeurs dans (11), nous trouvons l'expression approchée cherchée de $u(z)$ dans tous les fragments.

Comme nous l'avons déjà noté plus haut, l'exactitude de la méthode des fragments dépend de l'écart entre les lignes γ_j et les segments de droite $\widetilde{\gamma}_j$. Indiquons le procédé permettant de donner une estimation numérique de l'erreur. Considérons la palplanche d'indice j ; soient D' la partie de D qui se trouve à gauche de la palplanche c_j et D'' la partie de D qui se trouve à droite. Remplaçons la partie D'' par le domaine D''_1 symétrique de D' par rapport à c_j. Pour le domaine $D_1 = D' \cup D''_1$, il est clair que la ligne γ_j coïncide avec le segment de droite $\widetilde{\gamma}_j$. Utilisant les théorèmes variationnels nous pouvons estimer la variation de la fonction $f(z)$ qui réalise la représentation conforme du domaine D_1 sur le demi-plan lorsqu'on passe de D_1 à D et obtenir par là même l'estimation de l'écart entre $\widetilde{\gamma}_j$ et γ_j. Notre problème est donc ramené à l'estimation de la différence entre u et $\widetilde{u}$ en fonction de l'écart entre $\widetilde{\gamma}_j$ et γ_j ou entre le domaine D_j et le rectangle $\widetilde{D}_j$, mais on peut obtenir cette estimation en utilisant les formules du n° 64 des représentations conformes des domaines voisins.

En s'aidant de ces formules, on peut préciser essentiellement la méthode des fragments. Prenons pour $\widetilde{\gamma}_j$ une demi-onde de sinusoïde d'amplitude b_j, qui réunit les extrémités de c_j à la droite $y = -h_0$. Supposant que les domaines $\widetilde{D}_j$ sont voisins du rectangle, nous pouvons d'une manière efficace construire la transformation du domaine $\widetilde{D}_j$ sur le demi-plan et par là même la fonction $\widetilde{u}_j$ qui est égale à l'unité sur $\widetilde{\gamma}_{j+1}$, nulle sur $\widetilde{\gamma}_j$ et possède une dérivée normale nulle sur les autres parties de la frontière. La fonction $\widetilde{u}_j$ dépend linéaire-

(*) Posons encore $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 2u_n$.

ment des paramètres b_j, b_{j+1} de la sinusoïde. On construit comme précédemment, d'après la fonction $\widetilde{u}_j(z)$, le potentiel inconnu

$$u \approx (u_{j+1} - u_j)\,\widetilde{u}_j + u_j.$$

Il y a $2n$ paramètres numériques u_j et b_j dans l'expression de u que l'on vient de construire. Le système (13) donne n équations; nous obtenons encore n équations si l'on exige que le volume de liquide qui s'échappe de $\widetilde{D}_{j-1}$ à travers la moitié supérieure de $\widetilde{\gamma}_j$ est égal au volume de liquide qui entre dans $\widetilde{D}_j$ à travers la même partie de $\widetilde{\gamma}_j$.

Appliquant les formules du n° 65 des transformations des domaines voisins sur un demi-plan, on peut donner des méthodes de calcul des valeurs de u lorsqu'on passe d'une construction donnée à une construction voisine.

Pour terminer, indiquons encore la *méthode de la transformation successive* des palplanches la plus complètement exposée par *P. Filtchakov* [10].

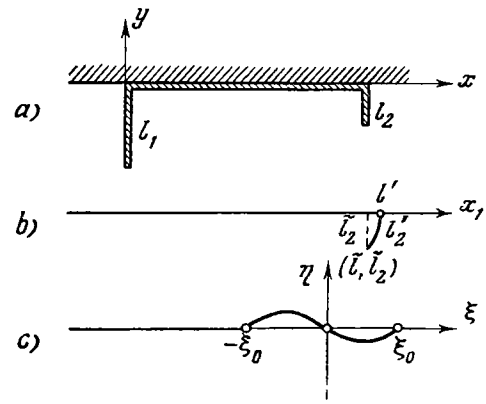

FIG. 151

Pour plus de simplicité, considérons le cas d'un radier de longueur l, à deux palplanches, bien que la méthode soit analogue (et du point de vue de la précision elle convient même mieux) dans le cas d'un plus grand nombre de palplanches. Soient l la longueur du radier et $l_1 = 1$ et l_2 les longueurs des palplanches (fig. 151).

Réalisons la représentation conforme

$$z_1 = \sqrt{1 + z^2} \tag{14}$$

du demi-plan inférieur des z duquel on a retranché la palplanche l_1 sur le demi-plan inférieur des z_1. L'image de la palplanche l_2 est une palplanche curviligne l'_2 issue du point $l' = \sqrt{1 + l^2}$ de l'axe réel des x_1; l'équation de l'_2 est:

$$x_1 = l\sqrt{\frac{l'^2 + y_1^2}{l^2 + y_1^2}}. \tag{15}$$

Puisqu'on en tire $l \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{1 + l^2}$, pour les grands l la courbe l'_2 diffère peu d'un segment de droite. Désignons par $(\tilde{l}, \tilde{l}_2)$ les coordonnées de l'extrémité de la palplanche curviligne l'_2 (fig. 151). Appliquant la formule de Taylor, on peut obtenir l'équation approchée des abscisses des points de l'_2:

$$x_1 - \tilde{l} \approx (l' - \tilde{l})\left\{1 - \left(\frac{y}{l^2}\right)^2\right\}(1 - y^2 k_1), \tag{16}$$

où le paramètre y ($0 > y > -l_2$) est l'ordonnée du point de la palplanche l_2 et

$$k_1 = \frac{l^2(3\widetilde{l}_2 + 2l') - \widetilde{l}_2^3}{\widetilde{l}_2^3 (l + \widetilde{l}_2)^2}$$

une constante petite pour les grands l, car $k_1 \approx \frac{1}{l^2}$ (cf. [10]). La formule (16) est précise aux deux extrémités de la palplanche, c'est-à-dire pour $y = 0$ et $y = l_2$.

Remplaçons maintenant la palplanche curviligne l'_2 par une palplanche rectiligne $\widetilde{l}_2$ qui passe par le point $(\widetilde{l},\ \widetilde{l}_2)$ (*) et transformons d'une manière conforme le demi-plan inférieur des z duquel on a retranché le segment $\widetilde{l}_2$ sur le demi-plan inférieur des ζ :

$$\xi = \sqrt{1 + \left(\frac{z_1 - \widetilde{l}}{\widetilde{l}_2}\right)^2}. \tag{17}$$

Le demi-plan coupé suivant la palplanche curviligne l'_2 a pour image un domaine (fig. 151*c*) qui diffère peu d'un demi-plan : sa frontière ne diffère de l'axe des ξ que sur le segment $(-\xi_0, \xi_0)$ (**), où l'équation approchée de la frontière est donnée sous la forme

$$\eta = \pm \frac{\widetilde{l}\,(l' - \widetilde{l})\, l_2}{l} \xi \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2} \tag{18}$$

(le signe plus se rapporte aux ξ négatifs et le signe moins aux ξ positifs). Remarquant que le maximum de l'ordonnée (18) est atteint pour $\xi = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}$ et qu'il est égal à

$$\eta_{\max} = \frac{\widetilde{l}\,(l' - \widetilde{l})}{2l} l_2 \xi_0^2,$$

nous pouvons représenter (18) sous la forme

$$\eta \approx \pm \frac{2\eta_{\max}}{\xi_0^2} \xi \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}. \tag{19}$$

Utilisant la formule de la transformation des domaines voisins d'un demi-plan (cf. (2) du n° 65), Filtchakov a montré que l'*erreur commise par la méthode de la transformation successive* (*dans laquelle on remplace la palplanche curviligne l'_2 par la palplanche rectiligne $\widetilde{l}_2$*) *est proportionnelle au cube de la longueur de la palplanche l_2, inversement proportionnelle au cube de la distance l entre les palplanches et à l'abscisse ξ.*

(*) Indiquée en pointillé sur la fig. 151*b*.
(**) $\pm \xi_0$ sont les images du point $z_1 = l'_2$ par la transformation (17).

Précisément, la différence entre la valeur exacte de l'abscisse ξ et sa valeur approchée donnée par les formules (14) et (17) n'est pas supérieure à

$$\delta = \frac{\sqrt{2} l_3^3}{2\pi l (l^2+1)\xi} \tag{20}$$

(cf. [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] М. А. Лаврентьев, К теории конформных отображений, Труды физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1934.

[2] М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Основы вариационного исчисления, т. I, ч. 2, ОНТИ, 1935 (Дополнение II. О некоторых экстремальных задачах в теории конформных отображений).

[3] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952.

[4] R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, With an Appendix by M. Schiffer, Some recent developments in the theory of conformal mapping, Interscience Publ., London 1950.

[5] М. А. Лаврентьев, О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй, Матем. сб., т. 4 (46), вып. 3 (1938), 391-458.

[6] М. А. Лаврентьев, Конформные отображения, Гостехиздат, 1946.

[7] M. Lavrent'ev, Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations, P. Noordhoff, Ltd., Groningen 1963.

[8] Л. И. Седов, Приложение теории функций комплексного переменного к некоторым задачам плоской гидродинамики, Успехи матем. наук, 6 (1939), 120-182.

[9] Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод при гидротехнических сооружениях и ее основные приложения, Издание Научно-мелиорационного ин-та, Петроград, 1922.

[10] П. Ф. Фильчаков, Теория фильтрации под гидродинамическими сооружениями, тт. I, II, Изд-во АН УССР, Киев, 1959. 1960.

Applications de la théorie des fonctions à l'analyse

On donne dans ce chapitre plusieurs applications de la théorie des fonctions à l'analyse qui sont d'un intérêt particulier pour les physiciens.

Le premier paragraphe est consacré à la représentation des fonctions par les séries et produits infinis qui sont constamment utilisés dans les questions les plus diverses. Dans le deuxième paragraphe, on donne des méthodes de calcul des intégrales des fonctions de la variable réelle et de la variable complexe et des méthodes de calcul du nombre des zéros des fonctions analytiques qui appartiennent à des domaines donnés, méthodes très importantes pour la théorie des oscillations. Enfin, on indique dans le troisième paragraphe des méthodes qui permettent de trouver des expressions approchées des fonctions pour les grandes valeurs des arguments ; ces expressions, dites formules asymptotiques, sont très utiles dans les applications.

§ 1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES ET PRODUITS INFINIS

Commençons par rappeler les notions fondamentales relatives au développement des fonctions en séries de Taylor et de Laurent et donnons plusieurs exemples illustrant les méthodes de détermination de ces développements.

70. Séries de Taylor et de Laurent. Nous avons démontré dans le premier chapitre que chaque fonction analytique dans le cercle $|z-a|<R$ peut être représentée dans ce cercle par sa série de Taylor

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Ses coefficients sont donnés par les formules

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

où C est un contour fermé simple quelconque contenant à son intérieur le point a et appartenant au cercle (cf. n° 18).

Les séries de Laurent sont une généralisation des séries de Taylor. Elles permettent de représenter les fonctions analytiques dans les

couronnes $r < |z-a| < R$ $(r \geqslant 0,\ R \leqslant \infty)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Les coefficients de la série de Laurent sont donnés par les formules

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2}$$

où C est un contour fermé simple appartenant à la couronne et contenant sa circonférence intérieure (n° 21).

Les formules (1) et (2) sont rarement utilisées dans les développements concrets. D'ordinaire, les développements de Taylor et de Laurent des fonctions sont trouvés d'une manière indirecte à l'aide d'opérations avec des séries entières. De plus, la comparaison des coefficients trouvés par les méthodes indirectes et par l'application des formules donne parfois des relations intéressantes.

Donnons plusieurs exemples de développements des fonctions en séries de Taylor et de Laurent.

1) On obtient très facilement les développements en série de Taylor de certaines fonctions non élémentaires données par des intégrales.

La *fonction d'erreur* est définie par l'intégrale

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2}\, d\zeta, \tag{3}$$

qui ne s'exprime pas à l'aide des fonctions élémentaires. Pour obtenir le développement de erf z en série de Taylor de centre au point $a = 0$, il suffit de remplacer ζ par $-\zeta^2$ dans le développement de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\zeta}$ et d'intégrer ce dernier terme à terme :

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \tag{4}$$

Le développement obtenu converge pour tous les z finis. Lorsque $x \to \infty$ suivant le demi-axe positif, la fonction tend vers la limite (*)

$$\operatorname{erf} \infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 1,$$

de plus très rapidement : erf 2 diffère de erf ∞ de 0,5%.

Cependant lorsque z tend arbitrairement vers ∞, la limite de erf z n'existe pas car, comme on le voit du développement obtenu, $z = \infty$ est un point singulier essentiel de erf z. Le graphique de la fonction erf x pour les valeurs réelles de la variable est donné sur la fig. 152 ; les pointillés représentent le graphique de sa dérivée.

(*) On calcule cette intégrale, dite intégrale de Poisson, dans les cours d'analyse. Cf. par exemple *Fikhtengoltz*, t. III, p. 279.

Parallèlement à la fonction erf on considère souvent la fonction complémentaire d'erreur :

$$\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\zeta^2}\, d\zeta. \tag{5}$$

On trouve d'une manière analogue le développement du *sinus intégral*

$$\operatorname{si} z = \int_0^z \frac{\sin \zeta}{\zeta}\, d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)\,!}, \tag{6}$$

qui converge pour tous les z finis. Le graphique de si x, pour les valeurs réelles

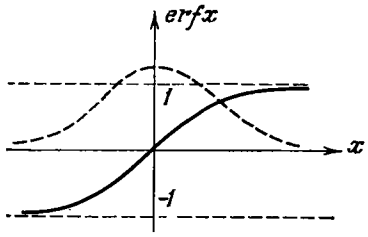

FIG. 152

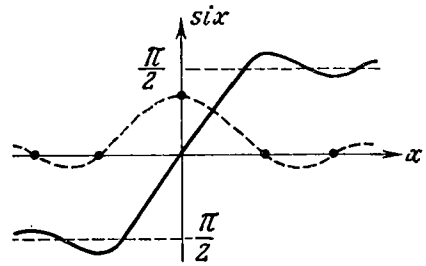

FIG. 153

de la variable, est donné sur la fig. 153 ; la courbe en pointillé est le graphique de la dérivée. Lorsque $x \to \infty$ suivant le demi-axe positif, si x tend vers la limite (*)

$$\operatorname{si} \infty = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

mais $\lim_{z\to\infty} \operatorname{si} z$ n'existe pas, car $z = \infty$ est un point singulier essentiel de si z. Parallèlement à la fonction si on considère la fonction

$$\operatorname{Si} z = \int_0^z \frac{\sin \zeta}{\zeta}\, d\zeta = \operatorname{si} z - \frac{\pi}{2},$$

ainsi que le *cosinus intégral*

$$\operatorname{Ci} z = \int_\infty^z \frac{\cos \zeta}{\zeta}\, d\zeta.$$

2) Le *polynôme de Legendre* $P_n(z)$ est défini comme le coefficient de w^n dans le développement taylorien de

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zw+w^2}} = 1 + P_1 w + P_2 w^2 + \ldots + P_n w^n + \ldots \tag{8}$$

(*) L'intégrale (7), dite encore intégrale, d'Euler, est calculée dans les cours d'analyse, cf. également l'exemple 2 du n° 73.

Pour déterminer ces coefficients dérivons (8) par rapport à w :

$$\frac{z-w}{\sqrt{(1-2zw+w^2)^3}} = P_1 + 2P_2 w + \ldots + nP_n w^{n-1} + \ldots$$

et comparons à (8) le développement obtenu :

$$(1 - 2zw + w^2)(P_1 + 2P_2 w + \ldots + nP_n w^{n-1} + \ldots) = \\ = (z - w)(1 + P_1 w + P_2 w^2 + \ldots + P_n w^n + \ldots).$$

En identifiant maintenant les coefficients des mêmes puissances de w, nous trouvons :

$$P_1 = z, \quad 2P_2 - 2zP_1 = -1 + zP_1 \quad \text{ou} \quad P_2 = \frac{3z^2-1}{2},$$

puis

$$(n+1) P_{n+1} - 2nzP_n + (n-1) P_{n-1} = zP_n - P_{n-1},$$

soit encore

$$(n+1) P_{n+1} - (2n+1) zP_n + nP_{n-1} = 0. \tag{9}$$

Connaissant les deux premiers polynômes P_1 et P_2 nous trouvons les autres à l'aide de cette formule de récurrence.

3) Le *polynôme de Tchébicheff* $T_n(z)$ est défini comme le coefficient de w^n dans le développement

$$\frac{4-w^2}{4-4zw+w^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z)\, w^n. \tag{10}$$

Montrons que pour tout entier n

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z). \tag{11}$$

Pour le démontrer, posons $z = \cos\zeta$; décomposant le premier membre de (10) en éléments simples, nous trouvons :

$$\frac{4-w^2}{4-4w\cos\zeta+w^2} = -1 + \frac{1}{1-\frac{w}{2}e^{-i\zeta}} + \frac{1}{1-\frac{w}{2}e^{i\zeta}}.$$

Pour ζ arbitraire fixe et pour les w suffisamment petits en module les deux fractions peuvent être développées en progression géométrique suivant les puissances de w ; nous avons alors

$$\frac{4-w^2}{4-4w\cos\zeta+w^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\zeta}{2^{n-1}} w^n.$$

Comparant ce développement avec l'expression (10) nous trouvons $T_n(\cos\zeta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\zeta$, ce qu'il fallait démontrer.

4) La *fonction cylindrique de première espèce*, d'indice n entier, $J_n(z)$, est définie comme le coefficient de w^n dans le développement en série de Laurent

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, w^n. \tag{12}$$

On peut représenter la fonction $J_n(z)$ sous la forme d'une série entière. Pour cela il suffit de multiplier les séries de $e^{\frac{z}{2}w}$ et de $e^{-\frac{z}{2}\frac{1}{w}}$; nous avons :

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n w^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{w^n}.$$

Le coefficient de w^n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ est donc :

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \tag{13}$$

et le coefficient de $\frac{1}{w^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ est

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Trouvons maintenant l'expression pour $J_n(z)$ directement à l'aide de la formule (2) pour les coefficients de la série de Laurent :

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{z}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)} \frac{d\omega}{\omega^{n+1}}. \tag{14}$$

Transformons cette expression ; pour cela prenons pour C la circonférence $|\omega| = 1$ et posons $\omega = e^{it}$, nous trouvons :

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{iz\sin t} e^{-nit} i\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt - z\sin t)\,dt - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt - z\sin t)\,dt.$$

Or, la deuxième intégrale est nulle car, d'après la propriété des intégrales de fonctions périodiques, on peut remplacer l'intervalle d'intégration $(0, 2\pi)$ par l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et la fonction à intégrer est impaire. Ainsi

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt - z\sin t)\,dt. \tag{15}$$

La relation obtenue, appelée *intégrale de Bessel*, donne la représentation de la fonction cylindrique par une intégrale et s'avère utile dans certains problèmes de la physique mathématique (cf. aussi le chapitre VII).

5) *Division des séries entières.* Soient données deux séries entières

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \tag{16}$$

avec $f_2(0) = b_0 \neq 0$ (pour la simplicité de l'écriture nous supposons que les centres des séries (16) coïncident avec l'origine des coordonnées). Dans le cercle $|z| < R$, où R est le plus petit des modules des points singuliers de $f_1(z)$ et $f_2(z)$ et des zéros de $f_2(z)$, le rapport de

ces deux séries est représenté évidemment sous la forme d'une série entière

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{17}$$

Pour déterminer pratiquement les c_n, il est préférable d'avoir recours à la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

qui, par comparaison des coefficients, donne:

$$\begin{aligned} b_0c_0 &= a_0,\ b_0c_1 + b_1c_0 = a_1,\ \ldots, \\ b_0c_n + b_1c_{n-1} + \ldots + b_nc_0 &= a_n,\ \ldots \end{aligned} \tag{18}$$

Le système (18) est résoluble successivement par rapport aux c_0, c_1, ..., c_n, ..., car dans chaque nouvelle équation le nouveau coefficient c_n participe avec le facteur $b_0 \neq 0$.

Pour $f(z)=\operatorname{tg} z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, par exemple, nous avons $a_{2k}=0$, $a_{2k+1}=$ $=\dfrac{(-1)^k}{(2k-1)!}$, $b_{2k}=\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$, $b_{2k+1}=0$, et nous trouvons de (18):

$$w=\operatorname{tg} z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\ldots \tag{19}$$

(la loi générale de formation des coefficients est assez compliquée).

Notons que la série de Laurent est liée à des *séries de Fourier* connues de l'analyse. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la couronne $1-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon$; alors elle peut être représentée par sa série de Laurent dans cette couronne

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

où

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,d\theta. \tag{20}$$

En particulier, pour les points $z=e^{it}$ de la circonférence unité, nous avons:

$$\varphi(t)=f(e^{it})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \tag{21}$$

La série (21) est la *série de Fourier*, écrite sous la forme complexe, de la fonction $\varphi(t)$. En effet, nous avons:

$$\varphi(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \qquad (22)$$

où l'on a posé $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et, par conséquent, d'après (20)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(0) \cos n\theta\, d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin n\theta\, d\theta. \qquad (23)$$

Ainsi, *sur la circonférence unité la série de Laurent de* $f(z)$ *est la série de Fourier de la fonction* $\varphi(t) = f(e^{it})$.

Exemple. Déterminons le développement en série de Fourier de la fonction

$$\varphi(t) = \frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2} \quad (|a| < 1).$$

Posons pour cela $e^{it} = z$ et trouvons le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1 - z^2}{2i \left\{ z^2 - \left(a + \frac{1}{a} \right) z + 1 \right\}}.$$

Les racines du dénominateur sont $z_1 = a$, $z_2 = \frac{1}{a}$; décomposant $f(z)$ en éléments simples nous trouvons:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left\{ -1 + \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} + \frac{1}{1 - az} \right\}.$$

Représentant $\frac{1}{1 - az}$ et $\frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = \frac{-1}{\frac{z}{a}\left(1 - \frac{a}{z}\right)}$ sous forme de somme de progressions géométriques convergeantes pour $|z| = 1$ en vertu de la condition $|a| < 1$, nous avons:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right).$$

Faisant $z = e^{it}$, nous trouvons le développement de Fourier que nous cherchions

$$\frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nt. \tag{24}$$

En général toute série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz) \tag{25}$$

à coefficients complexes et à la variable complexe z, après le changement de variable $e^{iz} = \zeta$, devient une série de Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \zeta^n, \tag{26}$$

où $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. D'après ce qui a été démontré au n° 21 la série de Laurent converge dans une couronne $r < |\zeta| < R$; alors la *série trigonométrique* (25) *converge dans la bande* $\ln r < -y < \ln R$ *parallèle à l'axe réel* (nous posons $z = x + iy$, alors $|\zeta| = e^{-y}$). Dans cette bande la somme de la série (25) est une fonction analytique.

Pour la pratique le cas le plus important est celui de $r = R = 1$, c'est-à-dire lorsque la bande dégénère en une droite — l'axe réel. Dans ce cas, comme on le sait de l'analyse, la série (25), si elle converge, peut représenter non seulement une fonction non analytique mais aussi une fonction discontinue.

Pour terminer, indiquons une généralisation des séries de Taylor, dites *séries de Bürmann-Lagrange*, utile pour les applications. Ces séries s'obtiennent lorsqu'on développe une fonction analytique suivant les puissances d'une autre fonction analytique $w(z)$:

$$f(z) = d_0 + d_1 w(z) + \ldots + d_n w^n(z) + \ldots \tag{27}$$

Trouvons les formules donnant les coefficients de la série de Bürmann-Lagrange qui généralisent les formules des coefficients de la série de Taylor. Soient $f(z)$ et $w(z)$ des fonctions régulières en un point a; de plus $w(z)$ a un zéro du premier ordre en ce point. Choisissons le contour fermé C qui limite le domaine D de manière que D contienne le point a, que les deux fonctions soient régulières sur $\bar{D}$ et que $w(z)$ ne prenne qu'une fois ses valeurs sur $\bar{D}$. Fixons dans D un point arbitraire z et considérons l'intégrale

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, w'(\zeta)}{w(\zeta) - w(z)}\, d\zeta.$$

En vertu de nos suppositions, la fonction à intégrer, considérée comme fonction de ζ, a sur $\bar{D}$ un point singulier $\zeta = z$ qui est un pôle du

premier ordre de résidu $\frac{f(z)\,w'(z)}{w'(z)} = f(z)$ (cf. n° 23). D'après le théorème des résidus l'intégrale considérée est donc égale à $f(z)$ et nous obtenons la formule

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,w'(\zeta)}{w(\zeta)-w(z)}\,d\zeta \tag{28}$$

généralisant la formule intégrale de Cauchy.

Supposons encore que le point z soit choisi dans un voisinage de a tel que $\left|\frac{w(z)}{w(\zeta)}\right| \leqslant q < 1$ pour tous les points ζ sur C (on peut toujours y arriver, vu les suppositions faites). Alors la fonction à intégrer dans (28) peut être développée en série uniformément convergente

$$\frac{f(\zeta)\,w'(\zeta)}{w(\zeta)}\cdot\frac{1}{1-\frac{w(z)}{w(\zeta)}} = \frac{f(\zeta)\,w'(\zeta)}{w(\zeta)}\left\{1+\frac{w(z)}{w(\zeta)}+\ldots+\frac{w^n(z)}{w^n(\zeta)}+\ldots\right\}.$$

Intégrant terme à terme, nous obtenons la série de Bürmann-Lagrange (27) et nous voyons que ses coefficients sont donnés par les formules

$$d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,w'(\zeta)}{w^{n+1}(\zeta)}\,d\zeta \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{29}$$

Ces formules généralisent les formules de Cauchy des coefficients de la série de Taylor.

Il est facile de les transformer en remarquant que la fonction à intégrer, vu nos suppositions, possède à l'intérieur de C l'unique point singulier $\zeta = a$ qui est d'ailleurs un pôle d'ordre $n+1$. Calculant le résidu d'après la formule du n° 23 nous trouvons les expressions des coefficients de la série de Bürmann-Lagrange

$$d_n = \frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{f(z)\,w'(z)\,(z-a)^{n+1}}{w^{n+1}(z)}\right\} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{30}$$

généralisant les formules connues de Taylor.

Pour $n \geqslant 1$, les formules (29) peuvent être transformées en intégrant par parties

$$d_n = -\frac{1}{2n\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{1}{w^n(\zeta)}\right\}d\zeta = \frac{1}{2n\pi i}\int_C \frac{f'(\zeta)}{w^n(\zeta)}\,d\zeta$$

et alors au lieu de (30) nous obtenons d'une manière analogue :

$$d_n = \frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{f'(z)\frac{(z-a)^n}{w^n(z)}\right\} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{31}$$

Considérons le développement de la fonction $f(z) = e^{bz}$ suivant les puissances de $w = ze^{-z}$; prenons $a = 0$, nous trouvons : $d_0 = f(0) = 1$ et d'après

la formule (31) :

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ be^{bz} \left(\frac{z}{ze^{-z}} \right)^n \right\} = \frac{b\,(b+n)^{n-1}}{n!}.$$

Ainsi, le développement cherché a la forme

$$e^{bz} = b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b+n)^{n-1}}{n!} z^n e^{-nz}.$$

Un autre exemple est l'application de la série de Bürmann-Lagrange au problème d'*inversion des séries entières*. Soit donnée une série

$$w = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \quad c_1 \neq 0, \tag{32}$$

convergeant dans un voisinage du point $z = 0$ et on demande de développer la fonction $z(w)$, définie par cette série, suivant les puissances de w:

$$z = d_1 w + d_2 w^2 + \ldots + d_n w^n + \ldots \tag{33}$$

C'est un cas particulier du problème que l'on résout à l'aide de la série de Bürmann-Lagrange. D'après la formule (31) nous obtenons les coefficients de la série (33)

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{w} \right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{34}$$

car dans notre cas $f(z) \equiv z$ et $f'(z) = 1$. Les formules (34) donnent la solution du problème posé.

Exemple. On demande de trouver le développement en série de la solution $z(w)$ de l'équation transcendante

$$w = ze^{-az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} z^{n+1}.$$

D'après les formules (34) nous trouvons :

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{anz} = \frac{(an)^{n-1}}{n!},$$

et le développement cherché est de la forme

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

71. Décomposition des fonctions méromorphes en éléments simples. Nous avons défini la fonction *méromorphe* comme une fonction analytique $f(z)$ dont toutes les singularités à distance finie sont des pôles (n° 22). Etant donné que dans tout domaine borné une fonction méromorphe ne peut avoir qu'un nombre fini de pôles (cf. n° 22), nous pouvons numéroter tous ses pôles, par exemple, dans l'ordre de non-décroissance de leurs modules : $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \leqslant |a_n| \leqslant \ldots$$

Désignons par $g_n(z)$ la partie principale de $f(z)$ au point a_n :

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{c_{-k}^{(n)}}{(z-a_n)^k} \tag{1}$$

et par

$$g(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k z^k \tag{2}$$

sa partie principale en un point à l'infini (si ce dernier est un pôle). En analyse les fonctions $g_n(z)$ sont appelées *éléments simples et* $g(z)$ *partie entière* de $f(z)$. On démontre en analyse que toute fonction rationnelle peut être décomposée en partie entière et en éléments simples. Donnons un théorème un peu plus fort.

Théorème 1. *Si une fonction méromorphe* $f(z)$ *n'a qu'un nombre fini de pôles* $a_1, a_2, \ldots, a_l$ *et si de plus* $a_{l+1} = \infty$ *est un point régulier ou un pôle, alors cette fonction peut être représentée sous la forme de la somme de ses parties principales* (*)

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{n=1}^{l} g_n(z) \tag{3}$$

et, par conséquent, elle est une fonction rationnelle.

Pour démontrer ce théorème considérons la différence

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{n=1}^{l} g_n(z).$$

La fonction $\varphi(z)$ est régulière en tout point a_n, car on a retranché du développement de Laurent de $f(z)$ au voisinage de a_n sa partie principale $g_n(z)$ et les autres termes de $\varphi(z)$ sont analytiques en ce point. Le même raisonnement est valable pour le point $z = \infty$, et aux points $z \neq a_n$, $\neq \infty$ tous les termes de $\varphi(z)$ sont analytiques. Ainsi, la fonction $\varphi(z)$ est analytique dans le plan analytique des z, et d'après le théorème de Cauchy-Liouville (n° 24) elle se réduit à une constante. La formule (3) est démontrée. Après avoir réduit les fractions au même dénominateur, il en découle que $f(z)$ est le rapport de deux polynômes, c'est-à-dire une fonction rationnelle.

Ce genre de développement peut être également construit pour une fonction méromorphe quelconque. Cependant, dans le cas général, il y a un ensemble infini de parties principales et la somme finie (3) est remplacée par une série. La question se pose de la convergence de cette série. En général la série (3) est divergente et pour assurer la convergence on doit ajouter aux parties principales certaines expressions (**).

(*) La fonction $g(z)$ participe dans le développement (3) seulement dans le cas où $z = \infty$ est un pôle.

(**) Dans la formule (6), ces expressions sont les polynômes $h_n(z)$.

Pour démontrer cette proposition, nous nous limitons au cas qui est le plus important en pratique. Pour simplifier l'énoncé, convenons de comprendre par *système régulier de contours* $\{C_n\}$ un ensemble de courbes fermées vérifiant les conditions suivantes: 1) C_1 contient à son intérieur le point $z = 0$, chaque contour C_n appartient au domaine limité par le contour C_{n+1}; 2) la plus courte distance d_n des points de C_n à l'origine des coordonnées croît indéfiniment avec n; 3) le rapport de la longueur l_n de la courbe C_n à d_n reste borné:

$$\frac{l_n}{d_n} \leqslant A. \tag{4}$$

On a le théorème suivant:

Théorème 2 (A. Cauchy). *Supposons qu'une fonction méromorphe $f(z)$ ne croît pas plus rapidement que z^p sur un certain système régulier de contours $\{C_n\}$, c'est-à-dire que sur tous les C_n*

$$|f(z)| \leqslant M |z|^p, \tag{5}$$

où M est une constante et $p \geqslant 0$ un nombre entier; supposons encore que $z = 0$ ne soit pas un pôle de $f(z)$. Dans ces conditions $f(z)$ peut être représentée sous la forme

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\}, \tag{6}$$

où $g_n(z)$ sont les parties principales de $f(z)$ au voisinage des pôles a_n et

$$h(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^k(0)}{k!} z^k, \qquad h_n(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \tag{7}$$

des polynômes de degré non supérieur à p (*). Pour un ordre de sommation convenablement choisi, la série (6) converge en tout point régulier de $f(z)$, de plus la convergence est uniforme dans tout domaine borné si l'on ne tient pas compte d'un nombre fini de termes ayant leurs pôles dans ce domaine.

Pour démontrer ce théorème considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

où z est un point arbitraire intérieur au contour C_N, qui ne coïncide avec aucun pôle de $f(z)$. Désignons par $\varphi(z)$ la somme des parties

(*) $h(z)$ et $h_n(z)$ sont les sommes partielles des p premiers termes des développements de Taylor de $f(z)$ et $g_n(z)$ au voisinage du point $z = 0$ (cf. la remarque à la fin de ce numéro). Si $z = 0$ est un pôle de $f(z)$ de partie principale $g_0(z)$, alors le développement (6) est valable pour la fonction $f(z) - g_0(z)$.

principales $g_n(z)$ relative à tous les pôles intérieurs à C_N

$$\varphi(z) = \sum_{(C_N)} g_n(z).$$

La fonction à intégrer $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ considérée comme fonction de ζ a ses singularités aux points a_n et au point $\zeta = z$ qui est un pôle du premier ordre de résidu $f(z)$. Les résidus de $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ aux points intérieurs au contour C_N sont évidemment égaux aux résidus de la fonction $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$ en ces mêmes points ; calculons leur somme s. $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$ étant une fonction rationnelle qui n'a, outre les points a_n, que l'unique point singulier $\zeta = z$ de résidu $\varphi(z)$, d'après le théorème sur la somme totale des résidus, $s + \varphi(z) + c_{-1} = 0$, où c_{-1} est le résidu de $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$ à l'infini (cf. n° 24). Mais comme le degré du numérateur $\varphi(\zeta)$ est inférieur au degré du dénominateur, au voisinage de $\zeta = \infty$ nous avons $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \frac{c_{-3}}{\zeta^3} + \ldots$; par conséquent, $c_{-1} = 0$ et

$$s = -\varphi(z) = -\sum_{(C_N)} g_n(z).$$

Ainsi, d'après le théorème des résidus, notre intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = f(z) - \sum_{(C_N)} g_n(z). \tag{8}$$

Si l'intégrale (8) tendait vers zéro lorsque $N \to \infty$, alors la fonction $f(z)$ serait représentée par une série d'éléments simples convergente $\sum g_n(z)$. Mais puisque, d'après nos conditions, sur le système de contours C_n, $f(z)$ peut croître comme $|z|^p$, l'intégrale (8) ne tend en général pas vers zéro. Le procédé astucieux ci-dessous, permettant d'obtenir de (8) une intégrale qui tend vers zéro, est dû à Cauchy. Puisque par hypothèse $z = 0$ est un point régulier de $f(z)$ et se trouve à l'intérieur de C_N, dans l'égalité (8) et dans ses dérivées successives par rapport à z on peut faire $z = 0$, et nous obtenons le système d'équations

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{(C_N)} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, p) \tag{9}$$

(cf. la formule pour les dérivées d'ordres supérieurs du n° 17). Multipliant les égalités (9) par z^k et retranchant leur somme de (8) nous obtenons :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \left\{ \frac{1}{\zeta - z} - \sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right\} f(\zeta)\, d\zeta = f(z) - h(z) - \sum_{(C_N)} \{g_n(z) - h_n(z)\}.$$

Sommant la progression géométrique qui se trouve sous le signe d'intégration dans cette dernière formule, nous représentons cette intégrale sous la forme

$$R_N = \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \int\limits_{C_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta^p} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}.$$

Evaluons la quantité R_N. Ayant en vue que $|\zeta| \geqslant d_N$, $|\zeta - z| \geqslant d_N - |z|$, nous avons, en vertu des conditions imposées au système $\{C_N\}$ et à $f(z)$,

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{|z|^{p+1}}{2\pi} M \frac{l_N}{d_N(d_N - |z|)} \leqslant \frac{MA}{d_N - |z|} \cdot \frac{|z|^{p+1}}{2\pi}. \qquad (10)$$

On voit que $R_N \to 0$ lorsque $N \to \infty$; par conséquent, la formule (6) est réellement vraie pour l'ordre de succession convenablement choisi (*) des termes de la série qui y participe.

Il reste à démontrer que la série converge uniformément dans tout domaine borné D si l'on ne tient pas compte des termes associés aux pôles appartenant à D. Supposons que pour tous les points de D on ait $|z| < R$. Alors conformément à (10) nous avons:

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{MAR^{p+1}}{(d_N - R)2\pi},$$

d'où l'on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre N_0, indépendant de ε, à partir duquel pour tous les N on a $|R_N(z)| < \varepsilon$, ce qui signifie précisément que la série (6) converge uniformément. Le théorème est démontré.

Remarque. Le théorème qui vient d'être démontré se généralise au cas d'une fonction méromorphe $f(z)$ quelconque sous la forme suivante:

Théorème (M. Mittag-Leffler (**)). *Soient*

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^{p_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \qquad (11)$$

les sommes partielles du développement taylorien de la partie principale $g_n(z)$ d'une fonction méromorphe arbitraire $f(z)$ régulière au point $z = 0$. Il existe alors une suite de nombres entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ et une fonction entière $h(z)$ pour lesquelles le développement (6) *reste vrai.*

Le théorème réciproque suivant est également vrai.

(*) Notamment, on somme la série (6) en réunissant dans un même terme les termes associés aux pôles qui se trouvent entre les contours C_n et C_{n+1} et en disposant les termes obtenus dans l'ordre des n croissants. Cela découle de la démonstration donnée du théorème. Dans le cas de convergence absolue de la série (6) l'ordre de succession des termes n'est pas essentiel.

(**) Magnus Mittag-Leffler (1846-1927).

Théorème (Mittag-Leffler). *Pour toute suite de nombres complexes* $a_n \to \infty$ *et pour toute suite de parties principales* $g_n(z)$, *il existe une suite de nombres entiers* p_n *telle que la série*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\},$$

où les $h_n(z)$ *sont données par les formules* (11), *converge uniformément dans tout domaine borné si on lui retranche les termes associés aux pôles appartenant à ce domaine. La fonction* $f(z)$ *est méromorphe et ses pôles coïncident avec les points* a_n *et seulement avec ces points, de plus la partie principale associée au pôle* a_n *est égale à* $g_n(z)$.

Donnons plusieurs exemples de développement des fonctions méromorphes en série de parties principales.

La fonction méromorphe

$$\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

a des pôles du premier ordre aux points $z = 0, \pm \pi i, \pm 2\pi i, \ldots$ Montrons que sur le système de circonférences C_n : $|z| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, cette fonction est bornée. Vu la périodicité de la fonction, il suffit de démontrer qu'elle est bornée dans la bande $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ de laquelle on a retranché les demi-cercles $|z - \pi| < r$, $|z| < r$. Nous avons

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant \frac{e^{-y} + e^{y}}{|e^{-y} - e^{y}|};$$

par conséquent, pour $y > 1$ $|\operatorname{ctg} z| \leqslant \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} < \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}$, et pour $y < -1$ $|\operatorname{ctg} z| \leqslant \frac{1 + e^{2y}}{1 - e^{2y}} < \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}$. Dans la partie du domaine où $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $|\operatorname{ctg} z|$ est bornée en vertu des propriétés des fonctions continues. Notre proposition est démontrée et, par conséquent, on peut prendre $p = 0$ dans le théorème de Cauchy.

Au point $z = 0$ la partie principale de $\operatorname{ctg} z$ est égale à $\frac{1}{z}$, de plus lorsque $z \to 0$, la fonction

$$f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$$

tend vers la limite zéro (ceci découle de ce que $f(z)$ est impaire et qu'elle est continue au point $z = 0$). Le résidu de $f(z)$ au pôle $z_n = n\pi$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ est égal à l'unité, par conséquent, $g_n(z) = \frac{1}{z - n\pi}$. La formule (6) qui, dans notre cas $p = 0$, est de la forme :

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \{g_n(z) - g_n(0)\} \quad (*)$$

(*) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ indique que la sommation est faite pour tous les n différents de 0.

donne

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right). \tag{12}$$

La série (12) est absolument et uniformément convergente dans toute partie bornée $|z|<R$ du plan après avoir fait disparaître les termes qui ont des pôles dans cette partie. En effet, le terme général de la série satisfait à la majoration

$$\left|\frac{z}{(z-n\pi)\,n\pi}\right|=\frac{1}{n^2}\,\frac{|z|}{\pi\left|\pi-\frac{z}{n}\right|}\leqslant\frac{R}{\pi\left(\pi-\frac{R}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^2},$$

où le coefficient de $\frac{1}{n^2}$ tend vers la limite finie $\frac{R}{\pi^2}$ et la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2}$ converge.

En particulier, il en découle que l'on peut changer arbitrairement l'ordre des termes dans la série (12). Réunissant les termes correspondant aux indices n et $-n$ nous trouvons:

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}. \tag{13}$$

Notons encore les formules qui s'obtiennent de (12) et de (13) en changeant z en πz:

$$\pi\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{14}$$

Remplaçant dans (13) z par iz et simplifiant par $\frac{1}{i}$ nous trouvons:

$$\operatorname{cth} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+n^2\pi^2}. \tag{15}$$

Il en découle:

$$\frac{1}{e^z-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4\pi^2n^2}. \tag{16}$$

De la formule $\operatorname{tg} z=-\operatorname{ctg}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$ et de (13) nous obtenons encore:

$$\operatorname{tg} z=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\frac{2n-1}{2}\,\pi}+\frac{1}{z+\frac{2n-1}{2}\,\pi}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}. \tag{17}$$

D'une manière analogue, nous trouvons de la formule $\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}+\right.$ $\left.+\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right)$:

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}. \tag{18}$$

Dérivant la série (12), ce qui est légitime vu le théorème de Weierstrass (n° 19), nous avons (*) :

$$\frac{1}{\sin^2 z}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(z-n\pi)^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}. \tag{19}$$

72. Développement des fonctions entières en produits infinis. D'après le théorème de Cauchy-Liouville (n° 17) chaque fonction entière bornée se réduit à une constante. Si la fonction entière $f(z)$ a un pôle d'ordre n à l'infini, elle est alors un polynôme de degré n. En effet, si $g(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$ est la partie principale du développement de $f(z)$ à l'infini, alors, en vertu du même théorème, $f(z) - g(z) = c_0$ est une constante.

Comme on le sait de l'algèbre, tout polynôme de degré n a n zéros et peut être représenté sous forme de produit de facteurs linéaires correspondant à ces zéros :

$$f(z)=A'(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)=A\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right), \tag{1}$$

où a_k sont les zéros du polynôme $f(z)$, A et A' des constantes (**). Une fonction entière peut ne pas avoir de zéros (par exemple, e^z), elle peut en avoir un ensemble infini (par exemple, $\sin z$). Une fonction entière $f(z)$ qui n'a pas de zéros peut être représentée sous la forme

$$f(z) = e^{g(z)}, \tag{2}$$

où $g(z)$ est une fonction entière. En effet, si la fonction entière $f(z)$ n'a pas de zéros, alors $\frac{f'(z)}{f(z)} = \{\ln f(z)\}'$ est aussi une fonction entière, et en intégrant cette fonction entière nous en déduisons la fonction entière $\ln f(z) = g(z)$.

Si la fonction entière $f(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (écrits autant de fois que leur ordre de multiplicité l'indique), alors le quotient de la division de $f(z)$ par $(z - a_1) \ldots \ldots (z - a_n)$ est une fonction entière qui n'a pas de zéros. On peut donc le représenter sous la forme (2) et nous trouvons :

$$f(z)=e^{g(z)}(z-a_1)\ldots(z-a_n)=Ae^{g(z)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right). \tag{3}$$

Pour les fonctions entières possédant un nombre infini de zéros, on peut construire des formules analogues dans lesquelles les produits

(*) Les développements (13)-(19) ont été obtenus par L. Euler ; il en a parlé dans une lettre à J. Bernoulli en 1742.

(**) Lorsqu'on passe à la deuxième forme d'écriture, nous supposons que le point $z = 0$ n'est pas un zéro de $f(z)$.

finis sont évidemment remplacés par des *produits infinis*, et la question de leur convergence se pose.

Donnons d'abord les définitions et les propositions fondamentales se rapportant aux produits infinis numériques. Soit donnée une suite de nombres complexes $\{1 + c_k\}$ dont aucun terme n'est nul. Si le produit

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k),$$

lorsque $n \to \infty$, tend vers une limite non nulle, on dit alors que le *produit infini*

$$\Pi = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k) \tag{4}$$

converge et la limite Π est appelée *valeur du produit*.

Il est clair que la condition $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ est une condition nécessaire de convergence, car

$$1 + c_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \Pi_n = \lim_{n\to\infty} \Pi_{n-1} \neq 0.$$

Pour un choix convenable d'une branche du logarithme nous avons:

$$S_n = \ln \Pi_n = \sum_{k=1}^{n} \ln (1 + c_k).$$

Si pour un choix quelconque de la détermination de $\ln (1 + c_k)$ la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln (1 + c_k)$ converge, c'est-à-dire que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existe, alors $\Pi_n = e^{S_n}$ tend aussi vers la limite $\Pi = e^S$, c'est-à-dire que le produit infini (4) converge aussi. Remarquons que de la convergence de la série de logarithmes découle que $\ln (1 + c_k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$, d'où il résulte que, à partir d'un certain k, les déterminations de $\operatorname{Im} \ln (1 + c_k)$ sont comprises entre $-\pi$ et π, c'est-à-dire que $\ln (1 + c_k)$ sont les déterminations principales des logarithmes.

Inversement, si le produit infini converge, c'est-à-dire $\Pi_n \to \Pi \neq 0$, alors choisissant la détermination de $\ln (1 + c_k)$ de manière que pour tout n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln (1 + c_k)$ donne la détermination principale de $\ln \Pi_n$, nous trouvons que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$

$= \lim_{n\to\infty} \ln \Pi_n = \ln \Pi$ existe, c'est-à-dire que la série de logarithmes converge (*). Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème 1. *Pour qu'un produit infini*

$$\Pi = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$$

converge, il faut et il suffit que la série

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \ln (1 + c_k)$$

converge pour un choix convenable des déterminations des logarithmes. De plus $\Pi = e^S$.

Un produit infini contenant des facteurs nuls est dit *convergeant vers zéro* si, après avoir enlevé ces facteurs, le produit infini ainsi obtenu est convergent au sens précédent. L'égalité (4) est alors conservée si l'on prend $\Pi = 0$. Pour cette définition, la propriété d'après laquelle les produits finis ne s'annulent que dans le cas où au moins l'un des facteurs est nul est conservée.

Si la série des logarithmes des facteurs du produit infini est absolument convergente, alors ce produit est dit *absolument convergent*. En vertu du théorème 1, nous concluons que le théorème suivant est vrai.

Théorème 2. *Dans un produit infini absolument convergent on peut changer l'ordre des facteurs d'une manière arbitraire tout en conservant la valeur du produit.*

Le théorème suivant est aussi vrai.

Théorème 3. *Pour la convergence absolue du produit infini* $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$, *il faut et il suffit que la série* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *converge absolument.*

En effet, puisque $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ (aussi bien dans le cas de la convergence d'une série que dans le cas de la convergence d'un produit infini), à partir d'un certain k, on a $|c_k| < \frac{1}{2}$. Alors

$$\left| \frac{\ln (1+c_k)}{c_k} - 1 \right| = \left| -\frac{c_k}{2} + \frac{c_k^2}{3} - \dots \right| \leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{2} < \left| \frac{\ln (1+c_k)}{c_k} \right| < \frac{3}{2}.$$

(*) Pour satisfaire à notre condition du choix des branches des logarithmes, il suffit chaque fois de choisir convenablement la détermination du dernier terme de la somme $\ln (1 + c_n)$. De la convergence de la série de logarithmes, en vertu du raisonnement donné ci-dessus, il découle qu'à partir d'un certain k toutes les déterminations choisies des logarithmes sont principales.

D'après le théorème connu de comparaison des séries, il en découle que les séries $\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1+c_k)|$ et $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ convergent ou divergent en même temps. Mais par définition, la convergence de la première de ces séries est équivalente à la convergence absolue du produit.

La notion de convergence des produits infinis s'étend d'une manière naturelle aux produits infinis de fonctions. Le produit

$$\prod_{k=1}^{\infty} \{1+f_k(z)\}$$

est dit *convergent* dans un domaine D si en chaque point z_0 de ce domaine le produit infini numérique $\prod_{k=1}^{\infty} \{1+f_k(z_0)\}$ converge ou converge vers zéro au sens de la définition donnée ci-dessus.

Après ces renseignements sommaires sur les produits infinis, nous pouvons revenir à la question du développement des fonctions entières en produits infinis dont les facteurs correspondent aux zéros de ces fonctions (généralisation du développement (3)). Remarquons que si la fonction entière $f(z)$ (non identiquement nulle) a un ensemble infini de zéros, ces zéros forment alors une suite qui converge vers le point à l'infini. En effet, dans le cas contraire, on pourrait extraire une suite de zéros de $f(z)$ qui convergerait vers un point à distance finie du plan en lequel, par hypothèse, $f(z)$ est régulière. Mais alors d'après le théorème d'unicité (n° 20) $f(z)$ serait identiquement nulle.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ la suite de zéros de $f(z)$ ordonnée, par exemple, suivant les modules non décroissants. Nous désignons par m_n l'ordre du zéro b_n et par $a_1, a_2, \ldots$ la suite constituée par les mêmes zéros mais de manière que chaque zéro soit écrit autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité. Formons la dérivée logarithmique de la fonction $f(z)$:

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\{\ln f(z)\}.$$

Comme on l'a démontré (n° 23) elle ne possède de singularités qu'aux points b_n, qui sont des pôles du premier ordre de résidu égal à m_n ; par conséquent, $G(z)$ est une fonction méromorphe.

La décomposition de $G(z)$ en éléments simples est intimement liée au développement de $f(z)$ en produit infini. Notamment on a le théorème suivant :

T h é o r è m e 4. *Supposons que la dérivée logarithmique d'une fonction entière $f(z)$ ne croît pas, sur un système régulier de contours, plus rapidement que z^{p-1}, où $p \geqslant 1$ est un nombre entier. Alors pour la*

fonction $f(z)$ on a le développement de la forme suivante:

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}, \qquad (5)$$

où $m \geqslant 0$ est l'ordre du zéro de $f(z)$ au point $z = 0$, $g(z)$ un polynôme de degré $\leqslant p$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la suite de zéros de $f(z)$ dans laquelle chaque zéro est écrit autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité.

En effet, supposons d'abord que $z = 0$ ne soit pas un zéro de la fonction $f(z)$. Alors d'après le théorème 2 du n° 71, sa dérivée logarithmique $G(z)$ admet un développement de la forme

$$G(z)=\sum_{k=0}^{p-1}c_k z^k+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{m_n}{z-b_n}+\frac{m_n}{b_n}\left[1+\frac{z}{b_n}+\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{b_n}\right)^{p-1}\right]\right\},$$

car, dans notre cas, les développements tayloriens des parties principales de $G(z)$ sont de la forme:

$$\frac{m_n}{z-b_n}=-\frac{m_n}{b_n}\frac{1}{1-\frac{z}{b_n}}=-\frac{m_n}{b_n}\left[1+\frac{z}{b_n}+\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\ldots\right].$$

En vertu de la convergence uniforme le développement de $G(z)$ peut être intégré terme à terme sur toute courbe réunissant le point $z = 0$ à un point arbitraire z, qui ne contient pas de zéros de $f(z)$. Nous trouvons:

$$\ln f(z)=\ln f(0)+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{c_k}{k+1}z^{k+1}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}m_n\left\{\ln\left(1-\frac{z}{b_n}\right)+\frac{z}{b_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{b_n}\right)^p\right\}, \qquad (6)$$

où les déterminations des logarithmes sont définies par la courbe d'intégration.

Décomposant le n-ème terme de la dernière somme en m_n termes semblables, nous pouvons écrire le développement (6) sous la forme

$$\ln f(z)=g(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}\right\},$$

où $g(z)$ est un polynôme de degré $\leqslant p$. D'après le théorème 1, il en découle que le produit infini

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p} \qquad (7)$$

converge vers la fonction $f(z)$ en tous les points qui ne sont pas des zéros de cette fonction. Mais il est clair qu'aux zéros de $f(z)$ le produit infini converge vers zéro et, par conséquent, la formule (7) est vraie pour tous les points z à distance finie.

Si $z = 0$ est un zéro de $f(z)$, d'ordre de multiplicité m, alors il suffit d'appliquer notre raisonnement à la fonction $\frac{f(z)}{z^m}$ et nous trouvons la formule (5). Le théorème est démontré.

Remarque 1. Le théorème que l'on vient de démontrer se généralise de la manière suivante au cas d'une fonction entière quelconque :

Théorème (K. Weierstrass). *Il existe une fonction entière $g(z)$ et une suite de nombres entières $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ telles que la formule*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}} \qquad (8)$$

est vraie.

Le théorème réciproque est également vrai.

Théorème (K. Weierstrass). *Pour toute suite* (*) *de nombres complexes a_n convergeant vers l'infini, on peut trouver une suite de nombres entiers p_n telle que le produit infini* (8) *converge et définit une fonction entière $f(z)$ dont les zéros sont les points a_n et seulement ces points, de plus le zéro a_n a son ordre de multiplicité égal au nombre des termes de la suite égaux à a_n.*

Remarque 2. On aurait pu démontrer la représentation d'une fonction entière à l'aide de la formule (5) et non de la formule générale (8) sous la condition plus naturelle : il existe un nombre entier positif p et une constante $M > 0$ tels que pour tous les z

$$|f(z)| \leqslant Me^{|z|^p}. \qquad (9)$$

Les fonctions satisfaisant à cette condition sont appelées fonctions entières *d'ordre fini* (**).

(*) Parmi les termes de la suite il peut y avoir un nombre fini quelconque de termes égaux.

(**) On appelle *ordre* d'une fonction entière $f(z)$ la borne inférieure des nombres positifs p tels que $|f(z)/e^{z^p}|$ est bornée lorsque $z \to \infty$; par exemple $\sin z$ est une fonction du premier ordre, la fonction e^{e^z} est d'ordre infini.

En vertu du second théorème de Weierstrass, il est facile de démontrer que *toute fonction méromorphe $f(z)$ peut être représentée sous la forme d'un rapport de deux fonctions entières.* En effet, construisons une fonction entière $f_2(z)$ ayant en chaque pôle de $f(z)$ un zéro du même ordre (cela est possible d'après le théorème mentionné), alors le produit $f(z)\,f_2(z)$ est une fonction entière $f_1(z)$, et

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}. \tag{10}$$

Donnons plusieurs exemples de représentation des fonctions entières par les produits infinis (*). D'après la formule (12) du n° 71 la dérivée logarithmique du sinus est représentée par la série

$$(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right).$$

Intégrant $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ le long d'un chemin réunissant $z=0$ au point $z \neq n\pi$ et se libérant des logarithmes, nous trouvons

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1-\frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}} \tag{11}$$

($\prod'$ désigne le produit infini dans lequel on a omis l'indice $n=0$).

Si au lieu d'utiliser la formule (12) on a recours à la formule (13) du n° 71 on obtient d'une façon analogue

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{12}$$

Donnons encore les formules qui s'obtiennent de (11) et de (12) en remplaçant z par πz :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{13}$$

Remplaçant z par iz dans la formule (12), nous trouvons

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{14}$$

Utilisant la formule (16) du n° 71 nous trouvons le développement de la dérivée logarithmique de la fonction e^z-1 :

$$\frac{e^z}{e^z-1} = 1+\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4\pi^2n^2};$$

(*) Toutes ces représentations étaient connues de L. Euler (cf. renvoi de la page 434).

intégrant et se débarrassant des logarithmes, nous trouvons

$$e^z - 1 = ze^{\frac{z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right). \tag{15}$$

Partant de la formule $\cos z = \frac{\sin 2z}{2 \sin z}$ et de la formule (12), après avoir mis le numérateur sous la forme du produit de deux termes (suivant les facteurs pairs et impairs) et simplifié nous trouvons

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right). \tag{16}$$

§ 2. APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RÉSIDUS

On considère dans ce paragraphe les applications des théorèmes des résidus et des résidus logarithmiques (n° 23) pour le calcul des intégrales définies et du nombre des zéros.

73. Calcul des intégrales. Voyons l'idée des méthodes de calcul des intégrales basées sur l'application du théorème des résidus. Soit à calculer l'intégrale de la fonction réelle $f(x)$ sur un intervalle (fini ou infini) (a, b) de l'axe des x. Nous complétons (a, b) par une courbe C' limitant avec (a, b) un domaine D et prolongeons analytiquement $f(x)$ dans $\overline{D}$. Appliquons le théorème des résidus au prolongement $f(z)$ ainsi construit et trouvons:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{C'} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot R, \tag{1}$$

où R est la somme des résidus de $f(z)$ dans le domaine D. Si on peut calculer ou exprimer l'intégrale prise le long de C' à l'aide de l'intégrale à calculer $\int_a^b$, alors le problème du calcul de $\int_a^b$ est résolu.

Dans certains cas, on choisit la fonction auxiliaire $f(z)$ de manière que la fonction donnée sur (a, b) soit égale à sa partie réelle ou imaginaire; alors l'intégrale à calculer s'en déduit respectivement en séparant les parties réelles ou imaginaires de (1).

La méthode décrite montre clairement l'importance du théorème de Cauchy sur les résidus qui ramène le calcul d'une quantité intégrale, intégrale prise le long d'un contour, au calcul de quantités différentielles, les résidus de $f(z)$ en ses points singuliers. Le calcul de ces dernières est beaucoup plus simple, notamment dans le cas de pôles lorsqu'on peut utiliser les formules (3) ou (5) du n° 23.

Dans le cas d'intervalles infinis (a, b) on considère, en général, une famille de contours d'intégration s'élargissant indéfiniment qui

sont choisis de manière que, après avoir passé à la limite, on obtient l'intégrale relative à (a, b). Dans ce cas, l'intégrale prise le long de C', dans la relation (1), peut ne pas être calculée mais il suffit de trouver sa limite qui très souvent est nulle.

Dans certains cas l'estimation de l'intégrale suivant C' peut être faite d'après le lemme suivant:

Lemme (C. Jordan). *Si sur une suite d'arcs de circonférence* C_{R_n}: $|z| = R_n$, $\operatorname{Im} z > -a$ ($R_n \to \infty$, a *fixe*) *la fonction* $g(z)$ *tend vers zéro uniformément par rapport à* $\arg z$, *alors pour tout nombre positif* λ

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_{R_n}} g(z)\, e^{i\lambda z}\, dz = 0. \tag{2}$$

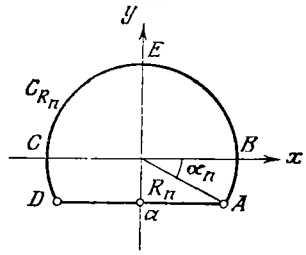

FIG. 154

Posons

$$z = x + iy = re^{i\varphi},$$

$M_n = \max_{C_{R_n}} |g(z)|$ et $\alpha_n = \arcsin \frac{a}{R_n}$. D'après les conditions du lemme $M_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, α_n tend également vers zéro, de plus $\alpha_n R_n \to a$. Soit $a > 0$; sur les arcs AB et CD (fig. 154) nous avons $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda y} \leqslant e^{a\lambda}$; donc

$$\left| \int_{AB,\, CD} g(z)\, e^{i\lambda z}\, dz \right| \leqslant M_n e^{a\lambda} \alpha_n R_n$$

et l'intégrale prise le long des arcs tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

En vertu de l'inégalité (*) bien connue $\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$, valable pour $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous trouvons que sur l'arc BE

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R_n \sin\varphi} \leqslant e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi};$$

donc

$$\left| \int_{BE} \right| \leqslant M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi}\, d\varphi = M_n \frac{\pi}{2\lambda}\left(1 - e^{-\lambda R_n}\right)$$

(*) Pour démontrer cette inégalité, il suffit de remarquer que $\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)' = \frac{\cos\varphi}{\varphi^2}(\varphi - \operatorname{tg}\varphi)$ est négative sur l'intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$ et que, par conséquent, la fonction $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ décroît sur cet intervalle. L'inégalité exprime le fait que la sinusoïde sur l'intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$ est convexe.

et $\int_{BE}$ tend aussi vers zéro lorsque $n \to \infty$. Si sur l'arc CE l'angle polaire est compté à partir du demi-axe négatif dans le sens négatif, alors pour $\left|\int_{CE}\right|$ on obtient une estimation analogue et l'affirmation du lemme est donc démontrée. Dans le cas $a \leqslant 0$ la démonstration se simplifie, car l'estimation des intégrales prise le long des arcs AB et CD est superflue. Le lemme est complètement démontré.

La suite des arcs de circonférence C_{R_n} du lemme peut être remplacée par une famille d'arcs C_R: $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > -a$ ($R_0 < R < \infty$), et alors si la fonction $g(z)$, lorsque $R \to \infty$, tend sur C_R vers zéro uniformément par rapport à $\arg z$, pour tout nombre positif λ

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)\, e^{i\lambda z}\, dz = 0. \qquad (3)$$

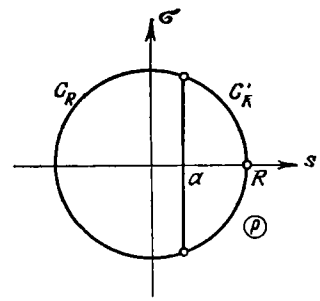

FIG. 155

La démonstration qui vient d'être donnée reste valable dans ce cas.

Dans le chapitre suivant nous aurons besoin du lemme de Jordan sous une forme un peu changée. Faisons le changement de variable $iz = p$, alors les arcs de circonférence du lemme ont pour images les arcs C_R: $|p| = R$, $\operatorname{Re} p < a$ (fig. 155) et nous trouvons que *pour toute fonction $F(p)$ qui tend vers zéro sur C_R, lorsque $R \to \infty$, uniformément par rapport à* $\arg p$, *et pour tout nombre positif t, on a*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{CR} F(p)\, e^{pt}\, dp = 0. \qquad (4)$$

Remplaçant p par $-p$ dans (4) nous trouvons que, dans les mêmes conditions, *pour tout nombre négatif t*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} F(p)\, e^{pt}\, dp = 0, \qquad (5)$$

où C'_R est l'arc de circonférence $|p| = R$, $\operatorname{Re} p > a$ (fig. 155).

Nous montrons sur différents exemples la méthode générale de calcul des intégrales à l'aide de la théorie des résidus. Commençons par calculer l'intégrale du produit d'une fonction rationnelle par un cosinus ou un sinus.

Exemple 1. Pour calculer l'intégrale (*Laplace*)

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$$

nous choisissons la fonction auxiliaire

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$

et le contour indiqué sur la fig. 156. Puisque la fonction $g(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ satisfait sur C_R à l'inégalité $|g(z)|<\frac{1}{R^2-a^2}$, elle tend uniformément vers zéro lorsque $R\to\infty$ et, d'après le lemme de Jordan, lorsque $R\to\infty$,

$$\int_{C_R} f(z)\,dz=\int_{C_R} g(z)e^{iz}\,dz\to 0.$$

Pour tout $R>a$ on a d'après le théorème des résidus

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx+\int_{C_R}=2\pi i\,\frac{e^{-a}}{2ai}$$

(le résidu à l'unique point singulier $z=ai$ de $f(z)$ qui se trouve à l'intérieur du contour et qui est un pôle du premier ordre est calculé à l'aide de la formule (5) du n° 23). A la limite, lorsque $R\to\infty$, nous avons:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{ae^a}.$$

Séparant les parties réelles et remarquant que la fonction est paire nous trouvons l'intégrale à calculer:

$$\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2ae^a}.$$

Exemple 2. Pour calculer l'intégrale (*Euler* (*))

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\operatorname{si}\infty \tag{6}$$

(cf. n° 70) nous prenons la fonction auxiliaire

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}.$$

(*) D'ordinaire, l'intégrale (6) est associée au nom de Laplace ou de Dirichlet; toutefois, elle a été pour la première fois calculée par Euler dans un travail remontant à 1781.

Choisissons le contour d'intégration comme il est indiqué sur la fig. 157; le point $z = 0$ se trouve à l'extérieur d'une demie petite circonférence c_r, car c'est un point singulier de $f(z)$. D'après le théorème de Cauchy

$$\int_{-R}^{-r} + \int_{c_r} + \int_{r}^{R} + \int_{C_R} = 0.$$

Il vient du lemme de Jordan que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} = 0$. Pour estimer $\int_{c_r}$ considérons

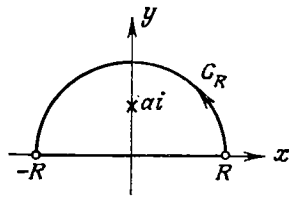

FIG. 156

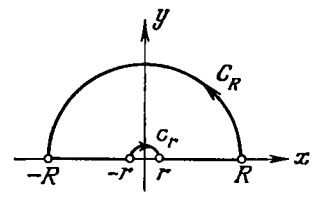

FIG. 157

le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 0$; ce développement est de la forme

$$f(z) = \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + \dots}{z} = \frac{1}{z} + P(z),$$

où $P(z)$ est une fonction continue au point $z = 0$. On voit que

$$\int_{c_r} = \int_{c_r} \frac{dz}{z} + \int_{c_r} P(z)\,dz = \int_{\pi}^{0} \frac{re^{i\varphi} i\,d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -i\pi + O(r) \ (*).$$

Ainsi, on peut écrire le théorème de Cauchy sous la forme

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = i\pi + O(r) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Remplaçant x par $-x$ dans la première intégrale, nous trouvons qu'elle est égale à $-\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx$ et la combinant avec la deuxième intégrale nous avons :

$$\int_{r}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx = i\pi + O(r) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

(*) Nous désignons par $O(\alpha)$ toute fonction infiniment petite lorsque $\alpha \to 0$.

A la limite, lorsque $r \to 0$ et $R \to \infty$, nous trouvons :

$$\text{si } \infty = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Donnons quelques exemples de calcul d'intégrales contenant des exponentielles.

Exemple 3. Pour calculer l'intégrale (*Euler*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx$$

nous considérons la fonction

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

et nous utilisons la propriété d'après laquelle, lorsque z subit un accroissement imaginaire de $2\pi i$, elle est multipliée par le facteur constant $e^{2\pi i a}$. Conformément à ceci, nous intégrons $f(z)$ le long du périmètre du rectangle indiqué sur la fig. 158. Dans ce rectangle, $f(z)$ a le pôle $z = \pi i$ du premier ordre de résidu $c_{-1} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}$; donc d'après le théorème des résidus

$$\int_{\text{I}} + \int_{\text{II}} + \int_{\text{III}} + \int_{\text{IV}} = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Nous avons

$$\int_{\text{I}} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx, \qquad \int_{\text{III}} = \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\, dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx.$$

On a respectivement sur les segments de droite II et IV

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^R - 1} = \frac{e^{(a-1)R}}{1-e^{-R}},$$

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}};$$

par conséquent, lorsque $R \to \infty$, les deux intégrales $\int_{\text{II}}$ et $\int_{\text{IV}}$ tendent vers zéro si on exige que $0 < a < 1$. Ainsi, pour $0 < a < 1$

$$(1-e^{2a\pi i}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx + O\left(\frac{1}{R}\right) = -2\pi i e^{a\pi i}$$

et, à la limite, lorsque $R \to \infty$, nous en déduisons l'intégrale à calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx = \pi \frac{2i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1). \tag{8}$$

Exemple 4. Pour calculer l'intégrale (*Poisson*)

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

considérons la fonction

$$f(z) = e^{-az^2}$$

et remarquons que son intégrale suivant l'axe réel se calcule d'après un résultat connu (erf $\infty = 1$, cf. n° 70) et que sur la droite $y = h$ elle est égale à la fonction $e^{-a(x+ih)^2} = e^{ah^2}\cdot e^{-ax^2}(\cos 2ahx - i\sin 2ahx)$ dont la partie réelle, pour

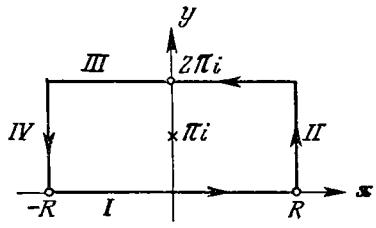

FIG. 158

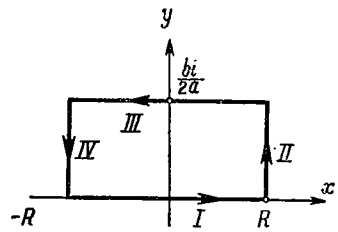

FIG. 159

$h = \frac{b}{2a}$, diffère de la fonction à intégrer par un facteur constant. Conformément à ceci, nous choisissons le contour d'intégration comme indiqué sur la fig. 159. D'après le théorème de Cauchy

$$\int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0. \tag{9}$$

Ici

$$\int_I = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx = \frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^{R\sqrt{a}} e^{-t^2}dt, \qquad \int_{III} = -e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}e^{-ibx}\,dx.$$

Sur les segments de droite II et IV, où $x = \pm R$,

$$|e^{-az^2}| = e^{-a(R^2-y^2)} \leqslant e^{\frac{b^2}{4a}}e^{-aR^2};$$

donc si $a > 0$ (ce que nous supposons), alors $\int_{II,IV} \to 0$ lorsque $R \to \infty$. A la limite, lorsque $R \to \infty$, usant de la valeur connue erf $\infty = 1$ (n° 70) nous trouvons de (9)

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ibx}\,dx = 0,$$

d'où en comparant les parties réelles nous avons

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}} \qquad (a > 0). \tag{10}$$

Exemple 5. Pour calculer l'intégrale (*Legendre*)

$$\int_0^\infty e^{-\pi x}\frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}\,dx$$

nous aurons recours à la fonction auxiliaire

$$f(z)=\frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z}-1}$$

(le double de sa partie imaginaire sur l'axe des x est égal à la fonction à intégrer) et nous l'intégrons suivant le contour indiqué sur la fig. 160. Puisque $f(x+i)=e^{-a}f(x)$, les intégrales sur les frontières inférieure et supérieure peuvent être réunies en une seule: $(1-e^{-a})\int_r^R f(x)\,dx$, l'intégrale sur le segment de droite $x=R$ tend vers zéro lorsque $R\to\infty$ (cf. exemple 3), sur le segment de droite $x=0$, nous posons $z=iy$. Alors d'après le théorème de Cauchy

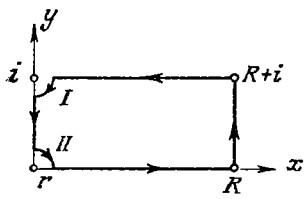

FIG.160

$$(1-e^{-a})\int_r^R - i\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}\,dy+$$
$$+\int_{\mathrm{I}}+\int_{\mathrm{II}}+O\left(\frac{1}{R}\right)=0, \qquad (11)$$

où I et II désignent des arcs de circonférence (cf. fig. 160). Nous avon au voisinage du point $z=i$:

$$f(z)=\frac{e^{iaz}}{e^{2\pi(z-i)}-1}=\frac{e^{-a}+c_1(z-i)+\ldots}{2\pi(z-i)+c_2'(z-i)^2+\ldots}=\frac{e^{-a}}{2\pi}\,\frac{1}{z-i}+P(z-i),$$

où $P(z-i)$ est une fonction régulière au point $z=i$; puisque sur l'arc I nous avons $z=i+re^{i\varphi}$, $dz=rie^{i\varphi}\,d\varphi$, alors

$$\int_{\mathrm{I}}=\frac{e^{-a}}{2\pi}\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{rie^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}}+O(r)=-\frac{ie^{-a}}{4}+O(r).$$

D'une manière analogue $\int_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 i\,d\varphi+O(r)=-\frac{i}{4}+O(r)$ et l'égalité (11) prend la forme

$$(1-e^{-a})\int_r^R=i\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}\,dy+\frac{i}{4}(1+e^{-a})+O(r)+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Séparons ici la partie imaginaire et passons à la limite lorsque $r\to 0$, $R\to\infty$; en tenant compte de

$$\operatorname{Re}\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}\,dy=-\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{2}\,dy=\frac{1}{2a}(e^{-a}-1)+O(r),$$

nous avons définitivement

$$\int_0^\infty e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x}\, dx = \frac{1}{2} \frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}} - \frac{1}{a} \quad (a > 0). \tag{12}$$

Exemple 6. Pour calculer les intégrales (*Euler* (*))

$$I_1 = \int_0^\infty \cos x^2\, dx, \qquad I_2 = \int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

nous choisissons la fonction auxiliaire

$$f(z) = e^{iz^2}$$

et le contour indiqué sur la fig. 161. Après le changement de variable $z^2 = \zeta$ nous obtenons sur l'arc C_R :

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \frac{1}{2} \int_{C'_{R^2}} \frac{e^{i\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta,$$

où C'_{R^2} est le quart de circonférence de rayon R^2 ; donc d'après le lemme de Jordan, cette intégrale tend vers zéro lorsque $R \to \infty$. D'après le théorème de Cauchy, si l'on pose $z = x$ sur OA et $z = t\sqrt{i}$ sur OB, nous avons :

$$\int_0^R e^{ix^2}\, dx + \int_{C_R} + \sqrt{i} \int_R^0 e^{-t^2}\, dt = 0.$$

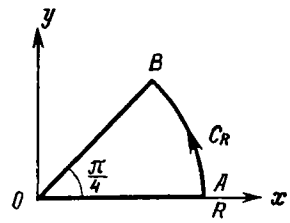

FIG. 161

Passant à la limite lorsque $R \to \infty$ et tenant compte de ce que $\operatorname{erf} \infty = 1$, nous trouvons :

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\, dx = \sqrt{i}\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, nous trouvons :

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{13}$$

Des fonctions spéciales appelées *intégrales de Fresnel* sont liées aux intégrales (13) :

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}\, dt, \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}\, dt. \tag{14}$$

En effet, le changement de variable $t = \tau^2$ donne :

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin \tau^2\, d\tau, \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos \tau^2\, d\tau,$$

(*) Ces intégrales ont été pour la première fois calculées par Euler en 1781.

et, par conséquent, les formules (13) peuvent être écrites sous la forme

$$S(\infty)=C(\infty)=\frac{1}{2}. \tag{15}$$

74. Calcul des intégrales (suite). Commençons par le calcul d'intégrales contenant des fonctions multiformes.

Exemple 1. Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

nous considérons la fonction auxiliaire

$$f(z)=\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}$$

et le contour d'intégration est choisi comme dans l'exemple 2 du n° 73 (*) (cf. fig. 157). Dans ce contour, le logarithme permet de définir des branches uniformes.

Supposons que $\ln z$ désigne la branche définie par l'inégalité $0 < \arg z < \pi$. La fonction $f(z)$ possède au point $z = i$ un pôle du deuxième ordre de résidu

$$c_{-1}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\{f(z)(z-i)^2\}=\left[\frac{d}{dz}\frac{\ln z}{(z+i)^2}\right]_{z=i}=\frac{\pi+2i}{8}.$$

D'après le théorème des résidus

$$\int_{-R}^{-r}+\int_{C_r}+\int_r^R+\int_{C_R}=\frac{\pi^2 i}{4}-\frac{\pi}{2}.$$

Pour $z=Re^{i\varphi}$, $0<\varphi<\pi$, nous avons, à partir des R suffisamment grands, $|\ln z|=\sqrt{\ln^2 R+\varphi^2}\leqslant 2\ln R$; donc

$$\left|\int_{C_R}\right|\leqslant\frac{2\ln R}{(R^2-1)^2}\pi R$$

et $\int_{C_R}\to 0$ lorsque $R\to\infty$. D'une manière analogue pour $z=re^{i\varphi}$, $0<\varphi<\pi$, à partir des r suffisamment petits, $|\ln z|\leqslant 2\ln\frac{1}{r}$; donc

$$\left|\int_{C_r}\right|\leqslant\frac{2\ln\frac{1}{r}}{(1-r^2)^2}\pi r,$$

et cette intégrale tend aussi vers zéro lorsque $r\to 0$. Après le changement de variable $z=-x$ nous obtenons pour la première intégrale :

$$\int_{-R}^{-r}=\int_r^R\frac{\ln x+\pi i}{(x^2+1)^2}\,dx$$

(*) Nous entourons le point $z = 0$ d'un petit cercle pour exclure la singularité de la fonction $f(z)$.

et ainsi, à la limite, lorsque $r \to 0$, $R \to \infty$, nous avons

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx + \pi i \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} i - \frac{\pi}{2}.$$

La comparaison des parties réelles (*) donne l'intégrale que nous voulions calculer

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

Exemple 2. Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

nous choisissons la fonction auxiliaire $f(z) = \dfrac{\ln^2 z}{(z+a)^2+b^2}$ et le contour indiqué sur la fig. 162 (à l'intérieur du contour $\ln z$ est uniforme si $0 < \arg z < 2\pi$). Sur les bords supérieur et inférieur de la coupure qui fait partie de ce contour, $\ln^2 z$ prend respectivement les valeurs $\ln^2 x$ et $(\ln x + 2\pi i)^2 = \ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2$, donc les intégrales de $\ln^2 x$ se détruisent mutuellement et on a la possibilité de calculer l'intégrale considérée. A l'intérieur du contour se trouvent deux pôles du premier ordre $z_{1,2} = -a \pm bi$ de la fonction $f(z)$ de résidus

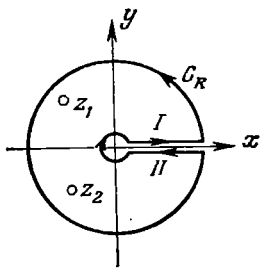

FIG. 162

$$c'_{-1} = \frac{1}{2bi}\{\ln r + i(\pi - \varphi)\}^2,$$

$$c''_{-1} = -\frac{1}{2bi}\{\ln r + i(\pi + \varphi)\}^2,$$

où $r = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. Appliquant le théorème des résidus, nous trouvons :

$$\int_I + \int_{C_R} + \int_{II} + \int_{c_r} = \frac{\pi}{b} 4\varphi(\pi - i\ln r).$$

Conformément à ce qui a été dit plus haut, nous avons :

$$\int_I + \int_{II} = -\int_r^R \frac{4\pi i \ln x - 4\pi^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.$$

(*) La comparaison des parties imaginaires donne l'intégrale élémentaire

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

De la même manière que dans l'exemple précédent, démontrons que $\lim_{r\to 0}\int_{c_r} = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} = 0$ et alors à la limite, lorsque $r\to 0$, $R\to\infty$, nous avons :

$$4\pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} - 4\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{4\pi\varphi}{b}(\pi - i\ln r).$$

Comparant les parties imaginaires, nous trouvons l'intégrale que nous voulions calculer

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{\varphi\ln r}{b} = \frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Exemple 3. A l'aide du même contour, on calcule l'intégrale (*Euler*)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx \qquad (0<a<1)$$

si on prend pour fonction auxiliaire

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z}$$

et si on remarque que sur le bord inférieur de la coupure $f(xe^{2\pi i}) = e^{2a\pi i}f(x)$. Effectuant les calculs et les estimations nécessaires, nous trouvons

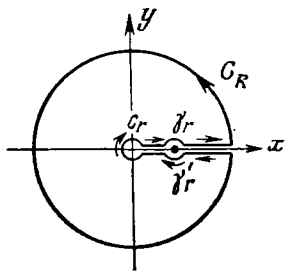

FIG. 163

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0<a<1). \qquad (3)$$

Remarquons que le changement de variable $x = e^t$ transforme cette intégrale en celle de l'exemple 3 du n° 73.

Exemple 4. Calculons la valeur principale de l'intégrale singulière

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx \qquad (0<a<1)$$

(de singularité au point $x=1$). Pour la calculer, nous prenons la fonction auxiliaire

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1-z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1-z}$$

et le contour indiqué sur la fig. 163. Vu que $f(xe^{2\pi i}) = e^{2a\pi i}f(x)$ sur le bord inférieur de la coupure suivant le demi-axe positif et que $f(z)$ est régulière à l'intérieur du contour, nous avons d'après le théorème de Cauchy :

$$\int_{cr} + (1-e^{2a\pi i})\left\{\int_r^{1-r} f(x)\,dx + \int_{1+r}^{R} f(x)\,dx\right\} + \int_{\gamma_r} + \int_{\gamma'_r} + \int_{C_R} = 0. \qquad (4)$$

Il est clair que $\int\limits_{c_r} \to 0$ lorsque $r \to 0$, et $\int\limits_{C_R} \to 0$ lorsque $R \to \infty$. Sur γ_r et γ_r', nous avons respectivement $z^{a-1} = 1 + O(r)$ et $z^{a-1} = e^{2a\pi i} + O(r)$; $1 - z = re^{i\varphi}$, $dz = -ire^{i\varphi}d\varphi$, où φ varie de 0 à $-\pi$ et de $-\pi$ à -2π; donc

$$\int\limits_{\gamma_r} + \int\limits_{\gamma_r'} = \pi i\,(1 + e^{2a\pi i}) + O(r).$$

Ainsi, en passant à la limite, lorsque $r \to 0$, $R \to \infty$, dans (4), nous avons

$$(1 - e^{2a\pi i})\,I + \pi i\,(1 + e^{2a\pi i}) = 0,$$

et l'intégrale singulière à calculer est égale à

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi. \tag{5}$$

Exemple 5. Pour calculer l'intégrale

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$$

convainquons-nous d'abord de ce que la fonction $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)(1+z)^2}$ à l'extérieur du segment $(-1, 1)$ a trois branches uniformes. En effet, posons $\varphi_1 = \arg(1+z)$, $\varphi_2 = \arg(1-z)$. Lorsqu'on se déplace dans le sens positif suivant le chemin fermé, indiqué en pointillés sur la fig. 164, φ_1 et φ_2 subissent un accroissement de 2π, donc $\arg f(z) = \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3}$ subit un accroissement de 2π et $f(z)$ reprend sa valeur initiale. Nous considérons la branche de la fonction $f(z)$ qui sur le bord supérieur du segment $(-1, 1)$ prend des valeurs positives et prenons le contour indiqué sur la figure 164 en trait continu. Sur le bord I, nous avons $\arg f(z) = 0$, c'est-à-dire $f(z) = \sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}$, sur le bord II (après avoir décrit dans le sens négatif une petite circonférence autour du point $z = 1$ de centre en ce dernier) $\arg f(z) = -\frac{2}{3}\pi$, c'est-à-dire $f(z) = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}$;

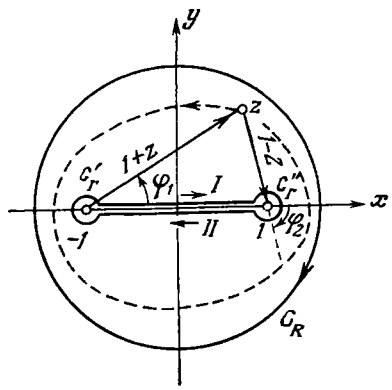

FIG. 164

les intégrales sur les petites circonférences c_r' et c_r'' tendent évidemment vers zéro lorsque $r \to 0$. Donc, d'après le théorème de Cauchy pour les domaines multiplement connexes

$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}) \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = \int\limits_{C_R} \frac{dz}{f(z)}.$$

Pour calculer $\int_{C_R}$, il est préférable d'avoir recours au développement de la branche $\frac{1}{f(z)}$ au voisinage du point à l'infini. Sortant $-z^3$ de sous la racine, nous avons

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{ze^{-\frac{\pi i}{3}}} \left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}},$$

où $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}}$ et $\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}}$ sont les branches de ces fonctions qui sont positives sur le segment $(1, \infty)$ de l'axe positif. Développant ces dernières suivant la formule du binôme, nous trouvons le résidu de la branche choisie $\frac{1}{f(z)}$ au point à l'infini : il est égal à $-e^{\frac{\pi i}{3}}$ (le coefficient de $\frac{1}{z}$ muni du signe contraire).

Mais l'intégrale $\int_{C_R}$ est égale à ce résidu multiplié par $2\pi i$ (cf. n° 24), donc nous avons

$$(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})\, I = -e^{\frac{\pi i}{3}} 2\pi i,$$

d'où

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \tag{6}$$

Donnons encore deux exemples de calcul d'intégrales à limites d'intégration finies.

Exemple 6. Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2} \qquad (a > b > 0)$$

nous posons $e^{it} = z$, alors $dt = \frac{dz}{ie^{it}} = \frac{dz}{iz}$, $\cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ et cette intégrale est remplacée par l'intégrale sur la circonférence unité :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2} = \frac{4}{ib^2} \int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left(z^2+\frac{2a}{b}z+1\right)^2}.$$

Dans la circonférence $|z|=1$, la fonction à intégrer a pour pôle le point $z_0 = \frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}$, de résidu

$$c_{-1} = \left[\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)^2}\right]_{z=z_0} = \frac{b^2 a}{4(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

D'après le théorème des résidus on a pour l'intégrale à calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}} \qquad (a>b>0). \tag{7}$$

Exemple 7. On calcule d'une manière analogue l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n \cos nt}{1-2a\cos t-a}\,dt \qquad \left(-1<a<\frac{1}{3}\right).$$

Après le changement de variable $e^{it}=z$, nous avons :

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n e^{int}}{1-2a\cos t-a}\,dt = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(1+z+z^2)^n}{(1-a)\,z-a\,(1+z^2)}\,dz.$$

L'un des pôles $z_{1,2}=\dfrac{1-a\pm\sqrt{1-2a-3a^2}}{2a}$ de la fonction à intégrer se trouve à l'intérieur de la circonférence et l'autre à l'extérieur, car, d'après une propriété des racines de l'équation du deuxième degré, $z_1z_2=1$; en outre, en vertu de la condition $-1<a<\dfrac{1}{3}$, ces racines sont réelles et distinctes. Ainsi, d'après le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n e^{int}}{1-a-2a\cos t}\,dt = 2\pi\,\frac{(1+z_1+z_1^2)^n}{1-a-2az_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-2a-3a^2}}\left(\frac{z_1}{a}\right)^n, \tag{8}$$

où $z_1=\dfrac{1}{2a}\left(1-a-\sqrt{1-2a-3a^2}\right)$ est le pôle qui se trouve à l'intérieur de la circonférence. Puisque le second membre de (8) est réel, il donne l'intégrale à calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n \cos nt}{1-2a\cos t-a}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1-2a-3a^2}}\left(\frac{1-a-\sqrt{1-2a-3a^2}}{2a^2}\right)^n. \tag{9}$$

Pour terminer, donnons certaines représentations intégrales de la fonction gamma.

Exemple 8. La *fonction gamma* est définie par l'intégrale (*Euler*)

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt, \tag{10}$$

prise le long du demi-axe positif. Cette intégrale converge absolument et représente une fonction analytique pour tous les z appartenant au demi-plan de droite $\operatorname{Re} z>0$, car $|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}t^{x-1}$ (cf. théorème 4 du n° 16). En déformant le contour d'intégration, on peut obtenir une autre représentation de la fonction gamma valable dans un domaine plus grand de valeurs de la variable, c'est-à-dire que l'on réalise le *prolongement analytique* de cette fonction.

Considérons la fonction

$$F(z)=\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta, \tag{11}$$

où l'intégrale est prise le long du contour C formé de la coupure à deux bords suivant le demi-axe positif et de la circonférence $|\zeta| = r$ (fig. 165). Par ζ^{z-1} on comprend ici la fonction $e^{(z-1)\ln\zeta}$, où $\ln\zeta$ est la branche du logarithme pour laquelle $0 < \arg\zeta \leqslant 2\pi$.

Posant $\zeta = t$ sur le bord supérieur de la coupure et $\zeta = te^{2\pi i}$ sur le bord inférieur, nous pouvons encore représenter la fonction $F(z)$ sous la forme suivante

$$F(z) = \int_{I} + \int_{c_r} + \int_{II} = (e^{2\pi iz} - 1) \int_{r}^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt + \int_{c_r} e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\, d\zeta.$$

Pour r fixe, l'intégrale impropre qui participe dans cette formule converge uniformément par rapport à z dans tout domaine borné des valeurs de $z = x + iy$. Cela découle de ce que pour $|z| < M$ la fonction à intégrer est majorée par la fonction $e^{-t} t^{M+1}$ dont l'intégrale prise le long du segment (r, ∞) converge. Ainsi, la *fonction $F(z)$ est analytique pour tous les z à distance finie (entière).*

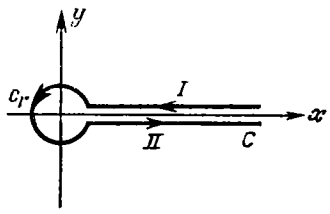

FIG. 165

Sur c_r, où $\zeta = re^{i\varphi}$, nous avons $|e^{-\zeta}\zeta^{z-1}| = e^{-r\cos\varphi} e^{(x-1)\ln r - \varphi y} < Ar^{x-1}$, où A est une constante (pour z fixe); il en découle que $\left|\int_{c_r}\right| < A 2\pi r^x$. Supposons maintenant que $\operatorname{Re} z = x > 0$, alors $\int_{c_r} \to 0$ lorsque $r \to 0$.

Ainsi, pour $\operatorname{Re} z > 0$ nous avons le droit de passer à la limite lorsque $r \to 0$, et, en vertu de la définition (10), nous obtenons:

$$F(z) = (e^{2\pi iz} - 1) \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt = (e^{2\pi iz} - 1)\,\Gamma(z)$$

(pour $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ ce passage à la limite n'est pas ligitime). Nous avons une nouvelle *représentation intégrale de la fonction gamma (Hankel)*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_{C} e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\, d\zeta. \tag{12}$$

Remarquons que le second membre représente le rapport de deux fonctions entières $F(z)$ et $e^{2\pi iz} - 1$. Dans le demi-plan de droite, il coïncide avec la fonction analytique $\Gamma(z)$; donc (12) *donne le prolongement analytique de $\Gamma(z)$ dans le demi-plan de gauche et $\Gamma(z)$ est donc une fonction méromorphe, analytique partout, excepté aux points entiers négatifs* (*) $z = -n$ *et* $z = 0$, *en lesquels le dénominateur de* (12) *s'annule.*

Remplaçons z par $1 - z$ dans (12)

$$\Gamma(1-z) = \frac{1}{e^{-2\pi iz} - 1} \int_{C} e^{-\zeta}\zeta^{-z}\, d\zeta = \frac{e^{-\pi iz}}{e^{-2\pi iz} - 1} \int_{C} e^{-\zeta}(-\zeta)^{-z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{i}{2\sin\pi z} \int_{C} e^{-\zeta}(-\zeta)^{-z}\, d\zeta. \tag{13}$$

(*) Pour les points entiers positifs, comme nous l'avons vu précédemment, $\Gamma(z)$ est analytique; donc le numérateur de (12) s'annule en ces points.

Nous démontrerons dans le chapitre VII la formule

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{14}$$

vraie pour tous les z complexes. Usant de cette formule et remplaçant la variable d'intégration ζ par $-\zeta$ dans (13), ce qui fait que le contour C est remplacé par le contour C^* (fig. 166), nous obtenons la *représentation intégrale de la fonction* $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *(Hankel)*:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^{\zeta} \zeta^{-z}\, d\zeta. \tag{15}$$

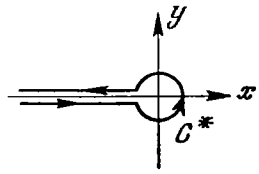

FIG. 166

75. Calcul du nombre des zéros. Questions de stabilité. On rencontre fréquemment en analyse des problèmes exigeant la détermination du nombre des zéros d'une fonction analytique qui appartiennent à un domaine donné. La solution générale de ce problème est donnée par le principe de l'argument (n° 23); le nombre des zéros de la fonction $f(z)$ intérieurs à un contour fermé C est

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z), \tag{1}$$

où $\Delta_C \arg f(z)$ désigne l'accroissement total de $\arg f(z)$ lorsqu'on décrit le contour C. On suppose en outre que $f(z)$ est analytique à l'intérieur de C, continue sur C et ne s'y annule pas; chaque zéro est compté autant de fois que son ordre de multiplicité l'indique.

Il est parfois utile d'avoir recours à un corollaire simple du principe de l'argument.

Théorème (Rouché). *Si des fonctions $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques à l'intérieur de C, continues sur C et satisfont à la condition*

$$|f(z)| > |g(z)|, \tag{2}$$

alors les fonctions $f(z)$ et $f(z) + g(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.

Pour démontrer ce théorème, remarquons que, en vertu de notre condition sur C, $|f(z)| > 0$ et $|f(z) + g(z)| \geqslant |f(z)| - |g(z)| > 0$. Par conséquent, les fonctions $f(z)$ et $f(z) + g(z)$ ne s'annulent pas sur C et on peut leur appliquer le principe de l'argument. De la relation $\arg\{f(z) + g(z)\} = \arg f(z) + \arg\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\}$, nous trouvons

$$\Delta_C \arg\{f(z) + g(z)\} = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg\left\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right\}.$$

Mais puisque pendant le déplacement du point z sur le contour C le point $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ reste tout le temps dans le cercle

$|w-1|<1$ (cela découle de ce que $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$ sur C), le point w ne peut pas faire un tour autour de l'origine des coordonnées, ce qui signifie que $\Delta_C \arg\left\{1+\frac{g(z)}{f(z)}\right\}=0$. Ainsi

$$\Delta_C \arg\{f(z)+g(z)\}=\Delta_C \arg f(z), \tag{3}$$

et il ne reste plus qu'à utiliser la formule (1).

Donnons plusieurs exemples d'application de ce théorème.

1) Démontrons le *théorème fondamental de l'algèbre*: *l'équation*

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_{n-1}z+c_n=0 \quad (c_0\neq 0) \tag{4}$$

a dans le plan complexe n racines (*à distance finie*). Pour le démontrer, prenons $f(z)=c_0z^n$, $g(z)=c_1z^{n-1}+\ldots+c_n$ et choisissons R suffisamment grand pour que sur la circonférence $|z|=R$ on ait $|f(z)|>|g(z)|$, ce qui est possible, car $|f(z)|=|c_0|R^n$, $|g(z)|\leqslant|c_1|R^{n-1}+\ldots+|c_n|$ et que R^n croît plus rapidement que tout polynôme de degré $(n-1)$. Alors, d'après le théorème de Rouché, le nombre des racines de l'équation dans le cercle $|z|<R$ est égal au nombre des zéros de z^n, c'est-à-dire à n. D'autre part, puisque $c_0z^n+\ldots+c_n\to\infty$, lorsque $z\to\infty$, en augmentant R en cas de nécessité nous pouvons supposer que l'équation n'a pas de racines à l'extérieur du cercle.

2) Pour déterminer le nombre des racines de l'équation

$$z^8-5z^5-2z+1=0$$

dans le cercle unité, posons $f(z)=-5z^5+1$ et $g(z)=z^8-2z$. Puisque, pour $|z|=1$, nous avons $|f(z)|\geqslant|5z^5|-1=4$ et $|g(z)|\leqslant|z|^8+2|z|=3$, notre équation a dans le cercle unité autant de racines que l'équation $5z^5=1$, c'est-à-dire 5 racines.

3) Démontrons que l'équation

$$z+e^{-z}=\lambda, \tag{5}$$

où $\lambda>1$, a une seule racine (réelle) dans le demi-plan de droite. Pour cela, considérons le contour formé du segment $(-iR, iR)$ et de la demi-circonférence de droite $|z|=R$ et posons $f(z)=z-\lambda$, $g(z)=e^{-z}$. Sur le segment où $z=iy$, nous avons $|f(z)|=|\lambda-iy|\geqslant\lambda>1$ et $|g(z)|=|e^{-iy}|=1$. Sur la demi-circonférence: $|z|=R$, $\operatorname{Re} z=x>0$, pour R suffisamment grand $(R>\lambda+1)$, nous avons: $|f(z)|\geqslant|z|-\lambda=R-\lambda>1$; $|g(z)|=e^{-x}\leqslant 1$. Par conséquent, le théorème de Rouché peut être appliqué et, à l'intérieur de tout contour du type décrit, l'équation (5) a autant de racines que l'équation $z-\lambda=0$, c'est-à-dire une et seulement une racine. Ainsi, dans tout le demi-plan de droite, l'équation donnée a une racine unique. Cette racine est réelle, car pour $z=0$ le premier membre de l'équation est égal à $1<\lambda$ et, lorsque $z=x\to\infty$, il croît indéfiniment; par conséquent, il existe un $z=x$ pour lequel le premier membre est égal à λ.

Pour les applications le *problème de Routh-Hurwitz* est particulièrement important (*).

(*) Ce problème a été posé pour la première fois par *J. Maxwell* en 1868, et *E. Routh* (1877) en a donné la première solution qui n'a pas connu l'extension voulue. Une solution plus commode pour les applications (cf. plus loin) appartient à *A. Hurwitz* (1895).

Trouvez les conditions pour lesquelles les zéros d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle (et dans un énoncé plus général d'une fonction entière ou méromorphe) appartiennent au demi-plan de gauche.

L'importance de ce problème est fonction de son lien avec le problème de la stabilité des oscillations dans les systèmes mécaniques et électriques. Pour expliquer ce lien, rappelons que les problèmes les plus simples de la théorie des oscillations se ramènent à des équations différentielles linéaires à coefficients constants:

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = 0. \qquad (6)$$

Comme on le sait, la solution générale de cette équation est de la forme:

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \ldots + C_n e^{p_n t},$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les racines du polynôme caractéristique

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n,$$

et $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires (*). A chaque racine complexe $p_k = s_k + i\sigma_k$ du polynôme correspond une oscillation $e^{p_k t} = e^{s_k t}\{\cos \sigma_k t + i \sin \sigma_k t\}$ de fréquence σ_k. Pour $s_k < 0$ cette oscillation est amortie, pour $s_k = 0$ elle est harmonique et pour $s_k > 0$ elle a une amplitude indéfiniment croissante. Ainsi, si nous voulons nous limiter à des circuits oscillants ne possédant pas d'oscillations propres à amplitude indéfiniment croissante, nous devons exiger que toutes les racines du polynôme $A(p)$ appartiennent au demi-plan de gauche ou à l'axe imaginaire.

Nous donnons des méthodes simples de résolution du problème de Routh-Hurwitz; le lecteur pourra trouver un exposé plus complet dans la monographie de N. Tchébotarev et N. Meymann [4] ou dans les cours de théorie de régulation (cf. par exemple [5] ou [6]). Commençons par une méthode algébrique de résolution du problème dans le cas des polynômes.

1) Critère de Hurwitz. Pour plus de simplicité, nous supposons que les coefficients du polynôme donné

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

sont des nombres réels et que $a_0 > 0$. On a le théorème suivant:

Théorème (A. Hurwitz, 1895). *Pour que toutes les racines du polynôme (7) à coefficients réels a_k ($a_0 > 0$) aient des parties réelles négatives, il faut et il suffit que le système d'inégalités suivantes soit*

(*) Pour plus de simplicité, nous nous limitons aux cas des racines simples.

satisfait :

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ \ldots,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{vmatrix} > 0 \tag{8}$$

(*nous posons* $a_k = 0$ *pour* $k > n$).

Nous démontrons ce théorème par récurrence. Pour $n = 1$, le théorème est vrai, car les conditions (8) se réduisent dans ce cas à l'inégalité $a_1 > 0$, d'où, vu la supposition $a_0 > 0$, il découle que la racine du polynôme $f(z) = a_0 z + a_1$ est négative.

Supposons maintenant que le théorème soit vrai pour les polynômes de degré $\leqslant n - 1$ et démontrons qu'il est vrai pour les polynômes de degré n. Pour cela, posons $f(z) = p + q$, où

$$p = a_0 z^n + a_2 z^{n-2} + \ldots, \quad q = a_1 z^{n-1} + a_3 z^{n-3} + \ldots,$$

et considérons le polynôme de degré $\leqslant n-1$

$$\varphi(z) = a_1 p + (a_1 - a_0 z)\, q = a_1^2 z^{n-1} + \\ + (a_1 a_2 - a_0 a_3)\, z^{n-2} + a_1 a_3 z^{n-3} + (a_1 a_4 - a_0 a_5)\, z^{n-4} + \ldots \tag{9}$$

La démonstration ultérieure sera faite en deux étapes.

a) *Les déterminants* (8) *pour le polynôme* $\varphi(z)$ *s'expriment par des déterminants analogues pour* $f(z)$ *d'après la formule*

$$\Delta_k = a_1^{k-1} D_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{10}$$

En effet, nous avons :

$$a_0 a_1 \Delta_k = a_0 a_1 \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & \ldots & 0 \\ a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{c|ccccc} a_0 a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ 0 \\ \hline a_0 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & 0 & 0 & \ldots\ 0 \\ a_0 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & \ldots\ 0 \\ a_0 a_7 & a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_3 & a_1 a_5 & \ldots\ 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 a_1 & a_1 a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_0 a_3 & a_1 a_2 & a_1^2 & a_1 a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_0 a_5 & a_1 a_4 & a_1 a_3 & a_1 a_2 & a_1^2 & \ldots & 0 \\ a_0 a_7 & a_1 a_6 & a_1 a_5 & a_1 a_4 & a_1 a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = a_0 a_1^k D_{k+1}$$

(nous « encadrons » le déterminant, puis nous ajoutons aux éléments de la deuxième colonne les éléments de la première, aux éléments de la quatrième les éléments de la troisième multipliés par $\frac{a_0}{a_1}$, etc.; enfin on met a_0 en facteur dans la première colonne et a_1 dans les autres colonnes).

b) *Les racines de $f(z)$ appartiennent au demi-plan de gauche H si et seulement si $a_1 > 0$ et les racines de $\varphi(z)$ appartiennent à H.*

Supposons que les racines de $f(z)$ se trouvent dans H; outre le polynôme

$$f(z) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (11)$$

construisons le polynôme

$$f_*(z) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (z + \bar{z}_k) = a_0 z^n - a_1 z^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n, \qquad (12)$$

dont les racines appartiennent au demi-plan de droite (les expressions de ses coefficents s'obtiennent en développant les produits). Il est clair que

$$f(z) + f_*(z) = 2p, \quad f(z) - f_*(z) = 2q.$$

Puisque $|z - z_k| \gtreqless |z + \bar{z}_k|$ pour $\operatorname{Re} z \gtreqless 0$, on a

$$|f(z)| \gtreqless |f_*(z)| \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z \gtreqless 0; \qquad (13)$$

donc q ne peut avoir que des racines purement imaginaires. Montrons que ces racines sont simples. Démontrons-le par l'absurde et supposons qu'en un point quelconque iy on a simultanément $f(iy) = f_*(iy)$ et $f'(iy) = f'_*(iy)$; alors

$$\frac{f'(iy)}{f(iy)} = \frac{f'_*(iy)}{f_*(iy)} \quad \text{ou} \quad [\ln f(iy)]' = [\ln f_*(iy)]'$$

(f et f_* n'ont pas de racines sur l'axe imaginaire). En vertu des formules (11) et (12) la dernière relation s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{iy - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{iy + \bar{z}_k},$$

mais comme $\operatorname{Re} \frac{1}{iy - z_k} > 0$ et $\operatorname{Re} \frac{1}{iy + \bar{z}_k} < 0$ (*) pour tous les k, cette relation ne peut avoir lieu.

(*) Rappelons que $\operatorname{Re} z = x$ et $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ont le même signe.

Le degré du polynôme q est $n-1$, car, d'après la propriété connue des racines d'un polynôme, $\frac{a_1}{a_0} = -\sum_{k=1}^{n} z_k > 0$ et, par conséquent, $a_1 \neq 0$; le degré de p est n. Ainsi, tenant compte de ce qui a été démontré plus haut, nous avons le développement

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0}{a_1} z + \sum_{n=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{z - i\beta_k} + C. \tag{14}$$

Puisque

$$\frac{p}{q} = \frac{f + f_*}{f - f_*} = \frac{1 + \frac{f_*}{f}}{1 - \frac{f_*}{f}} \tag{15}$$

et que la fonction homographique $\omega = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ transforme le cercle $|\zeta| < 1$ sur le demi-plan de droite, en vertu des inégalités (13), on peut affirmer que

$$\operatorname{Re} \frac{p(z)}{q(z)} \gtreqless 0 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z \gtreqless 0. \tag{16}$$

Nous en concluons que dans le développement (14) tous les $\lambda_k > 0$ (car $\operatorname{Re} \frac{1}{z - i\beta_k} \gtreqless 0$ pour $\operatorname{Re} z \gtreqless 0$ et au voisinage du point $z = i\beta_k$ le signe de $\operatorname{Re} \frac{p}{q}$ est déterminé par le signe de $\operatorname{Re} \frac{\lambda_k}{z - i\beta_k}$) et que C est une constante purement imaginaire.

Enfin usant de (14) nous trouvons :

$$\varphi = a_1 + p(a_1 - a_0 z)\, q = a_1 q \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{z - i\beta_k} + C \right\},$$

et on voit de cette formule que φ ne peut avoir de racines pour $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. En effet, la partie réelle de l'expression entre accolades est positive pour $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ et q ne s'annule qu'aux points $i\beta_k$, en lesquels on a évidemment $\varphi \neq 0$ (car, dans le cas contraire, en ces points on aurait $p = 0$ et cela signifie que $f = 0$, ce qui est en contradiction avec la condition). Ainsi, toutes les racines du polynôme $\varphi(z)$ appartiennent au demi-plan de gauche H.

Supposons maintenant que toutes les racines de $\varphi(z)$ appartiennent à H et $a_1 > 0$. On voit de la formule (9) que, pour φ, les polynômes p_1 et q_1, analogues aux polynômes p et q pour f, sont de la forme $p_1 = a_1 q$ et $q_1 = a_1 p - a_0 z q$, donc

$$\frac{p}{q} = \frac{q_1}{p_1} + \frac{a_0}{a_1} z. \tag{17}$$

Répétant pour φ les raisonnements que nous avons donnés plus haut pour f, nous trouvons que $\operatorname{Re}\frac{p_1}{q_1}\gtreqless 0$ pour $\operatorname{Re} z \gtreqless 0$. Puisque $\frac{a_0}{a_1} > 0$ et que le signe de $\operatorname{Re}\frac{q_1}{p_1}$ coïncide avec le signe de $\operatorname{Re}\frac{p_1}{q_1}$, nous déduisons de (17) les inégalités (16). Mais alors, à l'aide de (15), nous démontrons que les inégalités (13) sont satisfaites. Ainsi, pour $\operatorname{Re} z > 0$ nous avons $|f(z)| > |f_*(z)|$, d'où il découle que $f(z)$ n'a pas de racines dans le demi-plan de droite. Mais $f(z)$ ne peut non plus avoir de racines sur l'axe imaginaire, car sur ce dernier $|f(z)| = |f_*(z)|$ et chaque racine purement imaginaire de $f(z)$ serait racine de p et q et, par conséquent, de $\varphi(z)$, ce qui est en contradiction avec la supposition faite. C'est pourquoi toutes les racines de $f(z)$ appartiennent à H. Ainsi, la proposition b) est démontrée. En s'appuyant sur cette dernière et sur la proposition a) on passe facilement de $n-1$ à n et par là même on termine la démonstration du théorème de Hurwitz.

Exemples. 1) Pour le polynôme $f(z) = z^3 + 2z^2 + 3z + 1$ nous avons $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$, $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$; par conséquent, toutes ses racines appartiennent au demi-plan de gauche.

2) Pour le polynôme $f(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$ nous avons $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$, par conséquent, au moins une de ses racines appartient au demi-plan de droite ou se trouve sur l'axe imaginaire (d'ailleurs $f(iy) = iy(1 - y^2) + 1 - 2y^2$, d'où l'on voit que le polynôme n'a pas de racines purement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut dire qu'au moins l'une de ses racines appartient au demi-plan de droite).

On peut obtenir du développement (11) une condition *nécessaire* pour que toutes les racines du polynôme à coefficients réels appartiennent au demi-plan de gauche : *tous les coefficients de ce polynôme doivent avoir le même signe* (*condition de A. Stodola*). Cependant, comme le montre, par exemple, l'exemple 2, cette condition n'est pas suffisante (*).

2) Méthodes géométriques. Du point de vue géométrique le problème de Routh-Hurwitz se ramène à la question de savoir si l'image Δ du demi-plan de droite $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ par la transformation $w = f(z)$, réalisée par la fonction méromorphe donnée, contient le point $w = 0$. Sur la surface de Riemann R de la fonction $f(z)$, le domaine $\widetilde{\Delta}$ est limité par la courbe $\widetilde{\Gamma}$ qui correspond à l'axe imaginaire du plan des z ; dans la théorie de régulation automatique, cette courbe est appelée *hodographe de fréquence.*

(*) Il est intéressant de remarquer que A. Stodola a proposé en 1894 cette condition comme une condition nécessaire et suffisante.

A l'aide des propriétés géométriques des fonctions analytiques, on peut énoncer le critère suivant :

Critère de stabilité. *Si une partie $\widetilde{\Delta}$ de la surface de Riemann de la fonction $f(z)$, qui se trouve à droite de l'hodographe de fréquence lorsqu'on le parcourt dans le sens des y croissants, ne contient pas de points au-dessus de $w = 0$ (et l'hodographe lui-même ne passe pas au-dessus de ce point), alors le système de régulation automatique correspondant est stable, si cette condition n'est pas satisfaite, il est instable.*

Dans les problèmes pratiques, l'étude de la forme d'une surface de Riemann s'avère souvent laborieuse bien que la construction de la projection Γ de l'hodographe de fréquence sur le plan des w soit d'ordinaire assez facile. Pour cela, il suffit de séparer les parties réelle et imaginaire de l'équation $w = f(iy)$ et nous obtenons les équations paramétriques $u = u(y)$, $v = v(y)$, $-\infty < y < \infty$, de la courbe Γ. Cependant, si on ne considère pas la surface de Riemann et qu'on applique le critère énoncé au domaine Δ_0 du plan des w, qui se trouve à droite de Γ, on peut aboutir à une fausse conclusion. Cela se rapporte aux cas où Γ ne passe pas par tous les feuillets de R au-dessus de Γ ; en passant par les feuillets ne contenant pas de points de $\widetilde{\Gamma}$, on peut sortir du domaine Δ_0 et même arriver jusqu'au point $w = 0$ bien que Δ_0 ne le contienne pas. Puisque le domaine $\widetilde{\Delta}$ est simplement connexe, dans ces cas, au-dessus des points de Δ_0, il existe à coup sûr des points de branchement de la surface R réunissant les feuillets libres de $\widetilde{\Gamma}$ aux feuillets contenant cette courbe.

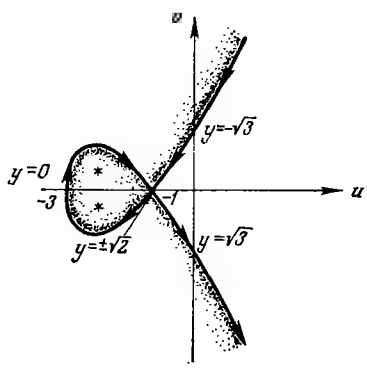

FIG. 167

Exemple : Pour le polynôme

$$f(z) = z^3 - z^2 + 2z - 3$$

la courbe Γ : $u = y^2 - 3$, $v = y(2 - y^2)$, a la forme qui est représentée sur la fig. 167. Le domaine Δ_0 (ombré sur la figure) ne contient pas le point $w = 0$, néanmoins le domaine Δ (projection de $\widetilde{\Delta}$) coïncide avec le plan ; le système de régulation automatique correspondant est évidemment instable (la condition de Stodola n'est pas satisfaite). Ici la surface de Riemann possède des points de branchement (*) au-dessus des points qui sont indiqués par des étoiles sur la fig. 167 ; la courbe $\widetilde{\Gamma}$ appartient à l'un de ses trois feuillets.

Dans certains problèmes, la forme du domaine Δ, projection de $\widetilde{\Delta}$ sur le plan des w, peut être décrite sans faire l'étude de la surface de Riemann. Pour cela, on peut, par exemple, considérer un système

(*) Les points de branchement correspondent par la transformation $w = f(z)$ aux racines de l'équation $f'(z) = 3z^2 - 2z + 2 = 0$.

de demi-cercles D_R : $|z| \leqslant R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, et tirer au clair la forme des domaines Δ_R correspondant à ces demi-cercles par la transformation $w = f(z)$. Sachant comment varie Δ_R lorsque R varie, nous pouvons connaître aussi la forme du domaine Δ. Il est clair que, dans l'énoncé du critère de stabilité, le domaine $\widetilde{\Delta}$ sur la surface de Riemann peut être remplacé par ce domaine plan.

Donnons un autre critère géométrique de stabilité qui concerne une classe importante de problèmes de la théorie de régulation automatique dans lesquels les fonctions étudiées sont de la forme

$$f(z) = \frac{1}{KG(z)} + 1, \tag{18}$$

où $G(z)$ est une fonction rationnelle et K une constante. C'est le cas des *systèmes à asservissement simple*. La constante K a un sens physique déterminé et elle est appelée *coefficient d'amplification* ; on l'a mise en évidence dans l'expression de $G(z)$ à partir de considérations constructives : les divers éléments du système de régulation influent sur les quantités K et G.

Pour obtenir le critère de stabilité en question pour la fonction (18), nous avons recours au principe de l'argument du n° 23. Il est clair que les pôles de la fonction $f(z)$ sont les zéros de $G(z)$; si l'on désigne par P le nombre de ces pôles dans le demi-plan de droite, alors, conformément au principe de l'argument, la condition d'absence de zéros de $f(z)$ dans le demi-plan de droite se ramène à la condition

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R} \arg f(z) = P,$$

où C_R est la frontière du demi-cercle D_R (cf. plus haut) de rayon suffisamment grand parcourue dans le sens négatif (*).

Ainsi, lorsqu'on parcourt C_R (dans le sens négatif), le vecteur $f(z)$ doit tourner P fois autour de l'origine des coordonnées dans le sens positif. Tenant compte de ce que la rotation du vecteur $f(z)$ autour de l'origine des coordonnées est équivalente à la rotation du vecteur $\frac{1}{KG(z)} = f(z) - 1$ autour du point $w = -1$ ou du vecteur $\frac{1}{G(z)}$ autour du point $w = -K$, nous aboutissons au critère de stabilité suivant qui est d'ordinaire associé aux noms de H. Nyquist et A. Mikhaïlov.

Critère de Nyquist-Mikhaïlov. *Pour qu'un système de régulation automatique décrit par la fonction* (18) *soit stable*,

(*) La différence de signe avec la formule du n° 23 tient à ce qu'au numéro 23 la frontière du domaine est parcourue dans le sens positif.

il faut et il suffit que lorsqu'on parcourt dans le sens négatif la frontière du demi-cercle D_R, limité par un segment de l'axe imaginaire et une demi-circonférence de rayon suffisamment grand, le vecteur $\frac{1}{G(z)}$ tourne autour du point $w = -K$ dans le sens positif P fois, où P est le nombre des pôles de $\frac{1}{G(z)}$ dans le demi-plan de droite.

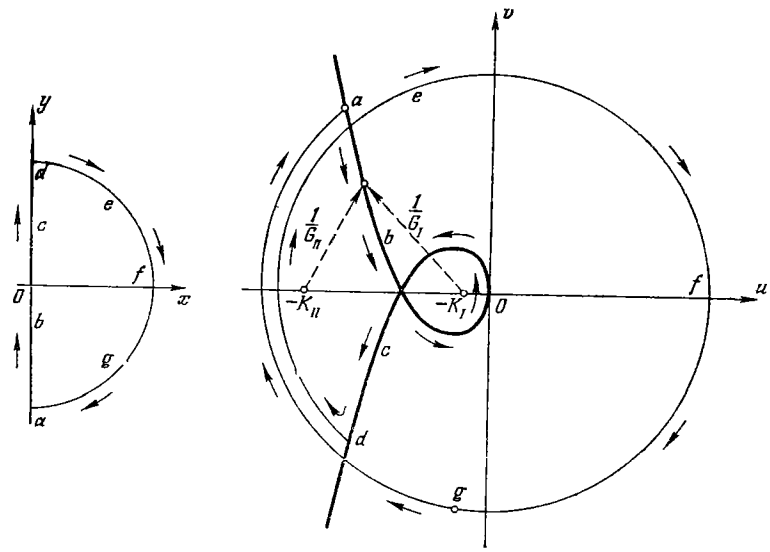

FIG. 168

Exemple. Supposons que la fonction $G(z)$ soit de la forme

$$G(z) = \frac{1}{z(1+\tau_1 z)(1+\tau_2 z)},$$

où τ_1 et τ_2 sont des constantes positives. L'hodographe de fréquence de la fonction $\frac{1}{G(z)}$ est donné par l'équation

$$w = \frac{1}{G(iy)} = iy(1+i\tau_1 y)(1+i\tau_2 y) = -(\tau_1+\tau_2)y^2 + iy(1-\tau_1\tau_2 y^2)$$

et a la forme représentée sur la fig. 168 en trait continu gras. En effet, nous avons:

$$u = -(\tau_1+\tau_2)y^2, \quad v = y(1-\tau_1\tau_2 y^2),$$

d'où l'on voit que l'hodographe se trouve entièrement dans le demi-plan de gauche et coupe l'axe des u pour $y = 0$ et pour $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$, de plus le coefficient angulaire de la tangente $\frac{dv}{du} = \frac{3\tau_1\tau_2 y^2 - 1}{2(\tau_1+\tau_2)y}$ est égal à ∞ et à $\pm\frac{\sqrt{\tau_1\tau_2}}{\tau_1+\tau_2}$

aux points d'intersection de l'hodographe et de l'axe des u et croît indéfiniment lorsque $|y| \to \infty$. Pour les $|z|$ suffisamment grands, nous avons $\frac{1}{G(z)} \approx \tau_1\tau_2 z^3$, d'où l'on voit qu'à la demi-circonférence de droite $|z| = R$, $\operatorname{Re} z > 0$, pour les grands R correspond une courbe voisine de la circonférence $|w| = \tau_1\tau_2 R^3$ parcourue une fois et demie (cf. fig. 168).

Supposons que la valeur du coefficient d'amplification $K = K_I$ soit telle que le point $-K_I$ se trouve dans la boucle de l'hodographe (puisqu'au point multiple de l'hodographe $y^2 = \frac{1}{\tau_1\tau_2}$, on a pour ce point $u = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}$ et notre cas correspond aux valeurs $0 < K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}$). Comme on le voit sur la figure, lorsqu'on décrit C_R entièrement, dans ce cas le vecteur $\frac{1}{G(z)} = \frac{1}{G_I}$ (représenté en pointillés sur la figure) ne fait pas de tour; si on commence à parcourir le contour à partir du point a, alors $\frac{1}{G_I}$ fait d'abord (lorsqu'on parcourt l'hodographe) plus d'un tour dans le sens positif, puis (lorsqu'on parcourt la courbe qui correspond à la demi-circonférence) il tourne du même angle dans le sens négatif. Si la valeur de $K = K_{II}$ est telle que le point $-K_{II}$ se trouve à gauche de la boucle de l'hodographe $\left(\text{c'est-à-dire } K > \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}\right)$, alors lorsqu'on décrit C_R entièrement, le vecteur $\frac{1}{G(z)} = \frac{1}{G_{II}}$ fait évidemment deux tours complets dans le sens négatif (fig. 168).

Etant donné que, dans le cas considéré, le nombre des pôles de $\frac{1}{G(z)}$ dans le demi-plan de droite est nul, conformément au critère de Nyquist-Mikhaïlov le système de régulation automatique correspondant est stable pour $0 < K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}$ et instable pour $K > \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}$.

3. Méthode de Vychnégradski-Nyquist. Cette méthode est un développement de la précédente et est aussi adaptée à l'étude des fonctions dépendant des paramètres (*). Nous considérons une famille de polynômes dépendant de deux paramètres réels ξ et η ou, ce qui revient au même, d'un paramètre complexe $\zeta = \xi + i\eta$:

$$f(z, \zeta) = P_1(z)\,\xi + P_2(z)\,\eta - P_3(z), \tag{19}$$

où $P_k(z)$ sont des polynômes fixes. Nous supposons qu'il n'existe pas de racines communes à ces trois polynômes (si une telle racine z_0 existait, on pourrait alors simplifier l'équation par le facteur $z - z_0$ élevé à une puissance adéquate); nous désignons par n le plus grand degré des polynômes.

(*) L'idée de la méthode appartient à l'ingénieur russe *I. Vychnégradski* (1877), l'élaboration ultérieure à l'ingénieur américain *H. Nyquist* (1932); l'argumentation rigoureuse de la méthode a été donnée par le mathématicien soviétique *N. Meymann* (1949) et nous donnons son exposé [4].

Désignons dans le plan du paramètre ζ par $D(k, n-k)$ l'ensemble de points pour chacun desquels le polynôme (19) a k racines en z à parties réelles négatives et $n-k$ racines à parties réelles positives (*). En particulier $D(n, 0)$, *domaine de stabilité*, est l'ensemble des points ζ pour lesquels toutes les racines ont des parties réelles négatives. Etant donné que les racines du polynôme dépendent d'une façon continue de ζ, avec chaque point ζ un voisinage suiffisamment petit de ce point appartient à l'ensemble $D(k, n-k)$. Il en découle que l'ensemble $D(k, n-k)$ est formé d'un certain nombre de domaines.

Le point ζ n'appartient à aucun des domaines $D(k, n-k)$ si le polynôme (19) correspondant a au moins une racine purement imaginaire ou, en particulier, une racine à l'infini que l'on peut considérer comme appartenant aussi à l'axe imaginaire. Par une petite variation des paramètres ξ et η, on peut arriver dans ce cas à ce que le polynôme n'ait plus de racines purement imaginaires; donc le complémentaire de l'ensemble de tous les domaines $D(k, n-k)$ est formé des points frontières de ces domaines. L'idée de Vychnégradski consiste précisément à déterminer les domaines $D(k, n-k)$ dans le plan des paramètres.

Considérons d'abord le cas particulier lorsque le polynôme $P_2(z) = iP_1(z)$, c'est-à-dire

$$f(z, \zeta) = P_1(z)\,\zeta - P_3(z). \tag{20}$$

L'équation $f(z, \zeta) = 0$, que l'on peut dans ce cas écrire sous la forme

$$\zeta = \frac{P_3(z)}{P_1(z)}, \tag{21}$$

établit une correspondance entre les plans des z et des ζ, de plus à chaque point ζ_0 correspondent n points $z_0^{(\nu)}$, racines de l'équation (20) pour la valeur donnée ζ_0 du paramètre (certaines d'entre elles peuvent coïncider ou être infinies).

Il découle de ce qui a été dit plus haut que la frontière Γ des domaines $D(k, n-k)$ est l'image de l'axe imaginaire par la transformation (21), c'est-à-dire l'hodographe de fréquence de la fonction $\zeta = \frac{P_3(z)}{P_1(z)}$.

Soit ζ_0 un point qui n'appartient pas à Γ; le nombre $k(\zeta_0)$ des racines de l'équation (20) correspondante, à parties réelles négatives, peut être déterminé de la même manière que précédemment, à l'aide du principe de l'argument. Supposons que $P_1(z)$ ne possède pas de racines purement imaginaires et désignons par k_1 le nombre de ses racines dans le demi-plan de gauche, par n_1 et n_3 respectivement les

(*) Comme toujours les racines sont comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité l'indique.

degrés de $P_1(z)$ et de $P_3(z)$ et posons

$$m = \begin{cases} \frac{n_3 - n_1}{2} & \text{si } n_3 > n_1, \\ 0 & \text{si } n_3 \leqslant n_1. \end{cases} \tag{22}$$

Considérons le demi-cercle limité par la demi-circonférence C'_R : $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, et le segment C''_R : $-R \leqslant y \leqslant R$ de l'axe imaginaire; soit $C^*_R = C'_R \cup C''_R$. Pour les R suffisamment grands, d'après le principe de l'argument

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C^*_R} \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\} + \frac{1}{2\pi} \Delta_{C^*_R} \arg P_1(z), \tag{23}$$

où le contour C^*_R est parcouru dans le sens positif.

Pour les grands $|z|$, nous avons $\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} = z^{n_3 - n_1} \left\{ c_0 + \right.$ $\left. + \frac{c_1}{z} + \ldots \right\}$, $c_0 \neq 0$; par conséquent, $\Delta_{C'_R} \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\}$ est égal à $\pi (n_3 - n_1) + O\left(\frac{1}{R}\right)$ pour $n_3 > n_1$ et à $O\left(\frac{1}{R}\right)$ pour $n_3 \leqslant n_1$. Ainsi, vu le choix de m, on a toujours

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{C'_R} \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\} = m + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Décomposant le premier terme de la formule (23) en deux termes qui correspondent aux parcours de C'_R et C''_R, et tenant compte aussi de ce que son second terme, d'après le principe de l'argument, est égal à k_1, nous obtenons de cette formule à la limite, lorsque $R \to \infty$,

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\} + m + k_1,$$

où C est l'axe imaginaire du plan des z parcouru de bas en haut. En revenant dans le plan des paramètres ζ, nous avons le résultat suivant.

Le nombre de racines de l'équation (20) *dans le demi-plan de gauche pour* $\zeta = \zeta_0$ *est égal à*

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg (\zeta_0 - \zeta) + m + k_1, \tag{24}$$

où Γ *est l'hodographe de fréquence de la fonction* (21) *parcouru dans le sens de croissance des* y, m *est définie par la formule* (22) *et* k_1 *est le nombre des racines du polynôme* $P_1(z)$ *dans le demi-plan de gauche.*

Remarque. Dans cette démonstration nous avons exclu le cas où $P_1(z)$ possède des racines purement imaginaires. Dans ce cas, la formule (24) reste vraie si chaque racine imaginaire de $P_1(z)$ est comptée avec un ordre de multiplicité diminué de 2 fois et si le premier terme est considéré comme la somme des accroissements de $\arg(\zeta_0 - \zeta)$ le long des diverses branches de l'hodographe qui s'éloignent vers l'infini (on voit de l'équation de l'hodographe $\zeta = \frac{P_3(iy)}{P_1(iy)}$

que $\zeta \to \infty$ lorsqu'on s'approche de chaque racine imaginaire de $P_1(z)$). En effet, tous les raisonnements donnés précédemment restent en vigueur dans ce cas aussi si pendant le parcours de C_R''' on évite chaque racine purement imaginaire par la gauche suivant une demi petite circonférence de centre en cette racine. Le parcours de chacune de ces demi-circonférences fait apparaître dans $\frac{1}{2\pi}\Delta \arg \left\{\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)}\right\}$ la quantité $\frac{p}{2}$, où p est l'ordre de multiplicité de la racine correspondante (*), la quantité $\Delta_{C_R^*} \arg P_1(z)$ reste sans changement car il n'y a pas de nouvelles racines de $P_1(z)$ dans C_R^*. Faisant tendre vers zéro tous les rayons de ces demi-circonférences, nous avons à la limite le résultat que nous cherchions.

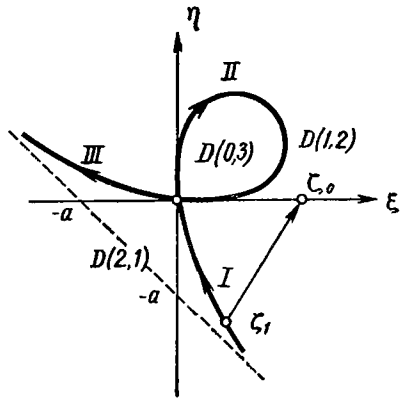

FIG. 169

Exemple. Pour la famille de polynômes

$$f(z, \zeta) = (z^3 - i)\zeta + 3az(z+1)$$

la courbe Γ est donnée par l'équation

$$\zeta = \frac{3ay}{1+y^3} + i\frac{3ay^2}{1+y^3}$$

qui est le folium de Descartes (fig. 169). Ici $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $m = 0$; $P_1(z) = z^3 - i$ a une racine purement imaginaire $z = -i$ et une racine $z = e^{\frac{5\pi i}{6}}$ dans le demi-plan de gauche, donc $k_1 = \frac{3}{2}$. La formule (24) prend la forme

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg(\zeta_0 - \zeta) + \frac{3}{2}.$$

Pour ζ_0 à droite des branches de Γ, le premier terme est égal à $-\frac{1}{2}$ (cf. fig. 169 : le parcours de la portion I donne $\Delta \arg(\zeta_0 - \zeta) = -\frac{3\pi}{4}$, celui de la portion II 0, celui de la portion III $-\frac{\pi}{4}$), par conséquent, pour ces ζ_0 on a $k(\zeta_0) = 1$. On trouve exactement de la même manière que pour les ζ_0 dans la boucle $k(\zeta_0) = 0$ et pour les ζ_0 à gauche des branches $k(\zeta_0) = 2$. Ainsi, nous avons complètement décrit la position des racines.

(*) En effet, nous avons au voisinage de chaque racine a :

$$\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} = \frac{1}{(z-a)^p}\{c_0 + c_1(z-a) + \ldots\}, \qquad c_0 \neq 0,$$

et la demi-circonférence est parcourue dans le sens négatif.

Considérons enfin le cas général du polynôme (19). Posant

$$P_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y) \quad (k = 1, 2, 3),$$

nous voyons que l'équation $f(z, \zeta) = 0$ est équivalente au système

$$\left.\begin{aligned} U &= u_1(x, y)\,\xi + u_2(x, y)\,\eta - u_3(x, y) = 0, \\ V &= v_1(x, y)\,\xi + v_2(x, y)\,\eta - v_3(x, y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Comme précédemment, nous supposons que ce système établit une transformation du plan des z sur le plan des ζ, que l'on peut écrire sous forme explicite en résolvant le système par rapport à ξ et η:

$$\xi = \frac{u_3v_2 - u_2v_3}{\Delta}, \qquad \eta = \frac{u_1v_3 - u_3v_1}{\Delta}, \tag{26}$$

où $\Delta = \Delta(z) = u_1v_2 - u_2v_1$ est le déterminant du système. Il est clair qu'aux points z pour lesquels $\Delta(z) \neq 0$ correspondent des points entièrement définis ζ à distance finie. Aux points pour lesquels $\Delta(z) = 0$, mais au moins un des numérateurs de (26) n'est pas nul (et, par conséquent, le second numérateur aussi, ce dont il est facile de se convaincre), correspond le point $\zeta = \infty$. Enfin, si en un point z les numérateurs et le dénominateur de (26) sont nuls, alors ce point correspond à une droite entière du plan des ζ: ces points et les droites qui leur correspondent sont appelés *exceptionnels* (*).

La transformation inverse de (26) est au plus à n déterminations, car chaque point z correspondant à ζ est une racine du polynôme (19) pour la valeur donnée de ζ.

Etudions la question de la conservation de l'orientation par la transformation (26). Pour cela, dérivons le système (25) par rapport à x et à y, en considérant ξ et η comme des fonctions de x et y:

$$u_1\,d\xi + u_2\,d\eta + \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = 0,$$

$$v_1\,d\xi + v_2\,d\eta + \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy = 0.$$

Résolvant ce système par rapport à $d\xi$ et $d\eta$ et tenant compte des équations de Cauchy-Riemann, d'après lesquelles $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, nous trouvons:

$$d\xi = \frac{1}{\Delta}\left\{-\left(u_2\frac{\partial U}{\partial y} + v_2\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx + \left(u_2\frac{\partial U}{\partial x} - v_2\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy\right\},$$

$$d\eta = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(u_1\frac{\partial U}{\partial y} + v_1\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx - \left(u_1\frac{\partial U}{\partial x} - v_1\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy\right\}.$$

(*) Dans le cas des polynômes (20), les points exceptionnels ne peuvent pas exister.

D'où nous trouvons le jacobien de la transformation (26)

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}$$

et nous voyons que le signe de ce jacobien coïncide avec le signe de Δ. Par conséquent, la *transformation* (26) *conserve l'orientation si* $\Delta > 0$ *et ne la conserve pas si* $\Delta < 0$.

Tout comme précédemment, considérons la division du plan des ζ en domaines $D(k, n-k)$ et notons Γ la frontière de ces domaines. Il est clair que l'on peut obtenir les équations paramétriques de Γ en faisant $x = 0$ dans les équations (26). Comme précédemment, le parcours positif de Γ est celui qui correspond aux y croissants. La courbe Γ peut être formée de plusieurs branches, de plus, contrairement au cas des polynômes (20), lorsqu'on parcourt tout l'axe des y, ses portions peuvent être parcourues plusieurs fois (au plus n fois). De plus, la courbe Γ peut contenir des droites exceptionnelles; cela se produit dans le cas où l'axe des y possède des points exceptionnels.

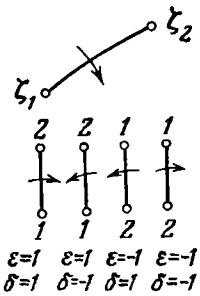

FIG. 170

Considérons une portion $\zeta_1\zeta_2$ de la courbe Γ et supposons que lorsqu'on parcourt tout l'axe des y, la portion est parcourue l fois, c'est-à-dire que cette portion correspond à l segments $y_1^\mu y_2^\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots, l$) de l'axe des y. Posons $\varepsilon_\mu = 1$ si le sens de $y_1^\mu y_2^\mu$ coïncide avec celui de l'axe des y et $\varepsilon_\mu = -1$ dans le cas contraire. Posons encore $\delta_\mu = 1$ si sur $y_1^\mu y_2^\mu$ le déterminant $\Delta > 0$ et $\delta_\mu = -1$ dans le cas contraire (fig. 170).

Supposons que le point ζ, se déplaçant continûment sur un chemin suffisamment petit, coupe l'arc de courbe $\zeta_1\zeta_2$ de gauche à droite. A ce chemin correspondent, dans le plan des z, l chemins, coupant les segments $y_1^\mu y_2^\mu$ de l'axe des y. Il est clair que si $\varepsilon_\mu\delta_\mu > 0$, alors le chemin correspondant va du demi-plan de gauche dans le demi-plan de droite et le polynôme (19) admet sur lui une racine à partie réelle positive et perd une racine à partie réelle négative; dans le cas $\varepsilon_\mu\delta_\mu < 0$, c'est le contraire qui se produit.

Ainsi *lorsqu'on passe du côté gauche de l'arc de courbe* $\zeta_1\zeta_2$ *de la courbe* Γ *au côté droit, le polynôme* (19) *perd* $\varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \ldots + \varepsilon_l\delta_l$ *racines à partie réelle négative* (*).

A l'aide de cette remarque nous pouvons trouver tous les domaines $D(k, n-k)$ connaissant l'un quelconque d'entre eux.

(*) Si cette somme est nulle, alors les deux côtés de l'arc de courbe $\zeta_1\zeta_2$ appartiennent aux domaines $D(k, n-k)$ de mêmes indices. Dans le cas du polynôme (20), cette somme est constamment égale à l'unité ; par conséquent, ici, à gauche de Γ il y a toujours un domaine correspondant au nombre k supérieur d'une unité à celui de droite (comparer avec la fig. 158).

Pour terminer, donnons un exemple appartenant à Vychnégradski :

$$f(z, \zeta) = z^3 + \xi z^2 + \eta z + 1.$$

Posant $z = iy$ et séparant les parties réelle et imaginaire, nous trouvons les équations paramétriques de la courbe Γ : $\xi = \frac{1}{y^2}$, $\eta = y^2$. C'est la branche de l'hyperbole $\xi\eta = 1$ qui se trouve dans le premier quadrant (fig. 171). Lorsqu'on parcourt tout l'axe des y, elle est parcourue deux fois ; si, de plus, on pose pour le demi-axe inférieur $\mu = 1$ et pour le demi-axe supérieur $\mu = 2$, on a alors : $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$. Le déterminant Δ, qui détermine le signe du jacobien, est égal à $\Delta(iy) = -y^3$ sur l'axe des y, par conséquent, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$. Ainsi, lorsqu'on traverse l'arc de courbe $\zeta_1\zeta_2$ de gauche à droite, on perd $\varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 = 2$ racines à partie réelle négative. A l'origine des coordonnées $\xi = \eta = 0$, le polynôme prend la forme $z^3 + 1$ et a les racines $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; par conséquent, $D(1, 2)$ est le domaine qui se trouve au-dessous de l'hyperbole, mais alors $D(3, 0)$ est le domaine qui se trouve au-dessus de l'hyperbole, soit un domaine de stabilité. Pour le vérifier, on peut considérer le point $\xi = \eta = 3$ en lequel le polynôme est de la forme $z^3 + 3z^2 + 3z + 1$ et a la racine triple $z = -1$.

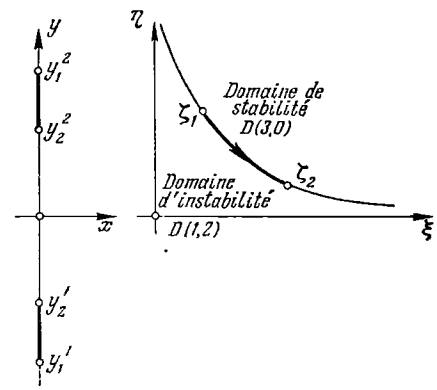

FIG. 171

§ 3. MÉTHODES DES ESTIMATIONS ASYMPTOTIQUES

Pour de nombreuses questions techniques, il est important de posséder des méthodes d'étude de régimes permanents. Mathématiquement, ces questions se ramènent à l'étude des propriétés des fonctions pour les grandes valeurs des variables ou, comme on dit encore, à l'étude du comportement asymptotique des fonctions. Nous donnons ici plusieurs méthodes d'étude asymptotique des fonctions. (Voir pour plus de détails [7].)

76. Développements asymptotiques. L'étude asymptotique des fonctions part du remplacement de ces fonctions par de plus simples de manière que les propriétés fondamentales soient conservées et les propriétés secondaires rejetées. En particulier, lorsqu'on se propose d'étudier une fonction $f(z)$ pour les grandes valeurs de la variable sur un ensemble quelconque M, qui s'étend vers l'infini (le plus souvent sur une courbe qui va vers un point à l'infini), le plus simple est de remplacer cette fonction par la série

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots, \qquad (1)$$

qui dans un certain sens en donne une approximation. D'ordinaire, on demande que l'erreur commise lorsqu'on remplace la fonction $f(z)$ par une somme partielle $s_n(z)$ de cette série soit un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport au dernier terme de la somme partielle lorsque $z \to \infty$ par les points de M, c'est-à-dire

$$\lim_{z\to\infty} z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k} \right\} = 0 \text{ (*)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Evidemment, la convergence de la série (1) ne découle pas de cette condition, toutefois, comme nous le verrons plus bas, même des séries divergeantes partout qui satisfont à cette condition fournissent de nombreux renseignements utiles sur les propriétés asymptotiques de la fonction $f(z)$.

Toute série (1) vérifiant la condition (2) est appelée *développement asymptotique* de la fonction $f(z)$ sur l'ensemble M et cette relation entre la série et la fonction est notée de la manière suivante :

$$f(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots \tag{3}$$

Sur l'ensemble donné M, le développement asymptotique d'une fonction, s'il existe, est défini d'une manière unique.

En effet, la condition (2) pour $n = 0$ nous donne : $\lim_{z\to\infty} \{f(z) - c_0\} = 0$, d'où on trouve $c_0 = \lim_{z\to\infty} f(z)$; pour $n = 1$: $\lim_{z\to\infty} z \left\{ f(z) - c_0 - \frac{c_1}{z} \right\} = 0$, d'où $c_1 = \lim_{z\to\infty} z \{ f(z) - c_0 \}$ et, en général,

$$c_n = \lim_{z\to\infty} z^n \{ f(z) - s_{n-1}(z) \} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

D'autre part, une même série (1) peut être le développement asymptotique de différentes fonctions. Par exemple, la série identiquement nulle sert de développement asymptotique tant pour la fonction identiquement nulle que pour la fonction e^{-x} sur le demi-axe $x > 0$ (et même dans tout secteur $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\alpha > 0$), car $\lim_{z\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout n.

Il est facile de démontrer que les *développements asymptotiques de la somme et du produit de deux fonctions s'obtiennent respectivement en additionnant et en multipliant terme à terme leurs développements asymptotiques* : *si*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad \text{et} \quad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{z^n},$$

(*) Dans cette formule et les formules suivantes, le passage à la limite, lorsque $z \to \infty$, se fait, évidemment, par les points de l'ensemble. Nous ne le spécifierons pas.

alors

$$f(z)+g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n+d_n}{z^n},$$

$$f(z)\,g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_0d_n+c_1d_{n-1}+\ldots+c_nd_0}{z^n}. \tag{5}$$

Exactement de la même façon, on démontre la règle *de l'intégration terme à terme* des développements asymptotiques: si $f(z)\sim$ $\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$ (c'est-à-dire lorsque $z\to\infty$ sur l'ensemble M, la fonction $f(z)$ est un infiniment petit d'ordre non inférieur à 2), alors

$$\int_z^{\infty}f(z)\,dz\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)\,z^{n-1}}. \tag{6}$$

En général, la *dérivation terme à terme d'un développement asymptotique n'est pas légitime.* En effet, on voit facilement que $e^{-x}\sin e^x\sim 0$ sur le demi-axe $x>0$, cependant $(e^{-x}\sin e^x)'=$ $=-e^{-x}\sin e^x+\cos e^x$ n'a pas de développement asymptotique, car sur le demi-axe $x>0$ cette fonction n'a même pas de limite lorsque $x\to\infty$.

Exemples. 1) Trouvons le développement asymptotique sur le demi-axe $x>0$ de la fonction donnée par l'intégrale

$$f(x)=\int_x^{\infty}\frac{1}{t}\,e^{x-t}\,dt.$$

En intégrant plusieurs fois par parties $\left(\text{posant }\frac{1}{t}=u,\ e^{x-t}\,dt=dv,\ \text{etc.}\right)$ nous trouvons

$$\int_x^{\infty}\frac{1}{t}\,e^{x-t}\,dt=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}+(-1)^n\,n!\int_x^{\infty}\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt.$$

Nous avons pour le reste (par intégration par parties) l'estimation

$$n!\int_x^{\infty}\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt=\frac{n!}{x^{n+1}}-(n+1)!\int_x^{\infty}\frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt<\frac{n!}{x^{n+1}},$$

d'où il découle que, avec les notations adoptées précédemment,

$$x^n\{f(x)-s_n(x)\}\leqslant\frac{n!}{x}$$

tend vers zéro lorsque $x\to\infty$; donc,

$$\int_x^{\infty}\frac{1}{t}\,e^{x-t}\,dt\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots+(-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}}+\ldots \tag{7}$$

L'intégrale considérée est en relation avec la fonction spéciale désignée sous le nom *d'exponentielle intégrale* (*) par

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{\tau}}{\tau}\, d\tau. \tag{8}$$

En effet, après le changement de variable $\tau = -t$, il est clair que nous avons

$$\mathrm{Ei}\,(-x) = -\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = -e^{-x} \int_{x}^{\infty} \frac{1}{t}\, e^{x-t}\, dt.$$

Ainsi, nous obtenons de (7) l'égalité asymptotique suivante :

$$-\mathrm{Ei}\,(-x) \sim \frac{e^{-x}}{x} \left\{1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{x^n} + \ldots\right\}. \tag{9}$$

Les séries (7) et (9) divergent, car leurs termes généraux ne tendent pas vers zéro (le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n}{x} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et pour tout x fixe). Toutefois, elles donnent les valeurs approchées de la fonction, très précises même pour les x et n suffisamment petits : par exemple, pour l'intégrale (7) s_6 (10) = = 0,09152 donne une approximation avec une précision atteignant 0,00012.

2) Trouvons la formule asymptotique de la *fonction d'erreur* (cf. exemple 1 du n° 70) pour les x positifs. Considérons d'abord la fonction

$$f(x) = \int_{x}^{\infty} e^{x^2-t^2}\, dt \quad -\frac{1}{2} \int_{x}^{\infty} \frac{1}{t}\, de^{x^2-t^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \int_{x}^{\infty} e^{x^2-t^2}\, \frac{dt}{t^2};$$

répétant plusieurs fois l'intégration par parties, nous trouvons :

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^n x^{2n-1}} + (-1)^n \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n} \int_{x}^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}}\, dt.$$

Nous avons l'estimation suivante pour le reste (par intégration par parties)

$$\frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n} \int_{x}^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}}\, dt < \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^{n+1}x^{2n+1}},$$

'où il découle que $x^{2n-1}\{f(x) - s_{2n-1}(x)\} \to 0$ lorsque $x \to \infty$; par conséquent,

$$\int_{x}^{\infty} e^{x^2-t^2}\, dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots \tag{10}$$

(*) Pour $x > 0$ l'intégrale est prise au sens de la valeur principale.

Remarquant que $\int_0^\infty e^{x^2-t^2}\,dt = e^{x^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (cf. n° 67) nous avons :

$$\int_0^x e^{x^2-t^2}\,dt = e^{x^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^\infty e^{x^2-t^2}\,dt \sim e^{x^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2^2x^3} - \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} + \ldots$$

et finalement

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \sim 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots\right). \tag{11}$$

3) On peut construire aussi des développements asymptotiques des fonctions dont la variable prend des valeurs entières n ; dans ce cas, l'ensemble M est la suite des points entiers. Considérons comme exemple le problème de l'estimation asymptotique des zéros de la fonction

$$f(z) = \sin z + \frac{1}{z} \tag{12}$$

voisins des points $z_n = \pi n$. Nous prenons comme première approximation $z_n \sim \pi n$. Portant $z = \pi n + \varepsilon_1(n)$ dans l'équation $f(z) = 0$, nous trouvons $(-1)^n \sin \varepsilon_1(n) + \frac{1}{\pi n + \varepsilon_1(n)} = 0$, d'où $\varepsilon_1(n) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et, par conséquent, la seconde approximation de z_n est de la forme

$$z_n = \pi n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons ensuite $z = \pi n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} + \varepsilon_2(n)$ et on obtient de l'équation $f(z) = 0$

$$(-1)^n \sin\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} + \varepsilon_2(n)\right\} = -\frac{1}{\pi n + (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi n} + \varepsilon_2(n)}.$$

Remplaçant les premier et second membres par leurs expressions approchées, nous trouvons (en tenant compte de ce que $\varepsilon_2(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$) :

$$(-1)^n \varepsilon_2(n) - \frac{1}{\pi n} - \frac{(-1)^n}{3!}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}\right]^3 = -\frac{1}{\pi n} - (-1)^n\,\frac{1}{\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

d'où $\varepsilon_2(n) = -\frac{1}{\pi^3 n^3}\left[1 + \frac{(-1)^n}{6}\right] + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, ce qui donne la troisième approximation de z_n :

$$z_n \sim \pi n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} - \frac{1}{\pi^3 n^3}\left[1 + \frac{(-1)^n}{6}\right] + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{13}$$

On peut continuer indéfiniment notre processus et comme l'erreur de l'approximation est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport au dernier terme conservé, nous obtenons le développement asymptotique de z_n.

Pour terminer, remarquons que les séries de type (1) suivant les puissances entières négatives de la variable sont le moyen le plus simple, mais pas toujours le plus commode, d'approximation asymptotique. Généralisant la notion de développement asymptotique, nous pouvons choisir pour la comparaison à la place de $\frac{1}{z^n}$ une suite de fonctions arbitraire $q_n(z)$ satisfaisant à la condition

$$\lim_{z\to\infty} \frac{q_{n+1}(z)}{q_n(z)} = 0, \tag{14}$$

et pour l'approximation une suite arbitraire $\mu_n(z)$ telle que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\mu_{n+1}(z)}{q_n(z)} = 0, \quad \overline{\lim_{z\to\infty}} \left| \frac{\mu_n(z)}{q_n(z)} \right| > 0. \tag{15}$$

Nous appelons la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu_n(z)$ *développement asymptotique de la fonction* $f(z)$ et nous écrivons

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu_n(z) \tag{16}$$

si

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{q_n(z)} \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k(z) \right\} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Comme exemple d'un tel développement plus général, considérons le développement de la solution de l'équation différentielle

$$y'' + \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) y = 0, \tag{18}$$

pour les grands x.

Pour trouver la représentation de la solution, écrivons cette équation sous la forme

$$y'' + y = -\frac{a}{x^2} y$$

et, considérant le second membre comme connu, appliquons la formule de Cauchy que l'on donne dans le cours d'équations différentielles:

$$y(x) = A \cos(x - \alpha) + a \int_{x_0}^{x} \sin(x - t) \frac{y(t)}{t^2}\, dt. \tag{19}$$

On voit de cette représentation que $y(x)$ est bornée lorsque $x \to \infty$. En effet, notons: $M_1 = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y(x)|$; il vient alors de (19):

$$M_1 \leqslant |A| + |a| M_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{t^2} < |A| + |a| M_1 \frac{1}{x_0},$$

d'où $M_1 < \frac{|A|}{1 - \frac{|a|}{x_0}}$ et notre proposition est démontrée (on peut supposer le nombre x_0 positif et aussi grand qu'on le veut). Ainsi, l'intégrale (19) converge à l'infini et on peut donc prendre $x_0 = \infty$ dans (19).

Pour première approximation, nous prenons

$$y(x) = A\cos(x-\alpha) + o(1);$$

posant $y(x) = A\cos(x-\alpha) + \varepsilon_1(x)$ et portant dans (19), nous trouvons:

$$\varepsilon_1(x) = aA\int_{\infty}^{x} \sin(x-t)\cos(t-\alpha)\frac{dt}{t^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{aA}{2}\int_{\infty}^{x} \{\sin(x-\alpha) + \sin(x-2t+\alpha)\}\frac{dt}{t^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{aA}{2x}\sin(x-\alpha) + o\left(\frac{1}{x}\right)\ (*).$$

Nous avons ainsi obtenu la deuxième approximation:

$$y(x) = A\cos(x-\alpha) - \frac{aA}{2x}\sin(x-\alpha) + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Introduisant une nouvelle correction $\varepsilon_2(x)$ nous trouvons à l'aide de (19):

$$\varepsilon_2(x) = \frac{aA}{2}\int_{\infty}^{x} \sin(x-2t+\alpha)\frac{dt}{t^2} - \frac{a^2A}{2}\int_{\infty}^{x} \sin(x-t)\sin(t-\alpha)\frac{dt}{t^3} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{aA}{4x^2}\cos(x-\alpha) - \frac{a^2A}{8x^2}\cos(x-\alpha) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(nous transformons la première intégrale en l'intégrant par parties, la seconde au moyen d'une formule trigonométrique, les autres intégrales entrent dans la quantité $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$). Ainsi, nous avons trouvé la troisième approximation:

$$y(x) = A\cos(x-\alpha) - \frac{aA}{2x}\sin(x-\alpha) +$$

$$+ \frac{aA}{4x^2}\left(1-\frac{a}{2}\right)\cos(x-\alpha) + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \qquad (20)$$

Nous pouvons préciser indéfiniment nos approximations. Le développement ainsi obtenu est un développement asymptotique général avec $\mu_n(x) = \frac{\cos\left(x-\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)}{x^n}$, $q_n(x) = \frac{1}{x^n}$.

77. Méthode du col. Cette méthode s'applique à l'estimation des intégrales de contour de la forme

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z)\, e^{\lambda f(z)}\, dz, \qquad (1)$$

*) L'intégrale $\int_{\infty}^{x} \sin(x-2t+\alpha)\frac{dt}{t^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$; on peut s'en convaincre en intégrant par parties.

où λ est un paramètre positif qui prend de grandes valeurs, $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont des fonctions analytiques sur la courbe d'intégration C. De nombreuses fonctions spéciales, des solutions d'équations différentielles, ordinaires et à dérivées partielles, sont représentées par des intégrales de la forme (1); on rencontre ces intégrales dans la résolution de divers problèmes de physique. Ce qui explique l'importance de la méthode du col dans les applications de la théorie des fonctions de la variable complexe.

Nous commençons par un cas particulier qui remonte à Laplace et qui concerne les intégrales réelles de la forme

$$F(\lambda)=\int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\, dt. \tag{2}$$

L'idée de la méthode de Laplace est très simple. Supposons que $f(t)$ ait sur le segment (a, b) un maximum bien exprimé. Plus la valeur du paramètre λ est grande, plus ce maximum est exprimé, il est donc clair que pour les grands λ le voisinage du point de maximum influe essentiellement sur la valeur de l'intégrale.

Utilisons cette idée pour démontrer le lemme qui se trouve à la base de la méthode.

L e m m e. *Soit donnée l'intégrale*

$$F(\lambda)=\int_0^a \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt \qquad (0<a\leqslant\infty,\ \alpha>0), \tag{3}$$

où la fonction $\varphi(t)$ *pour* $|t|<2h$ *est représentée par la série convergente*

$$\varphi(t)=t^\beta\,(c_0+c_1t+\ldots+c_nt^n+\ldots), \quad \beta>-1, \tag{4}$$

de plus $\int_0^a |\varphi(t)|\, e^{-\lambda_0 t^\alpha}\, dt\leqslant M$ *pour un* λ_0. *Alors, on a le développement asymptotique*

$$F(\lambda)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{\beta+n+1}{\alpha}\right)\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}, \tag{5}$$

où Γ *est la fonction gamma d'Euler.*

Pour démontrer ce lemme, remarquons que pour $\lambda>\lambda_0$

$$\left|\int_h^a \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt\right|\leqslant e^{-(\lambda-\lambda_0)h^\alpha}\int_h^a |\varphi(t)|\, e^{-\lambda_0 t^\alpha}\, dt=$$

$$=O\left(e^{-(\lambda-\lambda_0)h^\alpha}\right)=O\left(e^{-\lambda h^\alpha}\right),$$

donc

$$F(\lambda)=\int_0^h \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt+O\left(e^{-\lambda h^\alpha}\right).$$

Etant donné que la quantité $O(e^{-\lambda h^\alpha})$, lorsque $\lambda \to \infty$, est beaucoup plus petite que tout λ^{-n} $(n > 0)$, d'après l'idée de Laplace seule la partie $(0, h)$ de l'intervalle d'intégration voisine du point de maximum influe sur le développement asymptotique. Faisons, dans cette partie de l'intégrale, le changement de variable $\lambda t^\alpha = \tau$, puis tenant compte de ce que, pour $|t| \leqslant h$, nous avons $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\beta+k} + O(t^{\beta+n})$ et que pour tous $p \geqslant 0$ et $c > 0$

$$\int_0^c \tau^{p-1} e^{-\tau}\, d\tau \leqslant \int_0^\infty \tau^{p-1} e^{-\tau}\, d\tau = \Gamma(p),$$

il vient :

$$\int_0^h \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\lambda h^\alpha} \varphi\left[\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] \tau^{\frac{1}{\alpha}-1} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{\lambda^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}}} \int_0^{\lambda h^\alpha} \tau^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}-1} e^{-\tau}\, d\tau + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}\right). \quad (6)$$

Remarquons enfin que

$$\int_0^{\lambda h^\alpha} \tau^{p-1} e^{-\tau}\, d\tau = \Gamma(p) + O\left(e^{-\frac{\lambda}{2} h^\alpha}\right),$$

car pour tout $c > 0$, en posant $\tau = \sigma + c$, nous avons :

$$\int_c^\infty \tau^{p-1} e^{-\tau}\, d\tau = e^{-c} \int_0^\infty (\sigma + c)^{p-1} e^{-\sigma}\, d\sigma <$$

$$< e^{-c} \left\{ \int_0^c (2c)^{p-1} e^{-\sigma}\, d\sigma + \int_0^\infty (2\sigma)^{p-1} e^{-\sigma}\, d\sigma \right\} =$$

$$= e^{-c}(Ac^p + B) = O\left(e^{-\frac{c}{2}}\right).$$

Ainsi, tenant compte de ce que $O(e^{-\lambda\varepsilon}) = O(\lambda^{-n})$ pour tous $\varepsilon > 0$ et $n > 0$ fixes, nous pouvons écrire (6) sous la forme

$$\int_0^h \varphi(t)\, e^{-\lambda t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k \Gamma\left(\frac{\beta+k+1}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}}} + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}\right),$$

et, d'après la définition du n° 76, on a donc démontré le développement asymptotique (5).

L'estimation de l'intégrale (2) se fait à l'aide du lemme qui vient d'être démontré. On a le théorème:

Théorème 1. *Supposons que l'intégrale* (2) *converge absolument pour un* $\lambda = \lambda_0$, *c'est-à-dire*

$$\int_a^b |\varphi(t)|\, e^{\lambda_0 f(t)}\, dt \leqslant M, \tag{7}$$

et $f(t)$ *atteint sa valeur la plus grande en un point* t_0 *intérieur au segment* (a, b) *dans le voisinage* $|t - t_0| < \delta$ *duquel la fonction* $f(t)$ *est représentée par la série*

$$f(t) = f(t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \ldots + a_n (t - t_0)^n + \ldots \qquad (a_2 < 0), \tag{8}$$

de plus, il existe un $h > 0$ *tel qu'à l'extérieur de ce voisinage* $f(t_0) - f(t) > h$. *Supposons encore que la fonction* $t = \psi(\tau)$ *soit définie, dans un voisinage du point* $\tau = 0$, *par l'équation* $f(t_0) - f(t) = \tau^2$, *en outre dans ce voisinage*

$$\varphi[\psi(\tau)]\, \psi'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n. \tag{9}$$

Alors l'intégrale (2) *admet le développement asymptotique*

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\, dt \sim e^{\lambda f(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{\lambda^n} \frac{(2n)!}{4^n n!}. \tag{10}$$

Remarquons d'abord que, tout comme dans le lemme, le développement asymptotique de $F(\lambda)$ est défini par le voisinage du point de maximum t_0. En effet, d'après les conditions du théorème

$$\left| \int_a^{t_0 - \delta} \varphi(t)\, e^{-\lambda[f(t_0) - f(t)]}\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^{t_0 - \delta} \varphi(t)\, e^{-\lambda_0 [f(t_0) - f(t)]} e^{-(\lambda - \lambda_0)[f(t_0) - f(t)]}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\lambda_0 f(t_0)} e^{-(\lambda - \lambda_0) h} \int_a^b |\varphi(t)|\, e^{\lambda_0 f(t)}\, dt = O(e^{-\lambda h})$$

et on estime de manière analogue l'intégrale relative au segment $(t_0 + \delta, b)$.

Dans le voisinage restant $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, nous posons $f(t_0) - f(t) = \tau^2$ et en vertu du développement (8) nous trouvons: $\tau^2 = -a_2 (t - t_0)^2 - a_3 (t - t_0)^3 - \ldots$, d'où $\tau = (t - t_0) \times \sqrt{-a_2 - a_3 (t - t_0) - \ldots}$; développant la racine d'après

la formule de Taylor, nous obtenons la série $\tau = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n (t - t_0)^n$. Au voisinage du point $\tau = 0$, cette série peut être inversée (cf. n° 70) et nous trouvons $t = \psi(\tau) = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \tau^n$(*).

Utilisant ce qui vient d'être dit, nous faisons le changement de variable $f(t_0) - f(t) = \tau^2$ dans l'intégrale

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t)\, e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}\, dt = \int_{-\delta'}^{\delta''} \varphi[\psi(\tau)]\, \psi'(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau,$$

puis nous remarquons qu'avec le degré de précision adopté nous pouvons prendre $\delta' = \delta'' = \delta_1$ (**) et en posant, pour simplifier l'écriture, $\varphi[\psi(\tau)]\psi'(\tau) = \varphi_1(\tau)$, nous obtenons:

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_1} \varphi_1(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau = \int_{-\delta_1}^{0} \varphi_1(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau + \int_{0}^{\delta_1} \varphi_1(\tau)\, e^{-\lambda t^2}\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{\delta_1} [\varphi_1(-\tau) + \varphi_1(\tau)]\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau$$

(dans la première intégrale nous avons remplacé τ par $-\tau$).

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme avec, dans notre cas, $\beta = 0$ et $\alpha = 2$. Puisque d'après (9) nous avons:

$$\varphi_1(-\tau) + \varphi_1(\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\tau^{2n},$$

le lemme donne

$$\int_a^b \varphi(t)\, e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]}\, dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Il nous reste donc à remarquer que $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ (cette formule sera démontrée dans le chapitre VII), et alors nous obtenons le développement cherché (10).

(*) Remarquons que $c'_1 = \frac{1}{\sqrt{-a_2}} = \sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}}$ et, par conséquent, dans le développement (9) le terme constant est $c_0 = \varphi(t_0)\, c'_1 = \varphi(t_0)\sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}}$. Nous utiliserons cette remarque dans la suite.

(**) L'erreur est incluse dans le terme $O(e^{-\lambda h_1})$.

Le théorème 1 concerne le cas où la plus grande valeur de $f(t)$ est atteinte en un point intérieur du segment (a, b). On démontre d'une manière analogue le théorème suivant qui se rapporte au cas où la plus grande valeur coïncide avec l'une des extrémités du segment.

Théorème 2. *Supposons que la condition* (7) *soit vérifiée et que $f(t)$ atteigne sa plus grande valeur au point $t = a$, soit analytique en ce point, que $f'(a) \neq 0$ et qu'il existe un $h > 0$ tel que $f(a) - f(t) > h$ à l'extérieur d'un voisinage du point a. Supposons encore que la fonction $t = \psi(\tau)$ soit définie au voisinage du point $\tau = 0$ par l'équation $f(a) - f(t) = \tau$ et que l'on ait dans ce voisinage le développement* (9). *Alors*

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t)\, e^{\lambda f(t)}\, dt \sim \frac{e^{\lambda f(a)}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, c_n}{\lambda^n}. \tag{11}$$

Comme exemple d'application de la méthode de Laplace, établissons la formule asymptotique de la *fonction gamma d'Euler*

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x}\, dx.$$

Posant $x = \lambda t$, nous avons :

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} \int_0^\infty t^\lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda(t-1-\ln t)}\, dt. \tag{12}$$

Appliquons à la dernière intégrale de (12) le théorème 1 dans lequel on fait $\varphi(t) \equiv 1$ et $f(t) = -(t - 1 - \ln t)$ atteint sa plus grande valeur au point $t = 1$ (*). Nous nous limitons au premier terme du développement. D'après la formule donnée dans le renvoi de la page 483, nous trouvons $c_0 = \varphi(t_0) \sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}} = \sqrt{2}$ et la formule (10) donne :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(t-1-\ln t)}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left\{ \sqrt{2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}.$$

Portant cette dernière expression dans (12), nous trouvons l'estimation cherchée (*formule de Stirling*) :

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}. \tag{13}$$

(*) La condition (7) du théorème est satisfaite pour tout $\lambda_0 > 0$, puisque l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda_0(t-1-\ln t)} dt = \int_0^\infty t^{\lambda_0} e^{-\lambda_0(t-1)} dt$ converge.

Nous aurons pu également trouver les termes suivants du développement asymptotique :

$$\Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left\{1+\frac{1}{12\lambda}+\frac{1}{288\lambda^2}-\frac{139}{51\,840\lambda^3}+\ldots\right\}. \quad (14)$$

Exposons maintenant la méthode du col. Pour les grandes valeurs du paramètre λ la valeur de l'intégrale

$$F(\lambda)=\int_C \varphi(z)\,e^{\lambda f(z)}\,dz \quad (1)$$

est pour l'essentiel déterminée par la partie du chemin d'intégration C sur laquelle $|e^{\lambda f(z)}|=e^{\lambda \mathrm{Re} f(z)}$, c'est-à-dire $\mathrm{Re}\, f(z)$, est grand par rapport aux valeurs sur la partie restante de C. En outre, on estime d'autant plus facilement cette intégrale que cette partie est petite et que les valeurs de $\mathrm{Re}\, f(z)$ décroissent plus rapidement. D'après ce qui vient d'être dit, lorsqu'on applique la méthode du col, on tâche de déformer le chemin d'intégration C de façon à obtenir un chemin c le plus commode, en tenant compte de ce que, d'après le théorème de Cauchy, une telle déformation ne change pas la valeur de l'intégrale.

Pour expliquer géométriquement la question, nous posons $z=x+iy$ et nous représentons

$$u=\mathrm{Re}\, f(z) \quad (15)$$

comme une surface S dans l'espace des (x, y, u). Etant donné que la fonction u est harmonique, S ne peut avoir de points de maximum et de minimum, et les points en lesquels $f'(z)=0$ sont pour elle des *points méplats* ou *points selles* (fig. 172).

Comme nous l'avons dit, le chemin d'intégration $\widetilde{C}$ le plus commode pour l'estimation, du moins sur la partie qui a le plus d'importance pour l'estimation de l'intégrale, doit passer en chaque point dans la direction de la variation la plus rapide de $\mathrm{Re}\, f(z)$, et, comme la fonction $f(z)$ est analytique, cette direction doit coïncider avec la direction de la courbe $\mathrm{Im}\, f(z)=\mathrm{const}$. Ainsi, le chemin $\widetilde{C}$, du moins sur la partie la plus essentielle pour l'estimation de l'intégrale, doit coïncider avec la ligne de niveau $\mathrm{Im}\, f(z)=\mathrm{const}$.

Ensuite, le chemin $\widetilde{C}$ doit contenir le point z_0 en lequel $\mathrm{Re}\, f(z)$ atteint la plus grande valeur parmi les valeurs de cette fonction sur $\widetilde{C}$. Montrons que $f'(z_0)=0$; autrement dit, le *point de la courbe* $\mathrm{Im}\, f(z)=\mathrm{const}$ *en lequel* $\mathrm{Re}\, f(z)$ *atteint sa plus grande valeur est un point méplat.*

En effet, au point z_0 la dérivée de $\mathrm{Re}\, f(z)$ le long de la courbe $\widetilde{C}$ doit être nulle : $\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Re}\, f(z)=0$, et comme $\mathrm{Im}\, f(z)=\mathrm{const}$ sur $\widetilde{C}$,

il vient $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} f(z) \equiv 0$ et, par suite, $f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} f(z) + i \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} f(z) = 0$.

Ainsi, *lorsqu'on applique la méthode du col à l'intégrale* (1), *le chemin d'intégration C doit être déformé en un chemin* $\widetilde{C}$ *qui passe par le point méplat* z_0 *et, au voisinage de ce point, va le long de la ligne de plus grande pente* $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$ (*) (fig. 172).

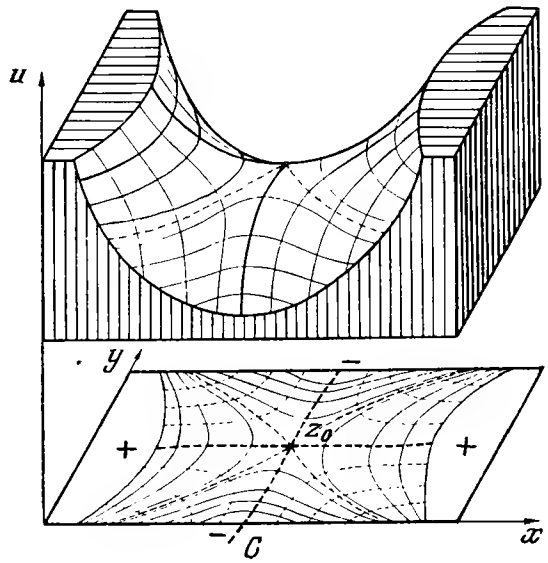

FIG. 172

Remarque 1. Ce qui vient d'être dit demande une petite précision. Il découle des propriétés des fonctions harmoniques (théorème 8 du n° 41) que le voisinage du point méplat z_0 est divisé par la ligne de niveau de $\operatorname{Re} f(z)$ en $2n$ secteurs ($n \geqslant 2$, $n - 1$ étant l'ordre de multiplicité du zéro de $f'(z_0)$) au-dessus desquels la surface S se trouve alternativement au-dessus et au-dessous de son plan tangent au point (x_0, y_0, u_0). La ligne de niveau $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$ au voisinage de z_0 se décompose en n courbes passant par z_0 dans la direction des bissectrices de ces secteurs. Nous choisissons pour $\widetilde{C}$ l'une de ces courbes.

Remarque 2. Si la surface S a plusieurs points méplats, il faut choisir d'ordinaire pour $\widetilde{C}$ le chemin qui passe par la pente la

(*) La méthode du col est appelée aussi méthode de la plus grande pente ou méthode des points selles.

plus raide. D'ailleurs, la question du choix du point méplat sous sa forme générale ne se résout pas si facilement qu'on le croit et on doit la considérer séparément dans chaque cas particulier.

Notons une circonstance importante assurant l'efficacité de la méthode du col: étant donné que sur la courbe $\widetilde{C}$ nous avons $\arg e^{f(z)} = \operatorname{Im} f(z) = \text{const}$, l'*estimation de l'intégrale* (1) *se ramène à l'estimation de l'intégrale d'une fonction réelle qui peut être faite d'après la méthode de Laplace.*

Cette remarque nous permettra d'utiliser les résultats contenus dans les théorèmes 1 et 2 que nous avons démontrés lorsque nous avons exposé la méthode de Laplace. Comme nous l'avons déjà dit, on suppose les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ analytiques dans un certain domaine. Considérons d'abord le cas du chemin d'intégration C qui peut être déformé en un chemin $\widetilde{C}$ qui passe par le point méplat z_0 en lequel $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) \neq 0$ et qui, dans le voisinage de z_0, coïncide avec la ligne de plus grande pente $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$, de plus sur $\widetilde{C}$ à l'extérieur de ce voisinage $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(z_0) - h$ $(h > 0)$. Supposons de plus que l'intégrale (1) converge absolument pour les valeurs de λ suffisamment grandes.

Dans ce cas, l'estimation de l'intégrale peut être faite à l'aide du théorème 1. En effet, soit $z = z(t)$ l'équation du contour $\widetilde{C}$; on a évidemment

$$F(\lambda) = \int_{\widetilde{C}} \varphi(z)\, e^{\lambda f(z)}\, dz = e^{\lambda i \operatorname{Im} f[z(t)]} \int_a^b \varphi[z(t)]\, e^{\lambda \operatorname{Re} f[z(t)]}\, z'(t)\, dt \qquad (16)$$

et le problème est ramené à l'estimation d'une intégrale du type (2) dont le développement est donné par la formule (10).

Ecrivons le premier terme de ce développement. Pour cela, posons $\varphi[z(t)]\, z'(t) = \widetilde{\varphi}(t)$, $\operatorname{Re} f[z(t)] = \widetilde{f}(t)$ et alors, d'après la formule (10), on trouve le terme inconnu

$$\int_a^b \widetilde{\varphi}(t)\, e^{\lambda \widetilde{f}(t)}\, dt \sim e^{\lambda \widetilde{f}(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, \widetilde{c}_0, \qquad (17)$$

où $\widetilde{c}_0$ est le terme indépendant de τ dans le développement de la fonction $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\psi}(\tau))\, \widetilde{\psi}'(\tau)$, que l'on trouve d'après la formule du renvoi de la page 483. Nous avons: $\widetilde{\varphi}(t_0) = \varphi(z_0)\, z'(t_0)$, et comme $f[z(t)] = \operatorname{Re} f[z(t)] + i \operatorname{Im} f[z(t)] = \widetilde{f}(t) + \text{const}$ le long de $\widetilde{C}$, on a

$$\widetilde{f}''(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} f[z(t)]\big|_{t=t_0} = f''(z_0)\, z'^2(t_0)$$

(le terme $f'[z(t)]\, z''(t) = 0$ pour $t = t_0$). Puisque cette quantité est négative, posant $z'(t_0) = ke^{i\vartheta}$, nous pouvons donc l'écrire sous la

forme $\widetilde{f}''(t_0) = -|f''(z_0)|k^2$. Ainsi,

$$\widetilde{c}_0 = \widetilde{\varphi}(t_0)\sqrt{-\frac{2}{\widetilde{f}''(t_0)}} = \varphi(z_0)\,e^{i\vartheta}\sqrt{\frac{2}{|f''(z_0)|}},$$

et en portant la valeur ainsi trouvée dans (17) puis dans (16) nous obtenons la formule que nous cherchions

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda f(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0)|}}\,\varphi(z_0)\,e^{i\vartheta}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{18}$$

S'il y a sur le contour $\widetilde{C}$ plusieurs points méplats en lesquels la valeur de $\operatorname{Re} f(z)$ est voisine de sa plus grande valeur, il faut alors prendre la somme des expressions (18) par tous ces points.

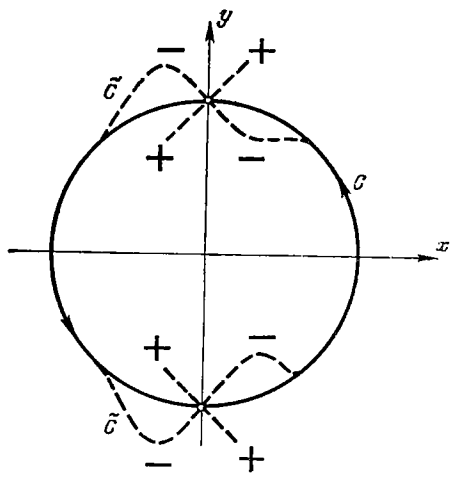

FIG. 173

Le cas où le contour d'intégration se termine au point méplat z_0 se ramène d'une façon analogue au théorème 2.

Comme exemple d'application de la méthode du col trouvons la formule asymptotique de la *fonction cylindrique de première espèce d'indice entier n*

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} e^{\frac{\lambda}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\,\frac{dz}{z^{n+1}} \tag{19}$$

(comparer avec la formule (14) du n° 70). Ici $\varphi(z) = \frac{1}{z^{n+1}}$, $f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, $f'(z) = \frac{1}{2}\times$ $\times\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)$, il existe donc deux points méplats $z_{1,2} = \pm i$ de même ligne de niveau $\operatorname{Re} f(z) = 0$ et, d'après la remarque faite plus haut, il faut considérer ces deux points. Ici $\varphi(\pm i) = \mp i e^{\mp in\frac{\pi}{2}}$, $f(\pm i) = \pm i$, $|f''(\pm i)| = 1$. La ligne de niveau $u = \operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$, qui passe par les points méplats, est constituée de la circonférence $|z| = 1$ et de la droite $x = 0$, et la direction de la ligne de plus grande pente doit être bissectrice par rapport à cette ligne; tenant encore compte de la distribution des signes de u, indiquée sur la fig. 173, nous trouvons $\vartheta_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\vartheta_2 = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, d'après la formule (18) nous obtenons l'es-

timation asymptotique que nous cherchions

$$J_n(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left\{ -e^{\left(\lambda - n\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) i} + e^{\left(\lambda - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) i} \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (20)$$

D'autres exemples d'application de la méthode du col seront donnés dans le chapitre VII.

78. Méthode des fonctions génératrices. Selon cette méthode, pour obtenir une estimation asymptotique d'une fonction quelconque, on remplace cette fonction par une autre (*fonction génératrice*) analytique par rapport à une variable auxiliaire.

La variante la plus simple de cette méthode est due à *Darboux* (1878). Elle permet de trouver des expressions asymptotiques pour les grandes valeurs de n fonctions $f_n(z)$ qui sont définies au moyen d'une fonction génératrice $F(z, w)$, d'après la formule

$$F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\, w^n \qquad (1)$$

(cf. les exemples 2, 3 et 4 du n° 70 et aussi le n° 93).

Supposons que les points singuliers de $F(z, w)$, fonction de w, soient connus sur la circonférence du cercle de convergence de la série (1) que nous prenons $|w| = 1$ pour plus de simplicité. Supposons encore que les fonctions

$$F_k(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nk}(z)\, w^n \qquad (2)$$

soient connues et que la différence $F(z, w) - F_k(z, w)$ converge vers une fonction p fois dérivable de $t = \arg w$ lorsqu'on tend vers la circonférence $|w| = 1$. Alors les coefficients $f_n - f_{nk}$ du développement

$$F(z, w) - F_k(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n - f_{nk})\, e^{int}$$

sont les coefficients de Fourier d'une fonction p fois continûment dérivable et, par conséquent, d'après une propriété connue des coefficients de Fourier (*) on a :

$$\lim_{n\to\infty} n^p \{f_n(z) - f_{nk}(z)\} = 0. \qquad (3)$$

Ainsi, les *fonctions* $f_{nk}(z)$ *donnent une approximation de* $f_n(z)$, *pour les grands* n, *d'autant meilleure que* p *est plus grand.*

(*) Cf. *Fikhtengoltz*, tome III, p. 606 et les suivantes.

Comme exemple d'application de la méthode de Darboux, trouvons l'expression asymptotique des polynômes de Legendre $P_n(z)$ pour les grands n

$$F(z, w) = \frac{1}{\sqrt{1-2zw+w^2}} \tag{4}$$

(cf. l'exemple 2 du n° 70). Pour plus de simplicité, supposons z un nombre réel et $-1 < z < 1$; posons $z = \cos t$, $0 < t < \pi$, alors $1 - 2zw + w^2 = (w - e^{it})(w - e^{-it})$; donc le cercle de convergence de la série de Taylor de la fonction (4) est le cercle $|w| < 1$ et les points singuliers sont les points $w = e^{\pm it}$. Trouvons le développement, suivant les puissances de $w - e^{\pm it}$, de la branche de la fonction à deux déterminations (4) qui satisfait à la condition

$$\sqrt{w - e^{\pm it}} = e^{\pm i\frac{t+\pi}{2}} \sqrt{1 - we^{\mp it}}, \tag{5}$$

où la racine du second membre signifie que l'on considère la branche égale à l'unité pour $w = 0$ (c'est-à-dire représentée par la série du binôme) (*). Nous avons:

$$F(z, w) = \frac{1}{\sqrt{w - e^{it}}} \{w - e^{it} + (e^{it} - e^{-it})\}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{w - e^{it}}} \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2\sin t}} \left\{1 + \frac{w - e^{it}}{e^{it} - e^{-it}}\right\}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2\sin t}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(w - e^{it})^{n-\frac{1}{2}}}{(e^{it} - e^{-it})^n}, \tag{6}$$

où $c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n}$ sont les coefficients du binôme.

D'une manière analogue

$$F(z, w) = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2\sin t}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(w - e^{-it})^{n-\frac{1}{2}}}{(e^{-it} - e^{it})^n}. \tag{7}$$

Posons

$$F_k(z, w) = \frac{1}{\sqrt{2\sin t}} \sum_{\nu=0}^{k} c_n \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{(w - e^{it})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{it} - e^{-it})^{\nu}} + e^{-\frac{3\pi i}{4}} \frac{(w - e^{-it})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{-it} - e^{it})^{\nu}} \right\}, \tag{8}$$

alors, sur la circonférence $|w| = 1$, la différence $F(z, w) - F_k(z, w)$ est une fonction k fois continûment dérivable. En effet, cela est évident pour les points $w \neq e^{\pm it}$, et pour $w = e^{it}$, par exemple, cela découle de ce que le développement de la différence suivant les puissances de $(w - e^{it})$ commence par $(w - e^{it})^{k+\frac{1}{2}}$ (ce que l'on voit à partir des développements (6) et (7)).

(*) Il découle de la condition adoptée que le dénominateur de l'expression (4) est égal à l'unité pour $w = 0$.

Pour déterminer les coefficients du développement (8) en série suivant les puissances de w, remplaçons $(w - e^{\pm it})^{\nu - \frac{1}{2}}$ à l'aide de la formule (5). Alors le terme général de la série (8) s'écrit sous la forme

$$c_\nu \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4} - \frac{t+\pi}{2} i + \nu(t+\pi)i} \frac{(1 - we^{-it})^{\nu - \frac{1}{2}}}{(e^{it} - e^{-it})^\nu} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{3\pi i}{4} + \frac{t-\pi}{2} i - \nu(t+\pi)i} \frac{(1 - we^{it})^{\nu - \frac{1}{2}}}{(e^{-it} - e^{it})^\nu} \right\};$$

développant $(1 - we^{\pm it})^{\nu - \frac{1}{2}}$ en série d'après la formule du binôme

$$(1 - we^{\pm it})^{\nu - \frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{\nu n} e^{\pm itn} w^n,$$

après de simples transformations on trouve le coefficient de w^n dans le développement (8)

$$f_{nk}(z) = \sqrt{\frac{2}{\sin t}} \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu c_{\nu n} \frac{(-1)^\nu}{(2 \sin t)^\nu} \cos \left\{ \frac{\pi}{4}(1 + 2\nu) + \left(\nu - n - \frac{1}{2}\right) t \right\}, \quad (9)$$

qui donne précisément l'expression asymptotique de $P_n(z)$ pour les grands n. Se limitant au premier terme, nous trouvons l'expression asymptotique que nous cherchions

$$P_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\sin t}} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \cos \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\}. \quad (10)$$

La méthode de construction d'une fonction génératrice d'après la formule (1) est loin d'être unique. Pour les fonctions dont l'argument ne prend pas de valeurs entières mais varie continûment, on applique souvent, par exemple, la méthode des *transformations intégrales* qui consiste à remplacer la fonction $f(t)$ par une fonction $F(p)$ (fonction génératrice) définie par la formule

$$F(p) = \int_C K(t, p) f(t)\, dt, \quad (11)$$

où $K(t, p)$ est une fonction donnée (*noyau* de la transformation intégrale). On applique le plus souvent des transformations qui ont pour noyau $K(t, p) = e^{-pt}$ (*transformation de Laplace*), $K(t, p) = t^{p-1}$ (*transformation de Mellin*) et autres. Le chapitre suivant (cf. en particulier n° 88) est consacré à la transformation de Laplace.

On y montrera que, dans le cas de la transformation de Laplace, la fonction $f(t)$ est définie par sa fonction génératrice $F(p)$ par la formule

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} F(p) e^{pt}\, dp, \quad (11')$$

où $F(p)$ est une fonction de la variable complexe $p = s + i\sigma$, analytique dans le demi-plan de droite $\operatorname{Re} p \geqslant \lambda \geqslant 0$; l'intégrale est prise le long de la droite verticale Π: $\operatorname{Re} p = \lambda$, et t est un paramètre positif. Pour terminer ce chapitre, indiquons un procédé permettant de trouver l'expression asymptotique de ces intégrales.

Désignons par L une courbe formée des deux bords de la coupure suivant le demi-axe négatif des s et d'une petite circonférence autour du point $p = 0$. Par Π_R et L_R nous désignons les portions des courbes Π et L pour lesquelles on a respectivement $|p| < R$, $\operatorname{Re} p > -R$, et par C_R les arcs de circonférence $|p| = R$, $\operatorname{Re} p < \lambda$ (fig. 174). Nous supposons en outre que

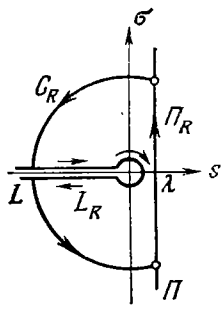

FIG. 174

1) l'on peut choisir une branche uniforme de la fonction $F(p)$ dans le plan des p coupé suivant le demi-axe négatif;

2) la branche choisie possède un nombre fini de points singuliers et sur les arcs de circonférence C_R elle tend vers zéro, lorsque $R \to \infty$, uniformément par rapport à $\arg p$;

3) l'intégrale de $F(p)\, e^{pt}$ prise le long de L tend vers zéro lorsque $t \to \infty$.

Dans ces conditions, pour les grands t

$$f(t) \approx \sum \operatorname{Res} \{F(p_k)\, e^{p_k t}\}, \tag{12}$$

où la somme est étendue à tous les points singuliers de $F(p)$ à partie réelle non négative.

En effet, d'après le théorème des résidus, nous avons:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_R \cup C_R \cup L_R} F(p)\, e^{pt}\, dp = R(t), \tag{13}$$

où $R(t)$ est la somme de tous les résidus de la fonction $F(p)\, e^{pt}$ (nous supposons R assez grand pour que le contour de la fig. 162 contienne tous les points singuliers). D'après le lemme de Jordan (n° 73), il découle de la condition 2) que, lorsque $R \to \infty$, l'intégrale suivant C_R tend vers zéro (cf. la remarque après la démonstration de ce lemme); donc l'égalité (13), à la limite, prend la forme:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi} F(p)\, e^{pt}\, dp = R(t) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} F(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{14}$$

Mais pour les grands t, les termes de la somme $R(t)$ relatifs aux points singuliers de $F(p)$ à partie réelle négative sont très petits, vu que le facteur $|e^{pt}|$ est petit, l'intégrale prise le long de L est, par hypothèse, également petite. D'où il découle (12).

Comme exemple, trouvons l'expression asymptotique de l'intégrale

$$f(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{pe^{pt-\frac{x}{v}\sqrt{p^2+2ap}}}{(p-i\omega)\sqrt{p^2+2ap}}\,dp, \tag{15}$$

où a, v et ω sont des constantes positives (on rencontre cette intégrale dans le problème de branchement d'une ligne longue sans perditance sur la f.é.m. $e^{i\omega t}$; son expression asymptotique donne le régime permanent de la ligne (cf. nº 87 du chapitre suivant). Ici, les conditions 1) et 2) sont satisfaites pour $x>0$ si par $\sqrt{p^2+2ap}$ on sous-entend une branche uniforme dans le plan coupé suivant le demi-axe négatif des s, qui pour les p positifs prend des valeurs positives. Pour démontrer que la condition 3) est satisfaite, posons $pt=q$, ce qui fait correspondre au contour L le contour L^* de même forme. Nous avons :

$$\int\limits_{L}=\int\limits_{L^*}\frac{qe^{q-\frac{x}{vt}\sqrt{q^2+2aqt}}}{(q-i\omega t)\sqrt{q^2+2aqt}}\,dq,$$

d'où l'on voit directement que cette intégrale tend vers zéro lorsque $t\to\infty$.

Ainsi, on peut appliquer la méthode que nous venons de décrire et l'expression asymptotique de l'intégrale (15) donne le résidu de la fonction à intégrer au pôle $p=i\omega$:

$$f(x,\ t)\approx\frac{i\omega}{\sqrt{2ai\omega-\omega^2}}\,e^{i\omega t-\frac{x}{v}\sqrt{2ai\omega-\omega^2}}. \tag{16}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
[2] A. Hurwitz, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, mit einem Anhang über «Geometrische Funktionentheorie» von R. Courant, 2. Aufl., Springer, Berlin 1925.
[3] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge 1952.
[4] Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Труды матем. института им. В. А. Стеклова, XXVI, 1949.
[5] Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.
[6] H. S. Tsien, Engineering cybernetics, N.Y. 1954.
[7] М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, 1962.
[8] R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, vol. 1, Interscience Publ., New York 1953.
[9] E. Jahnke und F. Emde, Tafeln höherer Funktionen, Nachdruck d. 5. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1960.

CHAPITRE VI

Le calcul symbolique et ses applications

Au siècle dernier, de nombreux mathématiciens (notamment, en Russie, *Vachtchenko-Zakhartchenko* et *Letnikov* (*)) se sont occupés du calcul symbolique. On trouve, à la base de ce calcul, l'élaboration de l'analyse mathématique comme un système d'opérations formelles sur le symbole $p = \frac{d}{dt}$ (t est la variable indépendante). Par exemple, la dérivée n-ième de la fonction $x = x(t)$ est le résultat de l'application à x du symbole $p^n = \frac{d^n}{dt^n}$, le premier membre d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants $L[x] = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x$ le résultat de l'application à x du symbole $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$; l'opération d'intégration $\int_0^t x(t)\,dt$ est considérée comme l'application du symbole $\frac{1}{p}$ de sorte que $\frac{1}{p}\cdot 1 = \int_0^t dt = t$, $\frac{1}{p^2}\cdot 1 = \frac{t^2}{2}$, $\ldots$, $\frac{1}{p^n}\cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$, etc.

Le calcul symbolique s'est avéré assez commode pour la résolution de divers problèmes liés aux équations différentielles linéaires. Le mérite de sa vulgarisation au XX^e siècle revient dans une grande mesure à l'ingénieur-électricien anglais Heaviside qui a utilisé avec beaucoup de succès le calcul symbolique dans les calculs électrotechniques.

Pour illustrer la méthode de Heaviside, donnons la solution de l'équation différentielle

$$x' - x = 1$$

avec la condition initiale $x(0) = 0$. Remplaçant la dérivation par la multiplication par p, nous obtenons, à la place de l'équation différentielle, l'équation $px - x = 1$, d'où $x = \frac{1}{p-1}$ et, après des trans-

(*) Cf. *М. Ващенко-Захарченко*, «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений», Киев, 1862. *А. Летников*, «Теория дифференцирования с произвольным указателем», Москва, 1868.

formations formelles, nous trouvons:

$$x = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots\right).$$

Tenant compte de ce qui a été dit plus haut à propos des symboles $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{p^n}$, nous trouvons:

$$x = \int_0^t \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots\right) dt = \int_0^t e^t\, dt = e^t - 1.$$

On peut vérifier directement que c'est bien la solution.

Certes, Heaviside ne s'est pas occupé de justifier les méthodes qu'il appliquait et, dans une série de cas, il aboutissait à des résultats faux. L'argumentation de la méthode symbolique ou comme on dit encore opérationnelle n'a été donnée qu'aux années 20 de notre siècle par *Bromwich* et *Carson* qui rattachaient cette méthode à a méthode des transformations intégrales bien connue dans la théorie des fonctions d'une variable complexe et utilisée avec succès par Cauchy, Laplace (1749-1827) et d'autres mathématiciens. En outre, le symbole (l'opérateur) p a reçu une nouvelle interprétation comme variable complexe $p = s + i\sigma$ et avec lui la méthode opération nelle (*) elle-même.

On demande, par exemple, de déterminer une fonction $x(t)$ de la variable réelle t à partir d'une équation qui renferme cette fonction sous le signe somme et le signe d'intégration. La méthode opérationnelle résout ce problème en le ramenant aux étapes suivantes: 1) on passe de la fonction inconnue $x(t)$ à la fonction $X(p)$ de la variable complexe p, « image » de $x(t)$; 2) on réalise avec l'image $X(p)$ les opérations qui correspondent aux opérations données effectuées avec $x(t)$ (on obtient « une équation opérationnelle » par rapport à $X(p)$). En outre, les opérations avec l'image s'avèrent beaucoup plus simples, par exemple: à la dérivation correspond la multiplication par la variable p, à l'intégration la division par p, etc.; 3) l'équation opérationnelle obtenue se résout par rapport à $X(p)$, ce qui d'ordinaire se ramène à de simples opérations algébriques; 4) on passe de l'image $X(p)$ ainsi trouvée à l'original $x(t)$ qui donne précisément la fonction que l'on cherchait.

L'application de la méthode opérationnelle peut être comparée à l'opération qui consiste à prendre le logarithme quand: 1) on passe

(*) La méthode opérationnelle a également reçu une autre argumentation rigoureuse à l'aide de la théorie générale des opérateurs développée en analyse fonctionnelle (cf. par exemple *V. Ditkine* et *P. Kouznétsov* [11]). Ces derniers temps, une interprétation originale et simple de la méthode opérationnelle a été donnée par le mathématicien polonais *Jan Mikusinski* [12].

du nombre au logarithme ; 2) on réalise sur les logarithmes des opérations qui correspondent aux opérations effectuées sur les nombres, de plus à la multiplication de nombres correspond une opération plus simple, l'addition des logarithmes, etc. ; 3) on revient du logarithme trouvé au nombre.

On expose dans ce chapitre les éléments fondamentaux de la méthode opérationnelle et on illustre ses applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique.

§ 1. NOTIONS FONDAMENTALES ET MÉTHODES

79. Transformation de Laplace. Nous appelons *original* toute fonction complexe $f(t)$ de la variable réelle t satisfaisant aux conditions suivantes :

1°. $f(t)$ est continue avec ses dérivées d'ordres suffisamment élevés sur l'axe des t, excepté en certains points en lesquels $f(t)$ ou ses dérivées ont des discontinuités de première espèce, en outre sur chaque intervalle fini de l'axe des t de tels points ne peuvent être qu'en nombre fini.

2°. $f(t) = 0$ pour tous les t négatifs.

3°. $f(t)$ ne croît pas plus rapidement que la fonction exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $M > 0$ et $s_0 \geqslant 0$ telles que pour tous les t

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}. \tag{1}$$

Le nombre s_0 est appelé *indice de croissance* de $f(t)$; pour des originaux bornés, on peut évidemment prendre (*) $s_0 = 0$.

Du point de vue des applications physiques, les conditions 1° et 3° ne nécessitent pas d'explications : elles sont évidemment vérifiées pour la plupart des fonctions $f(t)$ qui décrivent des processus physiques (t est interprété comme le temps). A première vue la condition 2° semble artificielle. Certes, il ne faut pas oublier que la méthode opérationnelle est adaptée aux problèmes qui conduisent à la résolution des équations différentielles avec des conditions initiales données et que le comportement des fonctions à déterminer avant l'instant initial, qu'on peut évidemment toujours prendre pour $t = 0$, laisse les physiciens complètement indifférents. Ainsi, la condition 2° aussi est physiquement naturelle.

L'original le plus simple est la *fonction* dite *échelon unité*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

(*) Si l'on veut avoir des estimations plus précises, il vaut mieux prendre alors pour indice de croissance la borne inférieure des nombres s tels que $|f(t)|e^{-st}$ est bornée lorsque $t \to \infty$.

Il est clair que la multiplication de la fonction $\varphi(t)$ par la fonction $\eta(t)$ la fait coïncider avec la fonction zéro pour $t < 0$ et ne la modifie pas pour $t > 0$: si la fonction $\varphi(t)$ satisfait aux conditions 1° et 3° et ne satisfait pas à la condition 2°, alors le produit

$$f(t) = \eta(t)\,\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

satisfait à la condition 2°, c'est-à-dire qu'il est un original (par exemple, $\eta(t) \sin \omega t$, $\eta(t)\, t^n$, $\eta(t)\, e^{\lambda t}$, etc.). Pour simplifier l'écriture, nous omettons, en règle générale, le facteur $\eta(t)$ en convenant, une fois pour toutes, que toutes les fonctions que nous avons à considérer sont nulles pour les t négatifs (par exemple, au lieu de $\eta(t)$, nous écrivons 1 et, au lieu de $\eta(t) \sin \omega t$, tout simplement $\sin \omega t$, etc.).

On appelle *transformée de Laplace de la fonction* $f(t)$ la fonction de la variable complexe $p = s + i\sigma$ définie par la relation

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{2}$$

où l'intégrale est prise le long du demi-axe positif. La phrase: « la fonction $f(t)$ a pour image $F(p)$ » est notée par le symbole (*)

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \text{ou} \quad F(p) \doteqdot f(t).$$

Remarquons que la méthode de Heaviside, comme cela devint clair après les travaux de Carson, consiste à passer de la fonction $f(t)$ à la fonction

$$F^*(p) \doteqdot p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{3}$$

Ainsi, la transformation de Heaviside diffère de celle de Laplace par le facteur p.

La présence du facteur supplémentaire p rapproche la méthode de Heaviside d'une autre méthode symbolique appliquée en électrotechnique, mais apporte néanmoins des complications non justifiées dans certains calculs. De plus, la transformation de Laplace se rattache d'une manière beaucoup plus naturelle à l'intégrale bien connue de Fourier largement appliquée en physique mathématique (cf. n° 88) (**). En partant de ces considérations, nous examinons partout la transformation de Laplace et non celle de Heaviside.

(*) Les symboles $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\|$, $]$ et d'autres sont aussi employés.

(**) Enfin, comme le lecteur le verra dans la suite de l'exposé, les propriétés de la transformation de Laplace sont plus symétriques : à chaque propriété des originaux correspond une propriété analogue (« duale ») des images — cf. propriétés III et IV, V et VI, VII et VIII, IX et X.

Théorème 1. *Pour tout original $f(t)$, l'image $F(p)$ est définie dans le demi-plan* $\operatorname{Re} p > s_0$, *où s_0 est l'indice de croissance de $f(t)$, et est une fonction analytique dans ce demi-plan.*

En effet, pour $\operatorname{Re} p = s > s_0$, l'intégrale (2) converge absolument car, d'après inégalité (1), elle est majorée par une intégrale convergente

$$\left| \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty M e^{-(s-s_0)t}\, dt = \frac{M}{s-s_0}. \tag{4}$$

Dans tout demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant s_1 > s$ l'intégrale qui s'obtient de l'intégrale (2) par dérivation par rapport à p converge uniformément, car elle est majorée par une intégrale convergente qui ne dépend pas de p

$$\left| \int_0^\infty f(t)\, te^{-pt}\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty M t e^{-(s_1-s_0)t}\, dt = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}. \tag{5}$$

D'où, d'après le théorème 4 du n° 16 nous concluons que la fonction $F(p)$ a une dérivée en tout point du demi-plan $\operatorname{Re} p > s_0$. Le théorème est démontré.

Remarque 1. En général l'intégrale de Laplace (2) ne définit l'image $F(p)$ que dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > s_0$. Par ailleurs, comme nous le verrons plus bas, dans la plupart de problèmes appliqués, le domaine de définition de l'image est beaucoup plus large que ce demi-plan. C'est pour cette raison que nous allons souvent considérer le prolongement analytique de l'image au-delà de la droite $\operatorname{Re} p = s_0$ et nous allons utiliser le fait que les relations entre les différentes images, qui, en règle générale, sont établies dans les demi-plans de convergence que l'on associe aux intégrales de Laplace, sont conservées par ce prolongement (cf. n° 25).

Remarque 2. *Si le point p tend vers l'infini de manière que* $\operatorname{Re} p = s$ *croît indéfiniment, alors la fonction $F(p)$ tend vers zéro:*

$$\lim_{s \to +\infty} F(p) = 0. \tag{6}$$

Ceci résulte directement de l'inégalité (4).

Il en découle que $F(p) \to 0$, lorsque $p \to \infty$, en restant dans tout angle $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg p < \frac{\pi}{2} - \delta$, où $\delta > 0$ est aussi petit que l'on veut; de plus, cette convergence est uniforme par rapport à $\arg p$. Si, en particulier, $F(p)$ est analytique au point à l'infini, alors $F(p) \to 0$, lorsque $p \to \infty$ suivant un chemin arbitraire; donc $F(p)$ doit simplement avoir un zéro à l'infini.

Nous étudierons plus loin les propriétés de la transformation de Laplace. Arrêtons-nous maintenant sur l'établissement de la formule qui donne l'original d'après son image (quatrième étape de la mé-

thode opérationnelle, cf. page 496). Donnons d'abord une démonstration non rigoureuse mais constructive de cette formule, puis une démonstration rigoureuse.

Considérons l'intégrale

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp, \tag{7}$$

prise le long de la droite Re $p = a > 0$ parcourue de bas en haut. Désignons par C_R et C'_R les parties de la circonférence $|p| = R$ qui se trouvent respectivement à gauche et à droite de la droite Re $p = a$ et par $a - ib$ et $a + ib$ les extrémités de C_R et C'_R (fig. 175).

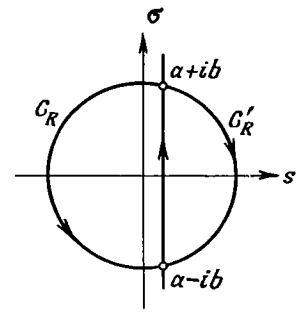

FIG. 175

Soit $t > 0$; vu que $\frac{1}{p} \to 0$, lorsque $R \to \infty$, uniformément par rapport à $\arg p$, d'après le lemme de Jordan (formule (4) du n° 73) nous avons:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{pt}}{p}\,dp=0.$$

Donc, d'après le théorème de Cauchy sur les résidus, en vertu duquel

$$\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}\,dp+\int_{C_R}\frac{e^{pt}}{p}\,dp=2\pi i\,\mathrm{Res}\,\frac{e^{pt}}{p}\Big|_{p=0}=2\pi i,$$

nous avons à la limite, lorsque $R \to \infty$,

$$f(t)=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}\,dp=1 \qquad (t>0).$$

Si $t < 0$, alors d'après le même lemme de Jordan (formule (5) du n° 73), nous avons:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R}\frac{e^{pt}}{p}\,dp=0,$$

et d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}\,dp+\int_{C'_R}\frac{e^{pt}}{p}\,dp=0,$$

d'où à la limite, lorsque $R \to \infty$, nous trouvons :

$$f(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p}\, dp = 0 \quad (t<0).$$

Ainsi, l'intégrale (7) représente l'échelon unité.

Il est clair que si dans (7) on change t en $t-\tau$, où τ est un nombre fixe, nous obtenons alors la fonction

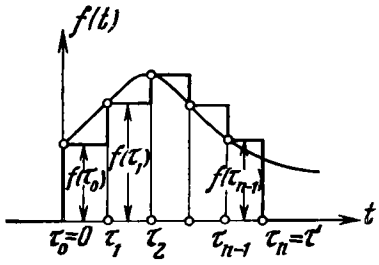

FIG. 176

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p}\, dp = \begin{cases} 0, & t<\tau, \\ 1, & t>\tau. \end{cases} \tag{8}$$

Portant dans (8) $\tau = \tau_1$, puis $\tau = \tau_2 > \tau_1$ et retranchant la deuxième intégrale de la première, nous obtenons la représentation de la fonction en escalier

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\, \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p}\, dp = \begin{cases} 0, & t<\tau_1, \\ 1, & \tau_1<t<\tau_2, \\ 0, & t>\tau_2. \end{cases}$$

Exactement de la même façon, on peut représenter par l'intégrale la fonction en escalier dont le graphique est donné sur la fig. 176

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\, \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p}\, dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\, e^{-p\tau_k} \Delta'\tau_k \right\} dp, \tag{9}$$

où

$$\Delta'\tau_k = \frac{1-e^{-p\Delta\tau_k}}{p} = \Delta\tau_k - \frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!}\, p + \frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!}\, p^2 - \ldots$$

($\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$). Si maintenant on fait croître le nombre n de manière que $\max \Delta\tau_k$ tend vers zéro, alors $\Delta'\tau_k$ est une quantité infiniment petite équivalente à $\Delta\tau_k$ et la somme qui se trouve entre accolades dans la formule (9) et qui diffère peu de la somme intégrale, à la limite donne l'intégrale. Il est naturel de s'attendre que

nous obtenons à la limite la représentation intégrale de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $(0, \tau)$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{\int_0^{\tau} f(\tau)\,e^{-p\tau}\,d\tau\right\}dp.$$

Faisant tendre τ vers ∞ et désignant par

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(\tau)\,e^{-p\tau}\,d\tau \tag{10}$$

la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, nous obtenons à la limite l'expression que nous cherchions de l'original en fonction de son image

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp. \tag{11}$$

La formule (11) «inverse» la formule (10), c'est-à-dire qu'elle exprime la fonction $f(t)$ par son image $F(p)$. Exactement de la même manière on peut considérer que (10) inverse (11); c'est précisément pour cette raison que les formules (10) et (11) sont appelées *formules d'inversion (de Laplace)*.

Donnons maintenant le résultat précis.

T h é o r è m e 2. *Si une fonction $f(t)$ est un original, c'est-à-dire si elle satisfait aux conditions* 1°, 2°, 3°, *et si $F(p)$ est son image, alors en tout point de continuité la fonction $f(t)$ est égale à*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \tag{11}$$

où l'intégrale est prise le long de toute droite $\operatorname{Re} p = a > s_0$ *et comprise au sens de la valeur principale* (*).

En effet, considérons l'intégrale

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}F(p)\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}\left\{\int_0^{\infty} f(\tau)\,e^{-p\tau}\,d\tau\right\}dp$$

(cf. formule (10)). Etant donné que dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant a$ l'intégrale $\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau$ converge uniformément par rapport à p (cf. la démonstration du théorème 1), on peut donc intervertir

(*) C'est-à-dire comme la limite de l'intégrale prise sur le segment $(a - ib,\ a + ib)$ lorsque $b \to \infty$.

l'ordre d'intégration (*), ce qui nous donne:

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)}\,dp=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{a(t-\tau)}\frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-t}^{\infty} f(\xi+t)\,e^{-a(\xi+t)}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi\,.$$

Vu que $f(t+\xi)=0$ pour $t+\xi<0$ (comparer à la condition 2° des originaux), nous avons:

$$f_b(t)=\frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\xi)\,e^{-a(t+\xi)}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Décomposant cette intégrale en deux intégrales correspondant respectivement aux segments $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ et faisant dans la deuxième le changement de variable $\xi=-\xi$, nous obtenons:

$$f_b(t)=\frac{1}{\pi}e^{at}\int_0^\infty [f(t+\xi)\,e^{-a(t+\xi)}+$$

$$+f(t-\xi)\,e^{-a(t-\xi)}]\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Tenant compte de la valeur de l'intégrale d'Euler (cf. l'exemple 2 du n° 73), nous avons:

$$f_b(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{[f(t+\xi)\,e^{-a\xi}-f(t)]-[f(t)-f(t-\xi)\,e^{a\xi}}{\xi}\times$$

$$\times\sin b\xi\,d\xi+f(t). \qquad (12)$$

D'après la condition 1° des originaux, la fonction

$$g(\xi)=\frac{f(t+\xi)\,e^{-a\xi}-f(t)}{\xi}-\frac{f(t)-f(t-\xi)\,e^{a\xi}}{\xi}$$

dans tout segment fini peut avoir au plus un nombre fini de points de discontinuité qui sont les discontinuités de première espèce. Alors pour chaque B fixe

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^B g(\xi)\sin b\xi\,d\xi=0.$$

En partant de ce fait et en tenant compte de la condition 3° des originaux et de la convergence de l'intégrale d'Euler, on obtient de la formule (12) le résultat énoncé.

(*) Cela découle directement d'un théorème connu d'analyse, cf. par exemple, *Fikhtengoltz*, t. II, page 733.

Il découle immédiatement du théorème que nous venons de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *L'original $f(t)$ est complètement défini par son image $F(p)$ aux valeurs aux points de discontinuité de $f(t)$ près.*

En effet, d'après ce qui a été démontré, la valeur de l'original en un point de continuité s'exprime par l'image $F(p)$ à l'aide de la formule (11). Les valeurs de l'original aux points de discontinuité n'influent évidemment pas sur l'image.

Donnons encore des conditions suffisantes pour qu'une fonction donnée de la variable complexe $F(p)$ soit l'image d'un certain original.

Théorème 4. *Si une fonction $F(p)$ est analytique dans le demi-plan* $\operatorname{Re} p > s_0$, *tend vers zéro, lorsque* $|p| \to \infty$ *dans tout demi-plan* $\operatorname{Re} p \geqslant a > s_0$, *uniformément par rapport à* $\arg p$ *et si l'intégrale*

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,dp$$

converge absolument, alors $F(p)$ est l'image de la fonction

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp. \tag{11}$$

En effet, fixons un nombre p_0, $\operatorname{Re} p_0 > a$, alors il vient de (11)

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-p_0 t} \left\{ \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp \right\} dt. \tag{13}$$

Puisque dans l'intégrale entre accolades $p = a + i\sigma$, $dp = i\,d\sigma$, on peut donc sortir le facteur e^{at} de sous le signe d'intégration et on a pour l'intégrale restante

$$\left| \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{i\sigma t} F(p)\,dp \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\sigma)|\,d\sigma.$$

On voit donc que cette intégrale converge uniformément par rapport à t et, par conséquent, on peut intervertir l'ordre d'intégration dans la formule (13). Nous avons:

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,dp \int_0^\infty e^{(p-p_0)t}\,dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p-p_0}\,dp, \tag{14}$$

car, du fait que $\operatorname{Re}(p-p_0) < 0$ et $t > 0$, l'intégrale $\int_0^\infty e^{(p-p_0)t}\,dt$

converge et est égale à $-\frac{1}{p-p_0}$. Puis, en vertu des conditions du théorème, sur l'arc de circonférence $C'_R: |p| = R$, $\operatorname{Re} p > a$, nous avons $\max |F(p)| = \alpha_R \to 0$, lorsque $R \to \infty$, donc

$$\left| \int_{C'_R} \frac{F(p)}{p-p_0}\, dp \right| \leqslant \frac{\alpha_R}{R - |p_0|}\, \pi R$$

et cette intégrale tend vers zéro lorsque $R \to \infty$. Il en découle que, dans (14), la droite d'intégration peut être remplacée par le contour fermé $\widetilde{C}_R$ formé de C'_R et du segment $(a + ib,\ a - ib)$ parcouru de haut en bas (*)

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{C}_R} \frac{F(p)}{p-p_0}\, dp$$

(nous nous libérons du signe moins dans la formule (14) en changeant le sens de parcours sur la droite). Mais à l'intérieur du contour $\widetilde{C}_R$, la fonction analytique $\frac{F(p)}{p-p_0}$ n'a qu'un seul point singulier $p = p_0$, un pôle du premier ordre de résidu $F(p_0)$; donc

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\, dt = F(p_0),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons maintenant que pour $t < 0$, d'après le lemme de Jordan,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} e^{pt} F(p)\, dp = 0.$$

Donc, la droite d'intégration dans la formule (11) peut être remplacée par ce même contour $\widetilde{C}_R$. Nous trouvons pour $t < 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{C}_R} e^{pt} F(p)\, dp = 0,$$

puisque la fonction à intégrer est analytique dans $\widetilde{C}_R$, donc la condition 2° pour l'original est satisfaite. Il vient de (11)

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} e^{at} \int_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\sigma)|\, d\sigma = M e^{at}$$

la condition 3° est donc aussi satisfaite. Nous ne vérifions pas la condition 1°.

(*) Pour les R assez grands le point p_0 se trouve à l'intérieur de τ_R.

80. Propriétés de la transformation de Laplace. Nous énonçons ici un certain nombre de propositions simples qui constituent l'appareil de la méthode opérationnelle. Notons d'abord deux exemples simples de transformation de Laplace (*)

$$1 \doteqdot \frac{1}{p}, \quad e^{p_0 t} \doteqdot \frac{1}{p-p_0}, \tag{1}$$

que l'on obtient directement de la définition (formule (2) du n° 79).

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $f(t)$, $g(t)$, ... les originaux et par $F(p)$, $G(p)$, ... leurs images:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad G(p) = \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt, \ldots$$

Les propriétés des intégrales entraînent immédiatement:

I. Linéarité. *Pour toute constante (complexe)* α *et* β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p). \tag{2}$$

En partant de cette propriété, on peut, par exemple, à l'aide des formules (1), obtenir la relation

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{3}$$

D'une façon analogue

$$\cos \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{sh} \omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2-\omega^2}, \quad \operatorname{ch} \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2-\omega^2}. \tag{4}$$

II. Théorème d'homothétie. *Pour toute constante* $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{5}$$

En effet, posant $\alpha t = \tau$, nous avons:

$$f(\alpha t) \doteqdot \int_0^\infty f(\alpha t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}\, d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

III. Dérivation de l'original. *Si* $f'(t)$ *ou plus généralement* $f^{(n)}(t)$ *est un original, alors*

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0) \tag{6}$$

ou encore

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \tag{7}$$

où $f^{(k)}(0)$ *est la valeur limite à droite* $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

(*) Ici, d'après notre convention, 1 et $e^{p_0 t}$ désignent respectivement $\eta(t)$ et $e^{p_0 t}\eta(t)$.

En effet, passant aux images et intégrant par parties, nous obtenons :

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt = [f(t)\, e^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Etant donné que Re $p = s > s_0$ nous avons $| f(t)\, e^{-pt} | \leqslant Me^{(s-s_0)t}$ et en faisant $t = \infty$ le premier terme devient nul, de même en faisant $t = 0$ il vient $-f(0)$ (*) ; le deuxième terme est égal à $pF(p)$ et la formule (6) est démontrée. Appliquant deux fois de suite la formule (6), nous avons :

$$f''(t) = [f'(t)]' \doteqdot p\,[pF(p) - f(0)] - f'(0) = \\ = p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

etc.

En particulier, si $f(0) = 0$, alors

$$f'(t) \doteqdot pF(p), \tag{8}$$

et la dérivation de l'original se ramène à la multiplication de l'image par p (comparer avec l'introduction de ce chapitre).

La propriété duale (**) de la propriété III est la suivante :

IV. Dérivation de l'image. *La dérivation de l'image se ramène à la multiplication de l'original par — t, ou, en général,*

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t). \tag{9}$$

En effet, étant donné que $F(p)$ est une fonction analytique dans le demi-plan Re $p > s_0$, on peut la dériver (***) par rapport à p et nous avons :

$$F'(p) = -\int_0^\infty tf(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad F''(p) = \int_0^\infty t^2 f(t)\, e^{-pt}\, dt, \ldots$$

$$\ldots, F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{10}$$

ce qui est équivalent à la formule (9).

Comme exemple d'application de la propriété IV, notons qu'il découle des relations (1) :

$$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad t^n e^{p_0 t} \doteqdot \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}, \tag{11}$$

(*) Si $f(t)$ est discontinue pour $t = 0$, $f(0)$ est alors la valeur limite à droite.

(**) Cf. le renvoi de la page 497.

(***) La possibilité de dériver sous le signe somme découle de ce que toutes les intégrales (10) convergent uniformément par rapport à p dans tout demi-plan Re $p \geqslant a > s_0$; on peut aussi utiliser le théorème de Weierstrass (n° 16).

et des formules (3) et (4):

$$t \sin \omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \qquad t \cos \omega t \doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}. \tag{12}$$

V. Intégration de l'original. *L'intégration de l'original se ramène à la division de l'image par p*

$$\int_0^t f(t)\,dt \doteqdot \frac{F(p)}{p} \tag{13}$$

(comparer avec l'introduction de ce chapitre).

Il est d'abord facile de vérifier que les fonctions $g(t) = \int_0^t f(t)\,dt$ et $f(t)$ sont des originaux, c'est-à-dire qu'elles vérifient les conditions 1°, 2°, 3° du n° 79. Alors, d'après la formule (8) (on peut l'appliquer, car $g(0) = 0$), nous avons:

$$f(t) = g'(t) \doteqdot pG(p).$$

Ainsi, pour l'image de $f(t)$ nous avons $F(p) = pG(p)$, d'où

$$G(p) = \frac{F(p)}{p},$$

ce qu'il fallait démontrer.

La propriété duale de la propriété V est la suivante:

VI. Intégration de l'image. *Si l'intégrale* $\int_p^\infty F(p)\,dp$ *converge, elle est alors l'image de la fonction* $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty F(p)\,dp \tag{14}$$

(*l'intégration de l'image est équivalente à la division de l'original par t*).

En effet, nous avons:

$$\int_p^\infty F(p)\,dp = \int_p^\infty dp \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

En supposant que le chemin d'intégration (p, ∞) est entièrement intérieur au demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant a > s_0$, nous obtenons pour la dernière intégrale l'estimation

$$\left| \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt \right| \leqslant M \int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}\,dt,$$

d'où il découle facilement sa convergence uniforme par rapport à p. Donc, nous pouvons intervertir l'ordre d'intégration :

$$\int_p^\infty F(p)\,dp = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_p^\infty e^{-pt}\,dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,e^{-pt}\,dt.$$

L'égalité obtenue est équivalente à la formule (14) (*).

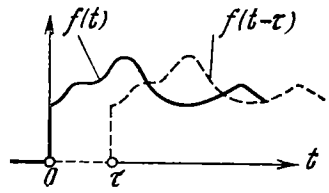

FIG. 177

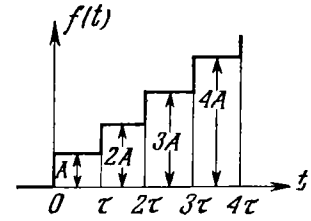

FIG. 178

Exemple 1. Nous avons (cf. (1)) :

$$e^{bt} - e^{at} \doteq \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a},$$

et d'après la propriété VI nous avons :

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \doteq \int_p^\infty \left(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}\right) dp = \ln\frac{p-a}{p-b}. \tag{15}$$

Exemple 2. De la formule (3), appliquant la propriété VI, nous trouvons :

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dp}{1+p^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

En appliquant la propriété V, nous trouvons l'image du sinus intégral

$$\text{si } t = \int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt \doteq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}. \tag{16}$$

VII. Théorème de retardement. *Pour tout* τ *positif*

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}F(p) \tag{17}$$

(*l'original retardé de* τ (fig. 177) *est équivalent à l'image multipliée par* $e^{-p\tau}$).

(*) Remarquons que la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,e^{-pt}dt$ découle de notre raisonnement.

Vu que $f(t-\tau)=0$ pour $t<\tau$, faisant le changement de variables $t-\tau=t_1$, nous avons:

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)\, e^{-pt}\, dt = \int_{0}^{\infty} f(t_1)\, e^{-p(t_1+\tau)}\, dt_1 = e^{-p\tau} F(p),$$

ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, il est commode d'appliquer ce théorème lorsqu'on veut calculer l'image d'une fonction qui est donnée par différentes expressions analytiques dans différentes parties de son domaine de définition.

Exemple 1. Trouvons l'image d'une fonction en escalier dont le graphique est donné sur la fig. 178. Il est clair que nous avons

$$f(t)=A\{\eta(t)+\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+\ldots\};$$

donc d'après le théorème de retardement

$$f(t) \doteqdot A\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-p\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{p}e^{-2p\tau}+\ldots\right\}.$$

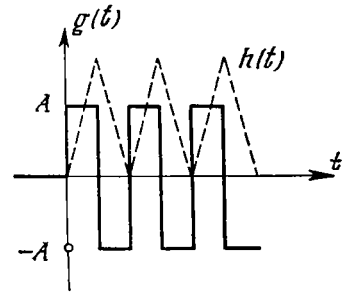

FIG. 179

Nous avons dans le second membre une progression géométrique convergente, car $|e^{-p\tau}|=e^{-s\tau}<1$, donc

$$f(t) \doteqdot \frac{A}{p}\,\frac{1}{1-e^{-p\tau}} = \frac{A}{2p}\left(1+\operatorname{cth}\frac{p\tau}{2}\right). \tag{18}$$

Exemple 2. La fonction « impulsions périodiques rectangulaires » $g(t)$, dont le graphique est donné sur la fig. 179, peut être écrite sous la forme:

$$g(t) \doteqdot A\{\eta(t)-2\eta(t-\tau)+2\eta(t-2\tau)-\ldots\};$$

donc d'après le théorème de retardement

$$g(t) \doteqdot A\left\{\frac{1}{p}-\frac{2}{p}e^{-p\tau}+\frac{2}{p}e^{-2p\tau}-\ldots\right\}=$$
$$=\frac{A}{p}\left(1-2\,\frac{e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}\right)=\frac{A}{p}\operatorname{th}\frac{p\tau}{2}. \tag{19}$$

La fonction « impulsions périodiques triangulaires » $h(t)$, de graphique donné en pointillé sur la fig. 179, est égale à $\int_0^t g(t)\,dt$; donc d'après la propriété V

$$h(t) \doteqdot \frac{A}{p^2}\operatorname{th}\frac{p\tau}{2}. \tag{20}$$

Le théorème dual du théorème de retardement est :

VIII. Théorème de translation. *Pour tout* p_0 *complexe*

$$e^{p_0 t} f(t) \doteqdot F(p - p_0) \tag{21}$$

(*la « translation » de l'image de* p_0 *est équivalente à la multiplication de l'original par* $e^{p_0 t}$).

Nous avons :

$$e^{p_0 t} f(t) \doteqdot \int_0^\infty f(t)\, e^{-(p-p_0)t}\, dt = F(p - p_0),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème permet, connaissant les images des fonctions, de trouver les images de ces mêmes fonctions multipliées par l'exponentielle, par exemple :

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}, \qquad e^{-\lambda t} \cos \omega t \doteqdot \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2},$$

$$e^{-\lambda t} t^n \doteqdot \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}. \tag{22}$$

81. Théorèmes de multiplication. Une place particulière revient dans la méthode opérationnelle aux propositions exprimant un lieu entre les originaux et les images du produit de fonctions.

IX. Théorème de multiplication (E. Borel). *Le produit de deux images* $F(p)$ *et* $G(p)$ *est aussi une image, de plus*

$$F(p)\, G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

En effet, l'intégrale du second membre de la formule (1) est un original : les propriétés 1° et 2° sont évidentes et, pour démontrer la propriété 3°, remarquons que si l'on prend le nombre s_0 égal au plus grand des indices de croissance des fonctions $f(t)$ et $g(t)$, alors

$$\left| \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right| < M \left| \int_0^t e^{s_0 \tau} e^{s_0 (t-\tau)}\, d\tau \right| = M t e^{s_0 t}.$$

Il en découle que l'intégrale (1) n'est pas supérieure à une constante multipliée par $e^{(s_0+\varepsilon)t}$, où ε est un nombre positif aussi petit que l'on veut.

Considérons maintenant l'image de l'intégrale (1) :

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

On a dans le second membre une intégrale répétée étendue au secteur S du plan des (t, τ) (fig. 180), car, pour t fixe, l'intégration par rapport à τ se fait entre zéro et $\tau = t$, puis t varie de zéro à l'infini. Puisque, pour $\operatorname{Re} p > s_0$, cette intégrale répétée converge absolument, on peut intervertir l'ordre d'intégration (*) et nous avons (remplaçant encore t par $t_1 = t - \tau$):

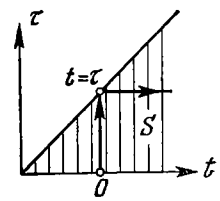

FIG. 180

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau \int_0^\infty g(t_1)\, e^{-pt_1}\, dt_1 = F(p)\, G(p),$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'intégrale qui se trouve dans le second membre de la formule (1) est appelée *convolution* des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ et on la désigne par le symbole:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Le théorème IX dit que la *multiplication des images est équivalente à la convolution des originaux*:

$$f * g \doteqdot F(p)\, G(p)\ (**). \tag{3}$$

Pour les applications nous avons un corollaire utile du théorème de multiplication pour le cas où on cherche l'original du produit $pF(p)\, G(p)$.

Utilisant la règle de dérivation de l'original (formule (6) du n° 80) et le théorème de multiplication que nous venons de démontrer, nous obtenons l'*intégrale de Duhamel*:

$$pF(p)\, G(p) = f(0)\, G(p) + \{pF(p) - f_1(0)\}\, G(p) \doteqdot$$

$$\doteqdot f(0)\, g(t) + \int_0^t f'(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

(*) Cf., par exemple, *Fikhtengoltz*, t. III, p. 270.

(**) Notons la propriété de commutativité de la convolution

$$f * g = g * f,$$

qui se démontre facilement en remplaçant dans la définition de la convolution la variable τ par $\tau_1 = t - \tau$; elle découle aussi de ce que le premier membre de (3) est conservé lorsqu'on a interverti les rôles de $F(p)$ et $G(p)$.

La propriété de commutativité de la convolution permet d'écrire cette intégrale sous la forme

$$pF(p)\,G(p) \doteq f(0)\,g(t) + \int_0^t g(\tau)\,f'(t-\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

et le changement de rôle des fonctions $F(p)$ et $G(p)$ conduit aux formules

$$pF(p)\,G(p) \doteq g(0)\,f(t) + \int_0^t g'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= g(0)\,f(t) + \int_0^t f(\tau)\,g'(t-\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Des exemples d'application de l'intégrale de Duhamel sont donnés plus loin (cf. n° 84 et suivants).

Donnons un théorème dual du théorème de multiplication.

X. Théorème. *Soient donnés deux originaux $f(t)$ et $g(t)$ d'indices de croissance s_1 et s_2. Leur produit est aussi un original, de plus*

$$f(t)\,g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)\,G(p-q)\,dq, \tag{7}$$

où $a > s_1$ et Re $p > s_2 + a$.

En effet, le produit $f(t)\,g(t)$ satisfait évidemment aux conditions 1°-3° des originaux. Son image est

$$f(t)\,g(t) \doteq \int_0^\infty f(t)\,g(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Prenons $a > s_1$ et remplaçons $f(t)$ selon la formule d'inversion :

$$f(t)\,g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)\,e^{qt}\,dq\right\} g(t)\,e^{-pt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left\{F(q)\int_0^\infty g(t)\,e^{-(p-q)t}\,dt\right\} dq$$

(l'inversion de l'ordre d'intégration est légitime en vertu de la convergence absolue). Si, de plus, on suppose que Re $p > s_2 + a$, on a alors Re $(p - q) > s_2$, car Re $q = a$, et l'intégrale entre accolades peut être remplacée par $G(p - q)$. Le théorème est démontré.

Remarquons encore qu'étant donné que a peut être pris aussi voisin que l'on veut de s_1, l'image de la fonction $f(t)\,g(t)$ est défi-

nie dans le demi-plan Re $p > s$, où $s = s_1 + s_2$ est l'indice de croissance de cette fonction. Le théorème ci-dessous, démontré en 1935 par le mathématicien soviétique *A. Efros*, est utile dans les applications.

XI. Théorème de multiplication généralisé. *Soient données l'image* $F(p) \doteqdot f(t)$ *et les fonctions analytiques* $G(p)$ *et* $q(p)$ *telles que*

$$G(p)\, e^{-\tau q(p)} \doteqdot g(t;\ \tau), \tag{8}$$

alors (*)

$$F[q(p)]\, G(p) \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\, g(t;\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

En effet, l'image du second membre de la relation (9) est:

$$\int_0^\infty f(\tau)\, g(t;\ \tau)\, d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^\infty f(\tau)\, g(t;\ \tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty g(t;\ \tau)\, e^{-pt}\, dt$$

(nous supposons que l'on peut intervertir l'ordre d'intégration). Mais la dernière intégrale est l'image de $g(t;\ \tau)$; donc, d'après la formule (8), on peut écrire

$$\int_0^\infty f(\tau)\, g(t;\ \tau)\, d\tau \doteqdot G(p) \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-q(p)\tau}\, d\tau = G(p)\, F[q(p)],$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Si, en particulier, on prend $q(p) = p$, alors $g(t;\ \tau) \doteqdot e^{-p\tau} G(p)$ et, d'après le théorème de retardement, $g(t;\ \tau) = g(t - \tau)$. Donc, la formule (9) prend la forme

$$F(p)\, G(p) \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

(pour $\tau > t$, en vertu de la propriété 2° des originaux, on a $g(t - \tau) = 0$) et coïncide avec la formule (1). Ainsi, le théorème d'Efros est réellement une généralisation du théorème de multiplication.

(*) Nous n'énonçons pas les conditions du théorème ; il doit découler de ces conditions que les fonctions considérées sont des images et que l'on peut intervertir l'ordre d'intégration (cf. la démonstration).

Donnons plusieurs exemples d'application du théorème d'Efros.

Exemple 1. Soient $G(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $q(p) = \sqrt{p}$. Déterminons la fonction $g(t; \tau)$ d'après la formule d'inversion

$$g(t; \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\tau\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}}.$$

Considérons le contour fermé formé du segment $(a - ib, a + ib)$, des arcs C'_R et C''_R de la circonférence $|p| = R$, des deux bords I et II de la coupure et de la circonférence c_r : $|p| = r$ (fig. 181). A l'intérieur de ce contour la fonction à intégrer est analytique et uniforme (pour fixer les idées supposons $-\pi < \arg p < \pi$). Donc, d'après le théorème de Cauchy, l'intégrale prise le long du segment $(a - ib, a + ib)$ peut être remplacée par l'intégrale prise le long de la partie restante du contour (le sens d'intégration est indiqué par des flèches sur la fig. 181). Puisque $\tau > 0$, sur les arcs C'_R et C''_R la fonction $\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\tau\sqrt{p}} \to 0$ lorsque $R \to \infty$. Donc, d'après le lemme de Jordan, pour $t > 0$, l'intégrale de $\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}$ prise le long de C'_R et C''_R tend vers zéro, lorsque $R \to \infty$, et on peut écrire :

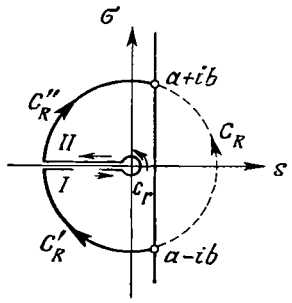

FIG. 181

$$g(t; \tau) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\text{I}} e^{-\tau\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} + \int_{c_r} + \int_{\text{II}} \right\}.$$

Sur le bord I, nous avons $p = xe^{-i\pi}$, $\sqrt{p} = -i\sqrt{x}$, sur le bord II $p = xe^{i\pi}$, $\sqrt{p} = i\sqrt{x}$; donc

$$\int_{\text{I}} = \int_{R}^{r} e^{i\tau\sqrt{x}-xt} \frac{dx}{i\sqrt{x}}, \qquad \int_{\text{II}} = -\int_{r}^{R} e^{-i\tau\sqrt{x}-xt} \frac{dx}{i\sqrt{x}}.$$

L'intégrale prise le long de c_r tend évidemment vers zéro lorsque $r \to 0$, car $\left| \int_{c_r} \right| < \frac{M}{\sqrt{r}} 2\pi r$. Ainsi

$$g(t; \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \cos\tau\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-tu^2} \cos\tau u \, du = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$$

(nous avons posé $x = u^2$ et nous nous sommes servis de la valeur connue de l'intégrale de Poisson — cf. exemple 4) du n° 73), c'est-à-dire (*)

$$\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}. \qquad (10)$$

(*) Pour $t < 0$ l'intégrale prise le long de l'arc C_R, désigné en pointillé sur la fig. 181, tend vers zéro ; par un raisonnement analogue on montre que $g(t; \tau) = 0$ pour $t < 0$.

Supposons maintenant que l'on connaisse l'original de la fonction $F(p) \doteqdot f(t)$. Tenant compte de la relation (10), nous pouvons trouver l'original de $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$ directement par le théorème d'Efros:

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau. \tag{11}$$

Par exemple, en posant $F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p}$ $(\alpha > 0)$, nous trouvons à l'aide du théorème de retardement $f(t) = \eta(t-\alpha)$ et la formule (11) donne

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_\alpha^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-x^2} dx$$

(nous avons tenu compte de ce que $\eta(\tau-\alpha)=0$ pour $\tau<\alpha$ et nous avons posé $\frac{\tau}{2\sqrt{t}} = x$). Tenant compte des notations

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx, \quad 1 - \operatorname{erf} x = \operatorname{erfc} x \tag{12}$$

et de ce que $\operatorname{erf} \infty = 1$ (cf. n° 70), nous pouvons écrire la dernière formule sous la forme

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} \doteqdot 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right). \tag{13}$$

Exemple 2. Posons $G(p) = \frac{1}{p}$ et $q(p) = \frac{1}{p}$. On détermine la fonction $g(t;\tau) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-\frac{\tau}{p}}$ à l'aide du théorème d'homothétie à partir de la formule $\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot J_0(2\sqrt{t})$, que l'on établira ci-dessous (n° 82) (*)

$$g(t;\tau) = J_0(2\sqrt{t\tau}).$$

Le théorème d'Efros donne:

$$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\, J_0(2\sqrt{t\tau})\, d\tau. \tag{14}$$

En particulier, prenant $f(\tau) = \cos\tau$, nous trouvons $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$ (cf. la formule (4) du n° 80), $F\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p}{p^2+1}$ et la formule (14) prend la forme:

$$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau})\cos\tau\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p^2+1}. \tag{15}$$

(*) Cf. la formule (4) du n° 82; J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro (cf. n° 70 ainsi que le chapitre suivant).

Tenant compte de la formule (3) du n° 80, nous obtenons la relation suivante qui contient la fonction de Bessel J_0 :

$$\int_0^\infty J_0\,(2\sqrt{t\tau})\cos\tau\,d\tau = \sin t. \tag{16}$$

82. Théorèmes de développement. Nous démontrons ici plusieurs théorèmes se rapportant au développement des originaux et images en séries. Dans le premier théorème, nous supposons que l'image $F(p)$ est analytique au point à l'infini (et d'après la remarque du n° 79, $F(\infty) = 0$) et nous démontrons que, dans ce cas, l'original peut être trouvé en prenant la somme formelle des originaux des termes du développement de la fonction $F(p)$ en série de Laurent au voisinage du point à l'infini. Tenant compte des formules (11) du n° 80 pour les originaux des puissances négatives de p, nous pouvons énoncer ce théorème sous la forme suivante :

XII. Premier théorème de développement. *Si $F(p)$ est régulière au point à l'infini et admet, dans le voisinage de ce point, le développement en série de Laurent*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \tag{1}$$

alors la fonction

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!}\,t^{k-1} \tag{2}$$

(multipliée par $\eta(t)$) est l'original de $F(p)$. De plus $f(t)$ est une fonction entière.

Pour démontrer ce théorème posons $p = \frac{1}{q}$ et $F\left(\frac{1}{q}\right) = \Phi(q)$. La fonction $\Phi(q) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k$ est analytique dans le cercle $|q| \leqslant R$; par conséquent, les inégalités de Cauchy (n° 17) donnent

$$|c_k| < MR^k.$$

De ces inégalités, pour tout t (complexe), nous obtenons:

$$|f(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,\frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant MR \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R|t|)^k}{k!} = MRe^{R|t|}.$$

Il en découle, premièrement, que la série (2) converge pour tous les t complexes, c'est-à-dire qu'elle est une fonction entière, et, deuxièmement, que $|f(t)| < Ce^{Rt}$ pour tous les t positifs. Ainsi, la fonction $\eta(t)\,f(t)$ est réellement un original. Vu la convergence uniforme de la série (2) dans tout le plan nous pouvons la multiplier

par e^{-pt} et l'intégrer par rapport à t de 0 à ∞. Utilisant les formules (11) du n° 80, nous trouvons précisément le développement (1) que nous cherchions. Le théorème est démontré.

Remarque. On peut aussi démontrer la proposition inverse : si l'original est de la forme $\eta(t) f(t)$, où $f(t)$ est une fonction entière qui vérifie l'inégalité $|f(t)| < Me^{s_0|t|}$ (c'est-à-dire que $f(t)$ est d'ordre fini), alors son image $F(p)$ est régulière au point à l'infini.

Exemple. Considérons le développement

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}.$$

Puisque $F(p)$ est régulière au point à l'infini et que ce point est un zéro, d'après le théorème XII on peut passer formellement aux originaux

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} = f(t).$$

La série du second membre rappelle le développement de la fonction cylindrique J_n (cf. la formule (13) du n° 70) ; pour la ramener à cette fonction, posons $t = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$; alors

$$f(t) = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}).$$

Ainsi, nous avons :

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

et, en particulier, pour $n = 0$

$$J_0(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Donnons aussi certaines conséquences des formules obtenues. De la relation (3), d'après le théorème d'inversion, nous obtenons :

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p^{n+1}} e^{pt-\frac{1}{p}} dp.$$

Posant ici $2\sqrt{t} = \tau$ et (pour τ fixe) $p = \frac{2}{\tau} p_1$ et tenant compte de ce que, par le dernier changement de variable, la droite d'intégration ne subit qu'une translation dans le demi-plan de droite (puisque $\frac{2}{\tau} > 0$), nous obtenons :

$$J_n(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} e^{\frac{\tau}{2}\left(p_1-\frac{1}{p_1}\right)} \frac{dp_1}{p_1^{n+1}} \tag{5}$$

(comparer avec la formule analogue du n° 70). Posons maintenant $p = \frac{1}{2}\left(p_1 - \frac{1}{p_1}\right)$; le demi-plan de droite Re $p_1 > 0$ se transforme alors dans le plan des p coupé suivant les demi-droites $(-i\infty, -i)$, $(i, i\infty)$. Pour tirer au clair le caractère de l'image L de la droite d'intégration posons $p_1 = re^{i\varphi}$, $p = s + i\sigma$; alors

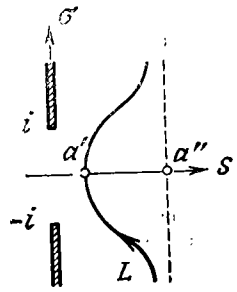

FIG. 182

$$s = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \qquad \sigma = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Sur la droite d'intégration Re $p_1 = a_1$ nous avons $r\cos\varphi = a_1$; donc les équations paramétriques de la courbe L sont :

$$s = \frac{1}{2}\left(a_1 - \frac{\cos^2\varphi}{a_1}\right) ; \quad \sigma = \frac{1}{2}\left(a_1 \operatorname{tg}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2a_1}\right),$$

où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. On voit de ces équations que L se trouve dans la bande limitée par les droites $s = a' = \frac{1}{2}\left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right)$ et $s = a'' = \frac{1}{2}a_1$ et a l'asymptote verticale $s = a''$ lorsque $\varphi \to \pm\frac{\pi}{2}$.

La deuxième équation montre que, pour φ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, σ varie de $-\infty$ à ∞, de plus d'une manière monotone pour les a_1 suffisamment grands (ce qu'on peut supposer sans restreindre la généralité). Ainsi, la courbe L a la forme qu'on lui a donnée sur la fig. 182.

Après avoir posé $p = \frac{1}{2}\left(p_1 - \frac{1}{p_1}\right)$, $p_1 = p + \sqrt{p^2+1}$, la relation (5) devient

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{pt}\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}\,(p+\sqrt{p^2+1})^n} \tag{6}$$

(nous écrivons de nouveau t au lieu de τ). Puisque la fonction à intégrer n'a des singularités qu'aux points $\pm i$ (points de branchement) et que la courbe L a la forme indiquée sur la fig. 182, nous pouvons, sans changer la valeur de l'intégrale, remplacer L par la droite Re $p = a'' > 0$. Recourant à la formule d'inversion, nous en déduisons l'image de la fonction cylindrique

$$J_n(t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p^2+1}\,(p+\sqrt{p^2+1})^n} = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{7}$$

En particulier, pour la fonction cylindrique d'ordre zéro, nous avons :

$$J_0(t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{8}$$

Pour une classe importante d'images $F(p)$, on peut facilement obtenir le développement des originaux en série dont les termes correspondent aux points singuliers des images. On a notamment le théorème suivant :

XIII. Second théorème de développement. *Soit $F(p)$ une fonction* 1) *méromorphe et régulière dans le demi-plan* Re $p > s_0$; 2) *il existe un système de circonférences C_n :* $|p| = R_n$,

$R_1 < R_2 < \ldots$, $R_n \to \infty$, *sur lequel* $F(p)$ *tend vers zéro uniformément par rapport à* $\arg p$; 3) *pour tout* $a > s_0$, *l'intégrale* $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,dp$ *converge absolument. Alors la fonction*

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{Res}_{p_k} \{F(p)\, e^{pt}\}, \tag{9}$$

(*multipliée par* $\eta(t)$), *où la somme des résidus est étendue à tous les points singuliers* p_k *de la fonction* $F(p)$ *dans l'ordre de non-décroissance de leurs modules, est l'original de* $F(p)$.

En effet, avec nos conditions, le théorème 4 du n° 79 (*) peut être appliqué, et d'après ce dernier $F(p)$ est l'image de la fonction

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp. \tag{10}$$

Désignons par C_n' la partie de la circonférence C_n qui se trouve à gauche de la droite $\operatorname{Re} p = a$, par $a \pm ib_n$ les points d'intersection de C_n avec cette droite et par Γ_n le contour fermé formé du segment $(a - ib_n,\ a + ib_n)$ et de C_n' et parcouru dans le sens positif. Puisque, selon le lemme de Jordan, pour $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n'} e^{pt} F(p)\,dp = 0,$$

pour $t > 0$ on peut écrire

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} e^{pt} F(p)\,dp \tag{11}$$

au lieu de (10).

Appliquant le théorème de Cauchy sur les résidus, nous obtenons que

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{(\Gamma_n)} \operatorname{Res}_{p_k} \{F(p)\, e^{pt}\},$$

où l'on somme par rapport à tous les points singuliers de la fonction $F(p)$ qui se trouvent dans Γ_n, et c'est précisément le résultat que nous voulions établir.

C o r o l l a i r e. *Si la fonction* $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ *est une fonction rationnelle et si de plus le degré du polynôme du numérateur* $A(p)$ *est inférieur au degré du polynôme* $B(p)$, *son original est alors* (*après*

(*) Le fait que $F(p) \to 0$, lorsque $p \to \infty$, seulement sur un certain système de circonférences n'introduit pas de changements essentiels dans la démonstration de ce théorème.

multiplication par $\eta(t)$) *la fonction*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{F(p)(p-p_k)^{n_k} e^{pt}\}, \qquad (12)$$

où p_k *sont les pôles de* $F(p)$, n_k *leur ordre de multiplicité et la somme est étendue à tous les pôles.*

En effet, le fait que $F(p)$ soit une image découle immédiatement de la linéarité de la transformation de Laplace et des formules (11) du n° 80 en vertu du théorème de la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples (cf. n° 71). La validité des formules (11) découle du lemme de Jordan que l'on peut ici appliquer, car $F(p) \to 0$ lorsque $p \to \infty$. C'est pour cette raison que la formule (9), dans laquelle la série est remplacée par une somme finie, est vraie. Il ne reste plus qu'à utiliser la formule (n° 23) donnée pour calculer les résidus aux pôles et nous en déduisons la formule (12).

En particulier, *si tous les pôles de* $F(p)$ *sont simples, alors la formule* (12) *se simplifie*:

$$\frac{A(p)}{B(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{l} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \qquad (13)$$

(nous avons appliqué la formule de calcul des résidus aux pôles simples; le facteur $\eta(t)$ du second membre est omis conformément à ce que nous avons convenu).

Dans les applications (principalement en électrotechnique) une variante de cette formule est importante: il s'agit du cas où l'image est de la forme $F(p) = \frac{A(p)}{pB(p)}$, où le degré de $A(p)$ n'est pas supérieur au degré de $B(p)$ et $B(p)$ a des racines simples non nulles. Dans ce cas au lieu de (13) nous avons évidemment:

$$\frac{A(p)}{pB(p)} \doteqdot \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^{l} \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t}, \qquad (14)$$

où la somme est étendue à toutes les racines de $B(p)$.

Remarque 1. Si le polynôme $B(p)$ a des coefficients réels, alors à chaque racine complexe p correspond la racine complexe conjuguée $\bar{p}$. En effet,

$$B(\bar{p}) = a_0(\bar{p})^n + a_1(\bar{p})^{n-1} + \ldots + a_n =$$

$$= \overline{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} = \overline{B(p)} = 0.$$

Si, de plus, le polynôme $A(p)$ a des coefficients réels, alors

$$\frac{A(\bar{p})}{B'(\bar{p})} e^{\bar{p}t} = \overline{\frac{A(p)}{B'(p)} e^{pt}}$$

et, par conséquent, la somme des expressions $\frac{A(p)}{B'(p)}\,e^{pt}$ calculées pour les racines $p = p_k$ et $p = \bar{p}_k$ est égale à $2\,\mathrm{Re}\,\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_k t}$. Ainsi, *si les polynômes $A(p)$ et $B(p)$ ont des coefficients réels, alors la formule* (13) *peut être mise sous la forme*

$$\frac{A(p)}{B(p)} \doteqdot \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_k t} + 2\,\mathrm{Re} \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_k t}, \tag{15}$$

où la première somme est étendue à toutes les racines réelles de $B(p)$ et la seconde à toutes les racines complexes à parties imaginaires positives.

Remarque 2. Chaque terme de la formule (13) correspondant à la racine $p_k = s_k + i\sigma_k$ peut être représenté comme une oscillation sous forme complexe

$$\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{s_k t}\{\cos \sigma_k t + i \sin \sigma_k t\}.$$

Il est donc clair qu'aux racines réelles ($\sigma_k = 0$) correspondent des oscillations apériodiques, aux racines complexes à parties réelles négatives s_k des oscillations amorties, aux racines imaginaires pures ($s_k = 0$) des oscillations harmoniques. Les racines réelles positives ou les racines complexes à parties réelles positives ne peuvent en général exister si le système considéré n'admet pas d'oscillations d'amplitude indéfiniment croissante.

Pour ces systèmes, il est facile d'écrire l'*oscillation qui correspond au régime permanent*

$$f(t) = 2\,\mathrm{Re} \sum \frac{A(i\sigma_k)}{B'(i\sigma_k)}\,e^{i\sigma_k t}, \tag{16}$$

où la somme est étendue à toutes les racines imaginaires pures $p_k = i\sigma_k$ à parties imaginaires positives (*). En effet, d'après notre supposition, les parties réelles de toutes les racines sont non positives, $s_k \leqslant 0$, et les amplitudes des oscillations qui correspondent à des s_k négatives tendent vers zéro suivant une loi exponentielle et ne participent pas dans le régime permanent.

Des exemples d'application des théorèmes de développement sont donnés aux numéros suivants.

83. Exemples. Compléments. Nous donnons ici plusieurs relations et théorèmes utiles lorsqu'on se sert de la méthode opérationnelle.

1) Relations limites. *Si $f(t)$ et sa dérivée $f'(t)$* (**) *sont des originaux et $F(p) \doteqdot f(t)$, alors*

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0), \tag{1}$$

(*) Dans (16) participe encore le terme constant $\frac{A(0)}{B'(0)}$ si $B(0) = 0$.

(**) Cette condition n'est imposée que pour simplifier la démonstration, toutefois elle n'est pas très restrictive et en pratique elle est d'ordinaire satisfaite

où $p \to \infty$ *dans l'angle* $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ *et* $f(0) = \lim\limits_{t \to +0} f(t)$; *si de plus* $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ *existe et est égale à* $f(\infty)$, *alors*

$$\lim_{p \to 0} pF(p) = f(\infty), \tag{2}$$

où $p \to 0$ *dans le même angle.*

En effet, la relation (1) découle directement de ce que $pF(p) - f(0)$ est l'image de $f'(t)$ et, d'après la remarque du n° 79, elle tend vers zéro lorsque $p \to \infty$, $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$. Pour démontrer la relation (2), remarquons que de l'existence de $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ découle que la fonction $f(t)$ est bornée. On peut donc prendre $s_0 = 0$ et $F(p)$ est définie dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > 0$. D'après la formule de la transformation de Laplace, pour tout p, $\operatorname{Re} p > 0$, nous obtenons:

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt = pF(p) - f(0).$$

Puisque l'intégrale $\int\limits_0^\infty f'(t)\, dt = f(\infty) - f(0)$ existe, l'intégrale du premier membre converge uniformément par rapport à p dans l'angle $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ $(\delta > 0)$. On peut donc passer à la limite, lorsque $p \to 0$, et nous avons:

$$\int_0^\infty f'(t)\, dt = \lim_{p \to 0} pF(p) - f(0),$$

ce qui est équivalent à (2).

Les relations (1) et (2) sont utiles pour la vérification des calculs effectués au moyen de la méthode opérationnelle. Par exemple, de (22) du n° 80 pour $\lambda > 0$, nous trouvons: $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-\lambda t} \sin \omega t = \lim\limits_{p \to 0} \frac{p\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2} = 0$; de (16): si $0 = \lim\limits_{p \to \infty} \operatorname{arcctg} p = 0$; de (18): $f(0) = \lim\limits_{p \to \infty} \frac{A}{2} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2}\right) = A$, etc.

2) Image des puissances fractionnaires. D'après la définition de la fonction gamma d'Euler, pour tout $a > -1$ nous avons:

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^a e^{-t}\, dt$$

(cf. exemple 8 du n° 74). Soit $p = re^{i\alpha}$ un nombre complexe quelconque du demi-plan de droite $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Introduisons dans cette dernière intégrale, à la place de t, la variable complexe d'intégration $q = \frac{t}{p}$, nous obtenons:

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_L q^a e^{-pq}\, dq,$$

où l'intégration est effectuée sur la demi-droite L: $\arg q = -\alpha$. Posons $q = Re^{i\varphi}$ sur l'arc C_R: $|q| = R$, $-\alpha < \arg q < 0$; nous avons alors:

$$\left| \int_{C_R} q^a e^{-pq}\, dq \right| \leqslant R^a \left| \int_{-\alpha}^{0} e^{-rR\cos(\alpha+\varphi)}\, R\, d\varphi \right|.$$

Puisqu'ici $\alpha + \varphi$ varie entre 0 et α, alors $\cos(\alpha + \varphi)$ reste supérieur à une constante positive. Donc l'intégrale prise le long de C_R tend vers zéro lorsque $R \to \infty$. Tenant compte encore de ce qu'il n'y a pas de points singuliers de la fonction à intégrer entre L et l'axe réel du plan des q, on peut remplacer l'intégrale relative à L par l'intégrale prise le long du demi-axe positif. Désignant de nouveau par t la variable d'intégration, nous obtenons:

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} = \int_0^\infty t^a e^{-pt}\, dt. \tag{3}$$

Pour $a \geqslant 0$, la fonction $f(t) = t^a$ (après multiplication par $\eta(t)$) est un original; par conséquent, la dernière équation est équivalente à la relation symbolique

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \doteq t^a. \tag{4}$$

La formule ainsi obtenue étend la relation (11) du n° 80 aux puissances positives quelconques (pour $a = n$ entier non négatif, $\Gamma(a+1) = n!$).

Pour $-1 < a < 0$ la fonction t^a croît indéfiniment lorsque $t \to 0$ et, par suite, ne satisfait pas aux conditions imposées à l'original. Cependant pour ces valeurs de a l'intégrale du second membre de (3) converge et cette formule reste encore vraie. C'est pourquoi, pour $-1 < a < 0$, on peut dire que la fonction t^a est un original « singulier » et la fonction $\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$ son image « singulière ».

En particulier, pour $a = -\frac{1}{2}$, nous avons:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

(nous avons posé $t=u^2$ et utilisé la valeur connue $\operatorname{erf}\infty = 1$ (n° 70)), et la formule (4) donne :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p}}. \tag{5}$$

3) Donnons plusieurs relations symboliques contenant $\sqrt{p}$, que l'on rencontre souvent dans les applications. On peut représenter l'image $\frac{1}{p+\sqrt{p}}$ sous la forme $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$, où $F(p)=\frac{1}{p+1} \doteq e^{-t}$. D'après la formule (11) du n° 81, nous avons donc :

$$\frac{1}{p+\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\left(\tau+\frac{\tau^2}{4t}\right)} d\tau.$$

Dégageons dans l'exposant de la fonction à intégrer un carré parfait $\tau+\frac{\tau^2}{4t}=\left(\sqrt{t}+\frac{\tau}{2\sqrt{t}}\right)^2 - t$ et remplaçons la variable τ par $x=\sqrt{t}+\frac{\tau}{2\sqrt{t}}$; nous obtenons :

$$\frac{1}{p+\sqrt{p}} \doteq \frac{e^t}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{t}+\frac{\tau}{2\sqrt{t}}\right)^2} d\tau = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Usant des notations adoptées (cf. (5) du n° 70), trouvons :

$$\frac{1}{p+\sqrt{p}} \doteq e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t}). \tag{6}$$

D'où, en utilisant encore une fois la formule (5), nous trouvons :

$$\frac{1}{1+\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{p+\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t}). \tag{7}$$

Nous avons ensuite :

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p} = \frac{p+\alpha}{p\sqrt{p+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} + \frac{\alpha}{p\sqrt{p+\alpha}}.$$

D'après le théorème de translation, nous trouvons de (5) :

$$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} \doteq e^{-\alpha t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \tag{5'}$$

puis, d'après le théorème de l'intégration de l'original,

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} \doteq \int_0^t e^{-\alpha\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\alpha t}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha t}) \tag{8}$$

(nous avons posé $\alpha\tau=x^2$). On a définitivement

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha t} + \sqrt{\alpha} \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha t}). \tag{9}$$

Enfin de la formule (8) du n° 82, à l'aide du théorème d'homothétie, nous trouvons :

$$J_0(i\beta t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p^2-\beta^2}}.$$

La fonction de Bessel $J_0(it)$ de la variable imaginaire pure est notée par le symbole spécial $I_0(t)$; usant de cette notation et remplaçant p par $p+\alpha$ dans la dernière formule, nous trouvons d'après le théorème de translation :

$$\frac{1}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\beta^2}} \doteqdot e^{-\alpha t} I_0(\beta t). \tag{10}$$

4) Images des intégrales de Fresnel. Nous avons de la définition même de ces intégrales (cf. n° 73, exemple 6) :

$$C(t) = \int_0^t \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}\, dt, \qquad S(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}\, dt.$$

Considérons l'intégrale $\int_0^t \frac{e^{it}}{\sqrt{2\pi t}}\, dt$ au lieu de ces dernières. D'après la formule (5) et le théorème de translation nous avons $e^{it}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{2(p-i)}}$, puis d'après le théorème de l'intégration de l'original

$$\int_0^t \frac{e^{it}}{\sqrt{2\pi t}}\, dt \doteqdot \frac{1}{p\sqrt{2(p-i)}}.$$

D'une manière analogue, nous trouvons :

$$\int_0^t \frac{e^{-it}}{\sqrt{2\pi t}}\, dt \doteqdot \frac{1}{p\sqrt{2(p+i)}}.$$

D'après la linéarité, nous en déduisons :

$$C(t) \doteqdot \frac{1}{2p\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{p+i}} + \frac{1}{\sqrt{p-i}}\right) = \frac{1}{2p}\,\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}} \tag{11}$$

et

$$S(t) \doteqdot \frac{1}{2pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}}\right) = \frac{1}{2p}\,\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{12}$$

5) A partir du théorème d'homothétie que l'on peut écrire sous la forme

$$F(\alpha p) = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-pt}\, dt,$$

par intégration par rapport à α de 0 à 1, nous obtenons :

$$\int_0^1 F(\alpha p)\, d\alpha = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\alpha}$$

(nous supposons que l'on peut intervertir l'ordre d'intégration). Cette égalité signifie que

$$\int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\alpha} \doteqdot \int_0^1 F(\alpha p)\, d\alpha.$$

Introduisons dans l'intégrale du premier membre la nouvelle variable $\tau = \frac{t}{\alpha}$ et posons $q = \alpha p$ dans celle du second membre ; nous en déduisons :

$$\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^p F(q)\, dq. \tag{13}$$

Donnons plusieurs exemples d'application de la formule (13). Avant tout, de la formule $\cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}$ nous obtenons l'image du cosinus intégral (cf. n° 70)

$$\operatorname{Ci} t = -\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^p \frac{q\, dq}{1+q^2} = \frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\,; \tag{14}$$

de la formule $e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p+1}$ nous obtenons :

$$-\operatorname{Ei}(-t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^p \frac{dq}{q+1} = \frac{1}{p}\ln(1+p) \tag{15}$$

(cf. (8) du n° 76) ; il vient de la formule $J_0(t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$:

$$\int_t^\infty \frac{J_0(t)}{t}\, dt \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{p}\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right). \tag{16}$$

Tous les originaux dans les formules (14)-(16) sont singuliers, car, lorsque $t \to 0$, les intégrales des premiers membres divergent.

Remarque. Il découle des théorèmes de l'intégration des originaux et des images

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_p^\infty F(q)\, dq.$$

Additionnant cette dernière formule et (13), nous avons :

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_0^\infty F(q)\, dq.$$

Les intégrales des premier et second membres de cette dernière relation sont des constantes, donc cette relation est de la forme $A \doteqdot \frac{B}{p}$. En la comparant

à la relation $1 \doteq \frac{1}{p}$, nous en déduisons que $A = B$ d'après le théorème d'unicité de la transformation de Laplace. Ainsi, nous sommes conduits à la relation

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau = \int_0^\infty F(q)\, dq. \tag{17}$$

6) Règle des exposants fractionnaires. Le premier théorème de développement (n° 82) s'étend aussi aux séries de puissances généralisées (cf. n° 25). Nous nous bornons à un cas simple mais important pour les applications.

Théorème. *Supposons que* $F(p) \to 0$, *lorsque* $p \to \infty$, $\operatorname{Re} p < a$ (*a est un nombre positif*) *et ne possède aucune singularité à distance finie dans le plan des p, excepté le point* $p = 0$ *qui est un point de branchement d'ordre fini. Alors, si le développement de* $F(p)$ *en série de puissances généralisée est de la forme*:

$$F(p) = p^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^{k\beta}, \tag{18}$$

où β *est rationnel et positif, l'original de* $F(p)$ *est la série*

$$f(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\alpha-k\beta)} \frac{1}{t^{k\beta}}, \tag{19}$$

(*multipliée par* $\eta(t)$) *dans laquelle les termes correspondant aux* $\alpha + k\beta$ *entiers non négatifs ne sont pas écrits.*

Considérons le contour fermé $C^*_{R,r}$ formé du segment $(a - ib,\ a + ib)$, des arcs C'_R et C''_R de la circonférence $|p| = R$, $\operatorname{Re} p < a$, des deux bords I et II de la coupure $-R < p < -r$ et de la circonférence c_r: $|p| = r$ (cf. fig. 181).

Puisque $F(p)$ est une fonction analytique et uniforme à l'intérieur de ce contour $\left(\text{pour fixer les idées nous supposons } -\frac{\pi}{2} < \arg p < \frac{\pi}{2}\right)$, d'après le théorème de Cauchy, l'intégrale prise le long du segment $(a - ib,\ a + ib)$ peut être remplacée par une intégrale prise le long de la partie restante du contour. Puisque, de plus, pour $t > 0$, d'après le lemme de Jordan, l'intégrale de $F(p)\, e^{pt}$ relative à $C'_R \cup C''_R$ tend vers zéro lorsque $R \to \infty$, la formule d'inversion peut être écrite sous la forme

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*_{R,r}} F(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*_r} F(p)\, e^{pt}\, dp,$$

où C^*_r est le contour formé par les deux bords de la coupure $-\infty < p < -r$ le long du demi-axe négatif des p et de la circonférence

$|p| = r$ (sans le point $p = -r$). Portant le développement (18) de $F(p)$ dans la dernière formule et intégrant terme à terme (*), nous trouvons :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^*} p^{\alpha+k\beta} e^{pt}\, dp \right\}.$$

Introduisons la nouvelle variable d'intégration $\zeta = pt$; puisque $t > 0$, ce changement de variable conserve la forme du contour et nous trouvons :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^*} p^{\alpha+k\beta} e^{pt}\, dp = \frac{1}{t^{\alpha+k\beta+1}} \int_{C_{rt}^*} \zeta^{\alpha+k\beta} e^{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{t^{\alpha+k\beta+1}} \frac{1}{\Gamma(-\alpha-k\beta)}$$

(cf. la représentation intégrale de Hankel de la fonction gamma, formule (15) du n° 74). Portant ce résultat dans la formule précédente, nous trouvons le développement (19) que nous voulions établir. Si $\alpha + k\beta$ est un nombre entier non négatif, alors l'intégrale de $p^{\alpha+k\beta} e^{pt}$ relative à C_r^* est nulle, il faut donc omettre dans notre développement tous les termes correspondant à de tels $\alpha + k\beta$ (**).

R e m a r q u e. Tout comme dans le premier théorème de développement, la série (19) s'obtient formellement par l'application terme à terme à la série (18) de la formule des images des puissances

$$p^a \doteq \frac{1}{\Gamma(-a)\, t^{a+1}}.$$

Certes, cette formule n'a été démontrée que pour les a négatifs, pour les $a > 0$ elle revêt un caractère conventionnel. Remarquons de plus que la somme de la série (19) ne satisfait en général pas à la condition 3°, et, par conséquent, elle est un original singulier.

E x e m p l e. Soit

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\, e^{(i-1)\sqrt{p}}.$$

Posons $p = Re^{i\varphi}$; $i - 1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$; pour Re $p < 0$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, nous avons Re $(i-1)\sqrt{p} = \sqrt{2R} \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) < 0$, car alors

(*) Pour être rigoureux, la possibilité d'intégrer terme à terme la série le long d'une droite *infinie* exige des conditions complémentaires. Il suffit par exemple d'exiger la convergence de l'intégrale de la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\, |p|^{k\beta}$ prise le long de C_r^* (cf. [7] de la bibliographie du chapitre VII).

(**) Cela découle également de ce que la fonction entière $\frac{1}{\Gamma(z)}$ a des zéros aux points $z = 0, -1, -2, \ldots$ (cf. n° 89).

$\pi < \frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$. En outre, pour les grands Im p et $0 < \operatorname{Re} p < a$, nous avons $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$; donc $(i-1)\sqrt{p} \approx -\sqrt{2R}$ ou $-i\sqrt{2R}$. Il en découle que $F(p) \to 0$ lorsque $p \to \infty$ et $\operatorname{Re} p < a$, c'est-à-dire que $F(p)$ satisfait aux conditions de la règle des exposants fractionnaires. Nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{(i-1)\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\sqrt{2p}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} e^{\frac{3k\pi}{4} i} p^{\frac{k-1}{2}}.$$

Passant formellement aux originaux et ne conservant que les termes pour lesquels $\frac{k-1}{2}$ n'est pas un nombre entier, c'est-à-dire les termes d'indice paire $k = 2n$, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\sqrt{p}(i-1)} \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(2n)!} 2^n \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) t^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Nous montrerons (cf. formule (19) du n° 89) que

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} ;$$

tenant compte de cette formule et de $(2n)! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, 2^n n!$, nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{(i-1)\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2t}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{\frac{i}{2t}}$$

ou encore

$$\frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \cos\sqrt{p} + i \frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \sin\sqrt{p} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos\frac{1}{2t} + i \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin\frac{1}{2t}.$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos\frac{1}{2t} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \cos\sqrt{p}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin\frac{1}{2t} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin\sqrt{p}. \quad (20)$$

7) Fonctions impulsion. Si la fonction $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ est déjà une image singulière, alors les fonctions $F(p) = 1, p, p^2, \ldots$, qui ne tendent pas vers zéro lorsque $p \to \infty$, ne peuvent être considérées comme des images que dans un sens conventionnel. Ces images conventionnelles et leurs originaux, appelés fonctions impulsion, ont été introduits par *Dirac* et s'avèrent utiles dans des problèmes appliqués où l'on a affaire à des actions instantanées.

Considérons la fonction $\delta_h(t)$ dont le graphique est donné sur la fig. 183

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0,\ t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h. \end{cases}$$

Elle représente une quantité qui n'agit que sur l'intervalle $(0, h)$ où elle a la valeur constante $\frac{1}{h}$; son effet total est égal à

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\, dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = 1.$$

Supposons maintenant que $h \to 0$; il est clair que la famille de fonctions $\delta_h(t)$ diverge, mais nous introduisons une fonction *conventionnelle* $\delta(t)$ qui est la limite de cette famille

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t)$$

et que nous appelons *fonction impulsion d'ordre zéro* ou encore *fonction impulsion de Dirac*. La fonction impulsion $\delta(t)$ est partout nulle, excepté au point $t = 0$ en lequel elle est égale à ∞, et malgré tout on la suppose vérifier la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1,$$

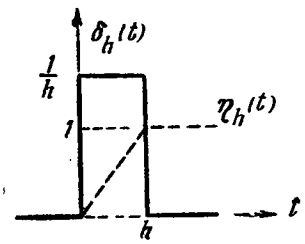

FIG. 183

limite des relations analogues portant sur les fonctions $\delta_h(t)$.

Ainsi, la fonction impulsion de Dirac représente une notation conventionnelle d'un processus limite bien défini que l'on rencontre fréquemment en physique : une quantité infiniment grande qui agit dans un intervalle infiniment petit et dont l'effet total est égal à l'unité. L'introduction de cette fonction simplifie énormément les calculs liés à un pareil processus limite : au lieu d'effectuer les calculs avant le passage à la limite et de passer à la limite dans le résultat final, on passe directement à la limite avant les calculs. Dans la plupart des problèmes de physique, la légitimité d'une telle interversion est entièrement justifiée.

Nous convenons de considérer que l'image de la fonction impulsion de Dirac s'obtient comme la limite de l'image de la fonction $\delta_h(t) = \frac{1}{h}[\eta(t) - \eta(t-h)]$ qui, d'après le théorème de retardement, est égale à

$$\delta_h(t) \doteqdot \frac{1 - e^{-ph}}{ph}.$$

Passant ici à la limite lorsque $h \to 0$ nous obtenons (conventionnellement) :

$$\delta(t) \doteqdot \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1. \qquad (21)$$

La relation (21) est encore « justifiée » par les considérations suivantes. On a représenté en pointillé sur la fig. 183 le graphique de l'intégrale de la fonction $\delta_h(t)$

$$\eta_h(t) = \int_0^t \delta_h(t)\, dt.$$

On voit que, lorsque $h \to 0$, $\eta_h(t)$ tend vers l'échelon unité $\eta(t)$, ce qui nous permet de poser

$$\int_0^t \delta(t)\, dt = \eta(t).$$

Mais alors $\delta(t) = \eta'(t)$, et puisque $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$, d'après le théorème de dérivation des originaux, nous obtenons de nouveau $\delta(t) \doteqdot p\,\frac{1}{p} = 1$ (nous prenons égale à zéro la valeur de l'original, pour $t = 0$, qui figure dans ce théorème parce qu'elle s'obtient des valeurs $\eta_h(0) = 0$, par un passage à la limite, lorsque $h \to 0$; l'application formelle du théorème mentionné, où nous devons poser $\eta(0) = \lim_{t \to +0} \eta(t) = 1$, conduit à un résultat faux. Il n'y a rien d'étonnant en cela, car en fait nous appliquons le théorème à un cas où ses conditions ne sont pas vérifiées).

Puis, pour toute fonction $\varphi(t)$ qui vérifie la condition 1° du n° 79, nous avons, d'après le théorème de la moyenne :

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, \delta_h(t)\, dt = \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t)\, dt = \varphi(t^*),$$

où $0 < t^* < h$. Passant ici à la limite lorsque $h \to 0$, nous posons par définition

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, \delta(t)\, dt = \varphi(0) \tag{22}$$

(si la fonction $\varphi(t)$ est discontinue pour $t = 0$, alors $\varphi(0)$ est sa valeur limite à droite).

Conformément à ceci nous obtenons de nouveau :

$$\delta(t) \doteqdot \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-pt}\, dt = 1.$$

Les principales règles de la méthode opérationnelle s'étendent à la fonction impulsion de Dirac, par exemple le théorème de retardement donne

$$\delta(t - \tau) \doteqdot e^{-p\tau}$$

(ce qui est compatible avec la relation (22) d'après laquelle $\int_0^\infty \delta(t-\tau)\, e^{-pt}\, dt = e^{-p\tau}$), et le théorème de multiplication

$$1 \cdot F(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = f(t)$$

(ce qui est également vrai).

On introduit d'une façon analogue les fonctions impulsion d'ordres supérieurs. Considérons par exemple la fonction $\delta_h^{(1)}(t) = \frac{1}{h^2}[\eta(t) - 2\eta(t-h) + \eta(t-2h)]$ (fig. 184); sa «limite», lorsque $h \to 0$,

$$\delta_1(t) = \lim_{h\to 0} \delta_h^{(1)}(t)$$

est appelée *fonction impulsion du premier ordre*. Nous considérons que son image est la limite des images de $\delta_h^{(1)}(t) \doteqdot \frac{1-2e^{-hp}+e^{-2hp}}{h^2 p}$, c'est-à-dire

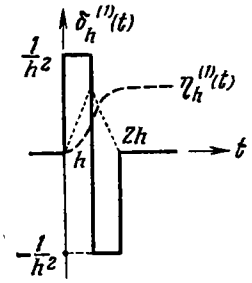

FIG. 184

$$\delta_1(t) \doteqdot \lim_{h\to 0} \frac{1-2e^{-hp}+e^{-2hp}}{h^2 p} = p. \qquad (23)$$

On a représenté en tirets sur la fig. 184 le graphique de l'intégrale répétée de la fonction $\delta_h^{(1)}(t)$

$$\eta_h^{(1)}(t) = \int_0^t dt \int_0^t \delta_h^{(1)}(t)\, dt;$$

on voit que $\eta_h^{(1)}(t)$, lorsque $h \to 0$, tend vers l'échelon unité $\eta(t)$. Nous posons par définition

$$\int_0^t dt \int_0^t \delta_1(t)\, dt = \eta(t), \quad \delta_1(t) = \eta''(t)$$

et alors, conformément à (23), nous avons $\delta_1(t) \doteqdot p^2 \cdot \frac{1}{p} = p$.

Exactement de la même façon on peut considérer l'«original» de la puissance p^n, dit *fonction impulsion du n-ième ordre*

$$\delta_n(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\eta(t), \quad \delta_n(t) \doteqdot p^n. \qquad (24)$$

Des exemples d'application des fonctions impulsion seront donnés plus loin.

Ces dernières années, les fonctions impulsion ont reçu une argumentation rigoureuse au moyen de la théorie des distributions que

Dictionnaire d'images (*)

n°	Original	Image
1 (83.4)	$t^a\ (a > -1)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
2 (80.1)	$e^{-\lambda t}$	$\dfrac{1}{p+\lambda}$
3	$e^{-\lambda t} t^a$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$
4 (80.3)	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5 (80.4)	$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
6 (80.12)	$t^n \sin \omega t$	$n\,!\,\dfrac{\mathrm{Im}\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
7 (80.12)	$t^n \cos \omega t$	$n\,!\,\dfrac{\mathrm{Re}\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
8 (80.22)	$e^{-\lambda t} \sin(\omega t+\alpha)$	$\dfrac{\omega \cos\alpha + (p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
9 (80.22)	$e^{-\lambda t} \cos(\omega t+\alpha)$	$\dfrac{(p+\lambda)\cos\alpha - \omega \sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
10 (80.4)	$\mathrm{sh}\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
11 (80.4)	$\mathrm{ch}\ \omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
12 (80.15)	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln \dfrac{p-a}{p-b}$
13 (83.5′)	$\dfrac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$

(*) On donne entre parenthèses le numéro et le numéro d'ordre de la formule ; Γ est la fonction gamma (n^{os} 74, 89); erf et erfc les fonctions d'erreur (n° 70); si, Si, Ci et Ei les fonctions intégrales (n^{os} 70 et 76); S et C les intégrales de Fresnel (n° 83); J_n, I_n, Y_n, $H_n^{(i)}$, ber, bei les fonctions cylindriques (n° 96).

Suite

n°	Original	Image
14	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2\alpha\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{\alpha^2}{p}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{p}}\right)$
15	$e^{-\alpha^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4\alpha^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)$
16 (81.10)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
17	$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \sin 2\sqrt{\alpha t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha}{p}}$
18	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{\alpha t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha}{p}}$
19 (83.20)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin\sqrt{p}$
20 (83.20)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \cos\sqrt{p}$
21	$\sqrt{\frac{1}{\pi t}} \sin\omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}-p}{p^2+\omega^2}}$
22	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}+p}{p^2+\omega^2}}$
23	$\frac{1}{1\pm t}$	$\mp e^{\pm p} \operatorname{Ei}(\mp p)$
24	$\frac{1}{1+t^2}$	$\sin p \operatorname{Ci} p - \cos p \operatorname{Si} p$
25	$\frac{1}{\sqrt{1+t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}} e^p \operatorname{erfc}\sqrt{p}$
26	$\frac{1}{t}\ln(1+t^2)$	$\operatorname{Ci}^2 p + \operatorname{Si}^2 p$
27	$\frac{1}{t}\ln(1-t^2)$	$\operatorname{Ei} p \operatorname{Ei}(-p)$
28 (82.7)	$J_n(t)\ (n>-1)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
29	$\frac{J_n(\alpha t)}{t}\ (n>0)$	$\frac{1}{n\alpha^n}(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^n$

Suite

n°	Original	Image
30	$e^{-\alpha t} I_0(\beta t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\beta^2}}$
31	$\lambda^n e^{-\lambda t} I_n(\lambda t) \quad (n>-1)$	$\dfrac{(p+\lambda-\sqrt{p^2+2p\lambda})^n}{\sqrt{p^2+2p\lambda}}$
32	$t^n J_n(t) \quad \left(n>-\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{2^n}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$
33 (82.3)	$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \quad (n>-1)$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}\,e^{-\frac{1}{2p}}$
34	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,J_{2n}(2\sqrt{t})$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{2p}} I_n\left(\dfrac{1}{2p}\right)$
35 (83.10)	$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})\,\eta(t-\tau)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}\,e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}$
36	$\dfrac{J_1(a\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\,\eta(t-\tau)$	$\dfrac{e^{-\tau p}-e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}}{a\tau}$
37	$Y_0(t)$	$-\dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\ln(p+\sqrt{p^2+1})}{\sqrt{p^2+1}}$
38	$H_0^{(1,2)}(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}} \mp \dfrac{2i}{\pi}\,\dfrac{\ln(p+\sqrt{p^2+1})}{\sqrt{p^2+1}}$
39	$\sqrt{2}\,\mathrm{ber}\,\omega t$	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^4+\omega^4}+p^2}{p^4+\omega^4}}$
40	$\sqrt{2}\,\mathrm{bei}\,\omega t$	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^4+\omega^4}-p^2}{p^4+\omega^4}}$
41 (83.8)	$\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha t})$	$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{p\sqrt{p+\alpha}}$
42 (81.13)	$\mathrm{erfc}\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{p}\,e^{-\alpha\sqrt{p}}$
43 (83.6)	$e^t\,\mathrm{erfc}(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p+\sqrt{p}}$
44 (83.7)	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t\,\mathrm{erfc}(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{1+\sqrt{p}}$

Suite

n°	Original	Image
45 (83.9)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha t} + \sqrt{\alpha}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{\alpha t})$	$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p}$
46 (80.16)	$\mathrm{si}\ t$	$\frac{\mathrm{arcctg}\ p}{p}$
47 (83.14)	$\mathrm{Ci}\ t$	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
48 (83.12)	$S(t)$	$\frac{1}{2p} \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}}$
49 (83.11)	$C(t)$	$\frac{1}{2p} \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}}$
50 (83.15)	$-\mathrm{Ei}\,(-t)$	$\frac{1}{p} \ln (1+p)$

nous devons à *S. Sobolev* et à *L. Schwartz*. Dans ses traits généraux, l'introduction des distributions se ramène à compléter l'ensemble des fonctions ordinaires par des éléments idéaux, à savoir par les limites de certaines suites de fonctions ordinaires divergentes au sens claissique. Cette idée est assez fréquemment employée en mathématiques lors de la construction de diverses généralisations (par exemple, les nombres irrationnels sont introduits comme les éléments idéaux définis par certaines suites de nombres rationnels). L'introduction des distributions, comme cela a lieu lors de généralisations raisonnables, a beaucoup simplifié de nombreuses questions d'analyse. On peut prendre connaissance des idées fondamentales de la théorie des distributions en consultant la brochure de *J. Mikusinski* et *R. Sikorski* (« The elementary theory of distributions », PWN, Warszawa 1957). Le lecteur trouvera un exposé plus fondamental dans le livre de *I. Guelfand* et *G. Chilov* « Les distributions » (Dunod, 1965).

Nous donnons le Dictionnaire de toutes les relations opérationnelles obtenues et de certaines relations qui peuvent s'obtenir par des méthodes analogues. Le lecteur peut trouver le Formulaire de relations opérationnelles chez V. Ditkine et P. Kouznétsov [11].

§ 2. APPLICATIONS

Nous considérons ici les applications de la méthode opérationnelle à la résolution de problèmes liés aux équations différentielles linéaires. Certaines applications de la méthode opérationnelle aux fonctions spéciales sont données dans le chapitre suivant.

84. Equations et systèmes d'équations différentielles ordinaires. La méthode opérationnelle s'applique d'une façon particulièrement simple à la résolution des équations et des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Soient données une équation différentielle

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \qquad (1)$$

et les conditions initiales

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \qquad (2)$$

Nous supposons que $a_0 \neq 0$ et que la fonction $f(t)$ et la solution $x(t)$ avec ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont des originaux; posons $X(p) \doteqdot x(t)$, $F(p) \doteqdot f(t)$.

D'après la règle de dérivation et la linéarité, nous avons à la place de l'équation différentielle (1) avec ses données initiales (2) l'*équation opérationnelle*

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) X(p) = F(p) + x_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + x_1 (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + x_{n-1} a_0,$$

ou

$$A(p) X(p) = F(p) + B(p), \qquad (3)$$

où $A(p)$ et $B(p)$ sont des polynômes connus. Résolvant cette équation, nous trouvons la *solution opérationnelle*:

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \qquad (4)$$

Si l'équation (1) avec les données initiales (2) admet une solution $x(t)$ qui satisfait aux conditions imposées aux originaux (on pourrait démontrer qu'une telle solution existe toujours pour les conditions adoptées), alors cette solution est l'original de $X(p)$.

Donnons quelques exemples de résolution des équations par cette méthode.

1) $x'' + a^2 x = b \sin at$ avec les données initiales générales. L'équation opérationnelle est:

$$(p^2 + a^2) X = \frac{ab}{p^2 + a^2} + x_0 p + x_1$$

et sa solution (*) :

$$X(p)=\frac{ab}{(p^2+a^2)^2}+x_0\frac{p}{p^2+a^2}+\frac{x_1}{p^2+a^2}. \tag{5}$$

Les originaux des deuxième et troisième termes du second membre de (5) sont donnés dans le Dictionnaire. On trouve l'original du premier terme du second membre de (5) d'après la formule 6 du Dictionnaire et le théorème de l'intégration des originaux

$$\frac{ab}{(p^2+a^2)^2}\doteq\frac{b}{2}\int_0^t t\sin at\,dt=\frac{b}{2a^2}(\sin at-at\cos at);$$

on aurait pu également utiliser le théorème de développement. On a enfin

$$x(t)=\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)\frac{\sin at}{a}+\left(x_0-\frac{bt}{2a}\right)\cos at. \tag{6}$$

2) $x'''+3x''+3x'+x=1$ avec les données initiales nulles. L'équation opérationnelle est :

$$(p+1)^3X=\frac{1}{p},$$

et sa solution :

$$X(p)=\frac{1}{p(p+1)^3}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{(p+1)^3}.$$

Nous trouvons l'original d'après les formules 1 et 3 du Dictionnaire :

$$x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{t^2}{2}e^{-t}. \tag{7}$$

3) $x'''+x=1$ avec les données initiales nulles. La solution opérationnelle est :

$$X(p)=\frac{1}{p(p^3+1)}.$$

Nous trouvons l'original à l'aide du second théorème de développement :

$$x(t)=1-\frac{1}{3}e^{-t}+2\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}}{-3}=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}. \tag{8}$$

4) $x^{IV}+2x''+x=\sin t$ avec les données initiales nulles. La solution opérationnelle est :

$$X(p)=\frac{1}{(p^2+1)^3}.$$

Nous trouvons l'original en calculant le résidu de la fonction $X(p)\,e^{pt}$ au point singulier $p=i$:

$$x(t)=\mathrm{Re}\,\frac{d^2}{dp^2}\left[\left\{\frac{e^{pt}}{(p+i)^3}\right\}\right]_{p=i}=\frac{1}{8}(3-t^2)\sin t-\frac{3}{8}t\cos t. \tag{9}$$

5) $x''+\omega^2x=a[\eta(t)-\eta(t-b)]$ avec les données initiales nulles. Nous trouvons l'équation opérationnelle à l'aide du théorème de retardement ;

(*) Nous avons $\lim_{p\to\infty} pX=x_0$ d'après la condition initiale (cf. la relation limite (1) du n° 83). On peut effectuer une vérification analogue pour les autres exemples.

sa solution est :

$$X(p)=\frac{a(1-e^{-bp})}{p(p^2+\omega^2)}.$$

D'après le second théorème de développement

$$\frac{a}{p(p^2+\omega^2)} \doteq \frac{a}{\omega^2}-\frac{a}{\omega^2}\cos\omega t=\frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}.$$

D'après le théorème de retardement

$$\frac{ae^{-bp}}{p(p^2+\omega^2)} \doteq \frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\eta(t-b).$$

On a enfin

$$x(t)=\frac{2a}{\omega^2}\left[\sin^2\frac{\omega t}{2}\eta(t)-\sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\eta(t-b)\right]. \qquad (10)$$

Le graphique de la solution est donné sur la fig. 185.

6) Une masse ponctuelle m est soumise à des oscillations rectilignes; nous négligeons la résistance du milieu, et la force de rappel $m\omega^2 x$ est proportionnelle au déplacement. Aux instants $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ la masse

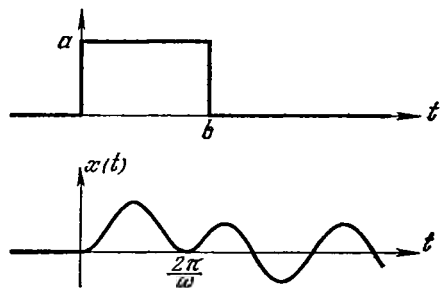

FIG. 185

reçoit des impulsions de grandeur a. Trouver le mouvement de la particule si l'écart initial et la vitesse initiale sont nuls.

L'équation du mouvement est de la forme :

$$mx''+m\omega^2 x=a\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k\tau),$$

où $\delta(t)$ est la fonction impulsion. La solution de l'équation opérationnelle

$$X(p)=\frac{a}{m}\frac{1}{p^2+\omega^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau p}=\frac{a}{m}\frac{1}{(p^2+\omega^2)(1-e^{-\tau p})}$$

satisfait aux conditions du second théorème de développement. D'après ce théorème, l'original est la somme des résidus de la fonction $X(p)\,e^{pt}$ aux pôles : $p = 0$, $p = \pm i\omega$ et $p_k = \frac{2k\pi i}{\tau}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Si τ n'est pas un multiple entier de $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, ce que nous supposons, alors tous les pôles sont simples

et, calculant les résidus, nous obtenons définitivement:

$$x(t)=\frac{a}{m\omega^2}\left\{\frac{1}{\tau}-\frac{\omega}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\cos\omega\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\tau}{\tau^2-k^2\tau_1^2}\cos k\frac{\tau_1}{\tau}\,\omega t\right\}. \qquad (11)$$

Notons tout particulièrement le rôle de l'intégrale de Duhamel (n° 81). Supposons que l'on ait à résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$L[x]=f(t) \qquad (12)$$

avec les conditions initiales *nulles*. Si l'on connaît une solution $x_1(t)$ de l'équation

$$L[x]=1 \qquad (13)$$

de même premier membre et de second membre égal à l'unité, avec les conditions initiales nulles, alors l'intégrale de Duhamel permet d'écrire la solution de l'équation (12) sans avoir à effectuer des calculs.

En effet, les équations opérationnelles qui correspondent aux équations (12) et (13) sont de la forme

$$A(p)\,X(p)=F(p),\quad A(p)\,X_1(p)=\frac{1}{p},$$

où $F(p)$ est l'image de $f(t)$, d'où

$$X(p)=pX_1(p)\,F(p).$$

Ainsi, d'après la formule de Duhamel

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau \qquad (14)$$

(nous tenons compte de ce que $x_1(0)=0$ conformément aux conditions initiales) ou

$$x(t)=x_1(t)\,f(0)+\int_0^t x_1(\tau)\,f'(t-\tau)\,d\tau. \qquad (15)$$

Exemple. Considérons l'équation $x''-a^2x=be^{-t^2}$ avec les conditions initiales nulles. Trouvons d'abord la solution de l'équation $x''-a^2x=1$ pour les mêmes conditions initiales

$$X_1=\frac{1}{p(p^2-a^2)}\doteq\frac{1}{a}\int_0^t \operatorname{sh} at\,dt=\frac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at-1)$$

(nous avons eu recours à la formule 10 du Dictionnaire et au théorème de l'intégration de l'original). Nous trouvons la solution à l'aide de la formule (14)

$$x(t)=\frac{b}{a}\int_0^t e^{-\tau^2}\operatorname{sh} a(t-\tau)\,d\tau,$$

qui après de simples transformations s'exprime au moyen de la fonction erf:

$$x(t)=\frac{b\sqrt{\pi}}{4a}e^{\frac{a^2}{4}}\left\{e^{at}\operatorname{erf}\left(t+\frac{a}{2}\right)-e^{-at}\operatorname{erf}\left(t-\frac{a}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-2\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{ch} at\right\}. \qquad (16)$$

D'une façon entièrement analogue, la méthode opérationnelle s'applique à la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Soit à résoudre un système à n équations différentielles du second ordre

$$L_\nu=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\nu k}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{\nu k}\frac{dx_k}{dt}+c_{\nu k}x_k\right)=f_\nu(t)\quad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (17)$$

avec les conditions initiales

$$x_k(0)=\alpha_k,\qquad \frac{dx_k(0)}{dt}=\beta_k. \qquad (18)$$

Si l'on suppose que $x_k(t)$ et $f_\nu(t)$ sont des originaux et si l'on désigne par $X_k(p)$ et $F_\nu(p)$ leurs images, alors le système (17) avec les conditions initiales (18) est remplacé par le *système opérationnel*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{\nu k}p^2+b_{\nu k}p+c_{\nu k})X_k(p)=$$
$$=F_\nu(p)+\sum_{k=1}^{n}[(a_{\nu k}p+b_{\nu k})\alpha_k+a_{\nu k}\beta_k]. \qquad (19)$$

En le résolvant comme un système d'équations linéaires algébriques, nous trouvons $X_k(p)$, puis leurs originaux $x_k(t)$. Donnons plusieurs exemples.

1) Soit à résoudre le système

$$(2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0,$$
$$(2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0$$

avec les conditions initiales $x(0)=x'(0)=1$, $y(0)=y'(0)=0$. Passons au système opérationnel

$$(2p^2-p+9)X-(p^2+p+3)Y=2p+1,$$
$$(2p^2+p+7)X-(p^2-p+5)Y=2p+3$$

et pour simplifier prenons la somme et la différence de ses équations; il vient

$$2X-Y=2\frac{p+1}{p^2+4}, \quad X+Y=\frac{1}{p-1}.$$

D'où

$$X=\frac{1}{3}\frac{1}{p-1}+\frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{3}\frac{1}{p^2+4},$$
$$Y=\frac{2}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4}-\frac{2}{3}\frac{1}{p^2+4}.$$

Passant aux originaux, nous trouvons :

$$x=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t),$$
$$y=\frac{1}{3}(2e^t-2\cos 2t-\sin 2t). \tag{20}$$

2) Soit donné le système

$$x''-x+y+z=0,$$
$$x+y''-y+z=0,$$
$$x+y+z''-z=0$$

avec les conditions initiales $x(0)=1$, $y(0)=z(0)=x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$. Le système opérationnel est de la forme

$$(p^2-1)X+Y+Z=p,$$
$$X+(p^2-1)Y+Z=0,$$
$$X+Y+(p^2-1)Z=0.$$

On peut facilement trouver sa solution à l'aide des déterminants

$$X=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)},$$
$$Y=Z=-\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}.$$

On trouve les originaux d'après le second théorème de développement

$$x=\frac{2}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2})+\frac{1}{3}\cos t,$$
$$y=z=-\frac{1}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2})+\frac{1}{3}\cos t. \tag{21}$$

3) Soit donné le système d'équations

$$x_0'=-ax_0, \quad x_k'+ax_k=ax_{k-1} \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

avec les conditions initiales $x_0(0)=1$, $x_1(0)=\ldots=x_n(0)=0$. Le système opérationnel a la forme :

$$(p+a)X_0=1, \quad (p+a)X_k-aX_{k-1}=0,$$

d'où

$$X_k=\frac{a^k}{(p+a)^{k+1}} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Nous trouvons les originaux à l'aide de la formule 3 du Dictionnaire

$$x_k(t) = \frac{1}{k!}(at)^k e^{-at}. \tag{22}$$

4) Trois masses ponctuelles identiques m sont fixées à une corde de façon que la distance entre les masses et la distance des masses extrêmes jusqu'aux extrémités fixes de la corde soient égales à l. A l'instant initial toutes les masses se trouvent à l'état d'équilibre, et on communique une impulsion v_0 à la masse intermédiaire. Déterminer le mouvement du système.

Il est très facile de trouver les équations différentielles du mouvement de ce système à l'aide des équations de Lagrange qui pour de petites oscillations libres sont de la forme (cf. [8]):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0,$$

où T est l'énergie cinétique, Π l'énergie potentielle du système, q_k les coordonnées généralisées et le point au-dessus des coordonnées généralisées indique que la dérivation se fait par rapport au temps.

Si dans notre cas nous désignons par $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ les écarts des masses par rapport à leur position d'équilibre, alors nous avons:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2),$$

$$\Pi = \frac{P}{l}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3),$$

où P est la tension de la corde. Par conséquent, les équations du mouvement sont de la forme:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \lambda(2x_1 - x_2) = 0,\\ &\ddot{x}_2 + \lambda(2x_2 - x_1 - x_3) = 0,\\ &\ddot{x}_3 + \lambda(2x_3 - x) = 0, \end{aligned}$$

où $\lambda = \frac{P}{ml}$. Tenant compte des conditions initiales $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_3(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = v_0$, nous trouvons les équations opérationnelles

$$\begin{aligned} (p^2 + 2\lambda)X_1 - \lambda X_2 &= 0,\\ -\lambda X_1 + (p^2 + 2\lambda)X_2 - \lambda X_3 &= v_0,\\ -\lambda X_2 + (p^2 + 2\lambda)X_3 &= 0. \end{aligned}$$

Résolvant ce système, nous trouvons:

$$X_2 = \frac{p^2 + 2\lambda}{(p^2 + 2\lambda)^2 - 2\lambda^2} v_0, \quad X_1 = X_3 = \frac{\lambda}{(p^2 + 2\lambda)^2 - 2\lambda^2} v_0.$$

Appliquant le second théorème de développement nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) = x_3(t) &= -\frac{v_0}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2}\right),\\ x_2(t) &= \frac{v_0}{2}\left(\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

où $\omega_1 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\lambda}$, $\omega_2 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\lambda}$.

La méthode opérationnelle peut également s'avérer utile pour la résolution de certaines équations différentielles linéaires à coefficients variables. Soit $x(t) \doteqdot X(p)$; d'après les théorèmes de la dérivation des originaux et des images nous avons :

$$\begin{gathered} x \doteqdot X,\ tx \doteqdot -X',\ t^2x \doteqdot X'',\ \ldots, \\ x' \doteqdot pX - x(0),\quad tx' \doteqdot -(pX)',\quad t^2x' \doteqdot (pX)'',\ \ldots, \\ x'' \doteqdot p^2X - x(0)\,p - x'(0), \\ tx'' \doteqdot -(p^2X)' + x(0),\quad t^2x'' \doteqdot (p^2X)'',\ \ldots \end{gathered} \tag{24}$$

etc. Le passage aux images permet parfois de simplifier les équations différentielles contenant des termes de ce genre.

Exemple. L'équation différentielle

$$tx'' + x' + tx = 0 \tag{25}$$

est appelée équation des fonctions cylindriques d'indice 0 (cf. n° 95). Nous trouvons l'équation opérationnelle à l'aide des formules (24)

$$(p^2 + 1)\,X' + pX = 0.$$

Cette équation à variables séparables se résout facilement et donne :

$$X = \frac{C}{\sqrt{1 + p^2}},$$

où C est une constante arbitraire. Puisque $\lim\limits_{p\to\infty} pX = C$, d'après la relation limite (1) du n° 83, nous avons $C = x(0)$. Posant $x(0) = 1$ pour fixer les idées, nous trouvons, d'après la formule 28 du Dictionnaire, que la solution de l'équation (25) qui vérifie cette condition initiale est la fonction de Bessel (*)

$$x = J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \tag{26}$$

85. Calcul des circuits électriques. Comme on le sait, le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ aux extrémités d'un élément de circuit contenant une résistance R, une self L ou une capacité C sont reliés respectivement par les relations

$$u(t) = Ri(t),\ u(t) = L\frac{di(t)}{dt},\quad u(t) = \frac{1}{C}\left\{\int_0^t i(t)\,dt + q_0\right\}, \tag{1}$$

où q_0 est la charge initiale sur les armatures du condensateur.

Si l'on introduit les images de $i(t)$ et de $u(t)$, le « *courant opérationnel* » $I(p)$ et la « *tension opérationnelle* » $U(p)$, alors ces rela-

(*) Le point $t = 0$ est singulier pour l'équation différentielle (25). Aussi l'équation opérationnelle ne contient-elle pas de conditions initiales. Nous verrons au chapitre VII que toutes les solutions de l'équation (25), régulières au point $t = 0$, sont proportionnelles à la solution (26). Les solutions de cette équation qui sont linéairement indépendantes de (26) ont une singularité pour $t = 0$.

tions deviennent :

$$U = RI,\ U = L(pI - i_0),\quad U = \frac{1}{Cp}(I + q_0), \tag{2}$$

où $i_0 = i(0)$ est le courant initial. Si l'on suppose que $i_0 = q_0 = 0$, ce qui correspond aux problèmes de mise en circuit, nous avons les équations

$$U = RI,\quad U = LpI,\quad U = \frac{1}{Cp} I$$

au lieu des équations (2).

Ces dernières relations peuvent être réunies sous la forme de la « *loi opérationnelle d'Ohm* »

$$U = ZI, \tag{3}$$

où Z est la « *résistance opérationnelle* » (qu'on appelle aussi *impédance*) qui dans le cas d'une résistance, d'une self et d'une capacité est respectivement égale à :

$$Z_R = R,\quad Z_L = Lp,\quad Z_C = \frac{1}{Cp}. \tag{4}$$

Remarquons ensuite que, pour deux éléments d'impédances Z_1 et Z_2 mis en série, nous obtenons $U_1 = Z_1 I$, $U_2 = Z_2 I$, $U = U_1 + U_2$ (le sens des notations est clair) ; d'où $U = (Z_1 + Z_2) I = ZI$, ou encore

$$Z = Z_1 + Z_2. \tag{5}$$

D'une façon analogue, dans le cas de deux éléments en parallèle $U = Z_1 I_1 = Z_2 I_2$, $I_1 + I_2 = I$, d'où, posant $U = ZI$, nous trouvons :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \tag{6}$$

Ainsi, les *résistances opérationnelles d'un circuit dans le cas du problème de branchement peuvent être calculées d'après les règles ordinaires de montage des éléments.*

Si le courant et la charge initiaux ne sont pas nuls, alors des termes complémentaires apparaissent dans l'équation (3). Par exemple, dans le cas où une résistance, une self et une capacité sont placées en série (circuit RLC), nous obtenons :

$$U = \left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) I - Li_0 + \frac{q_0}{Cp} = ZI - Li_0 + \frac{q_0}{Cp}, \tag{7}$$

où $Z = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ est la résistance opérationnelle du circuit.

Si l'on considère un circuit formé d'éléments RLC, nous avons alors pour tout élément :

$$R_k i_k(t) + L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \frac{1}{C_k}\left\{\int_0^t i_k(t)\,dt + q_{k0}\right\} + \sum_{\nu \neq k} M_{k\nu} \frac{di_\nu(t)}{dt} = u_k(t), \tag{8}$$

où R_k, L_k, C_k, q_{k0}, $i_k(t)$, $u_k(t)$ sont les grandeurs ordinaires du k-ième élément et $M_{k\nu}$ est le coefficient d'induction mutuelle entre les k-ième et ν-ième éléments. Passant de (8) à l'équation opérationnelle, nous obtenons:

$$U_k = \sum_{\nu} Z_{k\nu} I_\nu + \frac{q_{k0}}{pC_k} - L_k i_{k0} - \sum_{\nu \neq k} M_{k\nu} i_{\nu 0}, \tag{9}$$

où

$$Z_{kk} = R_k + L_k p + \frac{1}{C_k p}, \quad Z_{k\nu} = M_{k\nu} p \quad (\nu \neq k). \tag{10}$$

Additionnant les relations (9) pour tous les éléments formant un circuit fermé et ayant recours à la seconde loi de Kirchhoff, nous trouvons:

$$\sum_k \sum_\nu Z_{k\nu} I_\nu = \sum_k \left(L_k i_{k0} + \sum_{\nu \neq k} M_{k\nu} i_{\nu 0} - \frac{q_{k0}}{pC_k} \right) + U, \tag{11}$$

où la somme est étendue à tous les éléments formant ce circuit et U désigne la somme des f.é.m. opérationnelles appliquées au circuit. La première loi de Kirchhoff donne en un nœud arbitraire

$$\sum I_k = 0, \tag{12}$$

où la somme est étendue à tous les éléments aboutissant à ce nœud. *Le système des équations* (11) *et* (12) *permet de déterminer les courants opérationnels dans tous les éléments du circuit.*

Notons aussi le rôle de l'intégrale de Duhamel dans la résolution des problèmes de mise en circuit. Considérant, pour plus de simplicité, le cas d'un circuit, nous trouvons pour ce circuit auquel on a appliqué respectivement les f.é.m. $u(t)$ et unité, les équations opérationnelles suivantes:

$$I = AU, \quad I_1 = A \frac{1}{p},$$

où $A = \frac{1}{Z}$ est la conductance opérationnelle (« *admittance* ») du circuit. Donc

$$I = pI_1 U$$

et d'après la formule de Duhamel

$$i(t) = \int_0^t u(\tau)\, i_1'(t-\tau)\, d\tau = i_1(t)\, u(0) + \int_0^t i_1(\tau)\, u'(t-\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

où $i_1(t)$ est l'original de la fonction et $I_1(p)$ le courant dans le circuit auquel on a appliqué la f.é.m. unité (« conductance transitoire »).

Ainsi, connaissant le courant dans le circuit lorsqu'on lui applique la f.é.m. unité, nous pouvons d'après la formule de Duhamel (13) écrire immédiatement la valeur du courant dans ce circuit lors-

qu'on lui applique une f.é.m. arbitraire (cf. les formules (14) et (15) du n° 84).

Les relations limites (1) et (2) du n° 83 permettent d'indiquer un lien simple entre la conductance transitoire $i_1(t)$ à l'instant de mise en circuit ($t = 0$) et pour le régime permanent ($t = \infty$) et les valeurs de la conductance opérationnelle $A(p)$ pour $p = \infty$ et $p = 0$. A savoir, de l'égalité $A = I_1 \cdot p$, en vertu de ces relations, nous obtenons:

$$a_1(0) = \lim_{p\to\infty} I_1 p = A(\infty), \quad a_1(\infty) = \lim_{p\to 0} I_1 \cdot p = A(0). \qquad (14)$$

Les relations (14) sont commodes pour vérifier les calculs.

Donnons plusieurs exemples d'application de la méthode opérationnelle au calcul des circuits:

1) Appliquons une f.é.m. constante U_0 à un circuit, représenté sur la fig. 186, où une self et une capacité sont montées en série et la capacité est

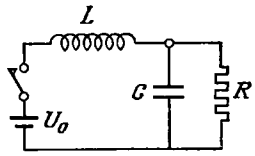

FIG. 186

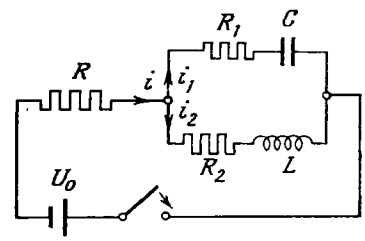

FIG. 187

shuntée par une résistance. Nous trouvons la résistance opérationnelle d'après les formules (4), (5) et (6):

$$Z = Lp + \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{RCp + 1}.$$

La f.é.m. opérationnelle est $U = \frac{U_0}{p}$, donc d'après la formule (3), le courant opérationnel est

$$I = \frac{U_0(RCp + 1)}{p(LCRp^2 + Lp + R)}.$$

Nous trouvons le courant transitoire à l'aide du second théorème de développement. La fonction $I(p)$ a des pôles du premier ordre aux points $p = 0$ et

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Si $L < 4R^2C$, alors les racines sont conjuguées complexes,

$$p_{1,2} = -\sigma \pm i\omega, \quad \text{où} \quad \sigma = \frac{1}{2RC}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}},$$

et le processus a un caractère oscillatoire. D'après la formule (15) du n° 82, nous trouvons

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left\{1-e^{-\sigma t}\left[\cos\omega t+\left(\frac{\sigma}{\omega}-\frac{R}{\omega L}\right)\sin\omega t\right]\right\}. \qquad (15)$$

Si $L>4R^2C$, alors ω est imaginaire pur, et, posant dans (15) $\omega=i\lambda$, où λ est réel, nous trouvons :

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left\{1-e^{-\sigma t}\left[\operatorname{ch}\lambda t+\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{R}{\lambda L}\right)\operatorname{sh}\lambda t\right]\right\}. \qquad (16)$$

Le processus a un caractère apériodique.

2) Calculons le courant $i_1(t)$ qui parcourt une capacité C dans le circuit (fig. 187) auquel on applique une f.é.m. constante U_0. Soient $Z_1=R_1+\frac{1}{Cp}$ et $Z_2=R_2+Lp$ les impédances des branches du circuit parcourues par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ (cf. fig. 187) et

$$Z=R+\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$

l'impédance du circuit entier. Nous avons $I=\frac{U_0}{pZ}=I_1+I_2$, $I_1Z_1=I_2Z_2$, donc $I_1=I-\frac{I_1Z_1}{Z_2}$, d'où

$$I_1=\frac{Z_2I}{Z_1+Z_2}=\frac{U_0Z_2}{p(Z_1+Z_2)Z}.$$

Portant les valeurs trouvées de Z_2 et de $(Z_1+Z_2)Z$, nous obtenons :

$$I_1(p)=\frac{U_0(R_2+Lp)}{\alpha p^2+2\beta p+\gamma},$$

où $\alpha=(R+R_1)L$, $2\beta=(R_1+R_2)R+R_1R_2+\frac{L}{C}$, $\gamma=\frac{R_1+R_2}{C}$. Le courant transitoire est déterminé d'après la formule (13) du n° 82 :

$$i_1(t)=\frac{U_0}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{R_2+Lp_k}{\alpha p_k+\beta}e^{p_kt}, \qquad (17)$$

où p_k sont les racines du trinôme du second degré figurant au dénominateur de l'expression que donne $I_1(p)$.

3) Soit un circuit RLC auquel on applique une f.é.m. sinusoïdale $U_0\sin\omega t$. Ici $Z=Lp+R+\frac{1}{Cp}$, $U=\frac{U_0\omega}{p^2+\omega^2}$, donc le courant opérationnel est égal à

$$I_0(p)=\frac{U_0\omega p}{(p^2+\omega^2)\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}. \qquad (18)$$

D'après le théorème de développement (15) du n° 82,

$$i_0(t)=U_0\omega\left\{\operatorname{Re}\frac{e^{i\omega t}}{-L\omega^2+Ri\omega+\frac{1}{C}}+2\operatorname{Re}\frac{p_0e^{p_0t}}{(p_0^2+\omega^2)(2Lp_0+R)}\right\},$$

où $p_0 = -\frac{R}{2L} + i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\sigma_0 + i\omega_0$ est la racine du trinôme du second degré qui figure au dénominateur de l'expression (18) (nous supposons que le cas oscillatoire a lieu, c'est-à-dire que ω_0 est un nombre réel). Introduisant les constantes admises en électrotechnique : $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$, $X' = L\omega + \frac{1}{C\omega}$ (réactances), $Z^* = \sqrt{R^2 + X^2}$ (impédance), nous trouvons après de simples transformations :

$$i_0(t) = \frac{U_0}{Z^*}\sin(\omega t - \delta) - \frac{U_0}{\omega_0 Z^* \sqrt{LC}} e^{-\sigma_0 t}\sin(\omega_0 t - \delta_0), \tag{19}$$

où

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{X}{R}, \quad \operatorname{tg}\delta_0 = \frac{\omega_0 X}{\sigma_0 X'}.$$

4) Supposons qu'une f.é.m. appliquée à un circuit RLC soit égale à $U_0 \sin \omega t$ pendant l'intervalle de temps $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$, puis de nouveau nulle. Calculons le courant dans le circuit pour $t > \frac{\pi}{\omega}$. La f.é.m. appliquée est :

$$u(t) - U_0\left\{\eta(t)\sin\omega t - \eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\sin\omega t\right\} =$$

$$= U_0\left\{\eta(t)\sin\omega t + \eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\sin\omega\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\right\},$$

où $\eta(t)$ est l'échelon unité ; nous avons transformé le second membre de manière que l'on puisse appliquer le théorème de retardement. D'après ce théorème

$$U = \frac{U_0\omega}{p^2 + \omega^2}(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}).$$

Le courant opérationnel est égal à

$$I(p) = I_0(p)(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}),$$

où $I_0(p)$ est donné par la formule (18). D'après ce même théorème de retardement

$$I_0(p)\, e^{-p\frac{\pi}{\omega}} \doteq i_0\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right);$$

additionnant le second membre de cette relation et le second membre de (19) et remarquant que pour $t > \frac{\pi}{\omega}$ nous avons $\eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = \eta(t) = 1$, nous trouvons le courant inconnu :

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 Z^* \sqrt{LC}} e^{-\sigma_0 t}\left\{\sin(\omega_0 t - \delta_0) + e^{\frac{\pi\sigma_0}{\omega}}\sin\left(\omega_0 t - \delta_0 - \pi\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right\}. \tag{20}$$

5) Appliquons au circuit (fig. 188) pendant le temps τ une f.é.m. constante U_0, et à l'instant $t = 0$ la f.é.m. cesse d'être appliquée ; déterminer le courant dans le circuit pour $t > 0$.

Calculons le courant dans le tronçon du circuit qui possède une self et trouvons la charge sur le condensateur à l'instant $t = 0$. Pour cela résolvons d'abord le problème d'un circuit auquel on applique une f.é.m. U_0. Soient 1 et 2 les tronçons du circuit contenant respectivement R, L et C; nous avons

$$Z_1 = R + Lp, \quad Z_2 = \frac{1}{Cp}, \quad I_1 Z_1 = -I_2 Z_2 = -\frac{U_0}{p}$$

(le sens du courant est indiqué par les flèches sur la fig. 188). D'où $I_1 = -\frac{U_0}{p(R+Lp)}$, $I_2 = U_0 C$, donc

$$i_1(t) = -\frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad i_2(t) = U_0 C \delta(t),$$

où $\delta(t)$ est la fonction impulsion (cf. n° 83). Ainsi, à l'instant $t = \tau$

$$i_0 = i_1(\tau) = -\frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right), \quad q_0 = U_0 C \int_0^{\tau} \delta(t)\, dt = U_0 C \tag{21}$$

(cf. la propriété de l'intégrale de la fonction impulsion — formule (22) du n° 83). Résolvons maintenant le problème de débranchement du circuit RLC

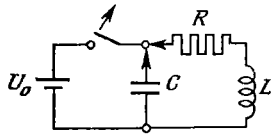

FIG. 188

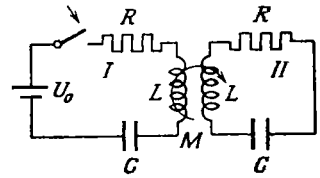

FIG. 189

avec les données initiales (21). D'après la formule (7), nous avons:

$$\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) I = Li_0 - \frac{q_0}{Cp} = -\frac{LU_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) - \frac{U_0}{p}.$$

D'où, d'après les notations de l'exemple 3) et pour ω_0 réel, nous obtenons

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 L} e^{-\sigma_0 t} \sin \omega_0 t - \frac{U_0}{R\omega_0} e^{-\sigma_0 t}(\omega_0 \cos \omega_0 t - \sigma_0 \sin \omega_0 t)\left(1 - e^{-\frac{R\tau}{L}}\right). \tag{22}$$

6) Deux circuits RLC identiques sont reliés par une induction mutuelle M (fig. 189). A partir de l'instant $t = 0$ on applique une f.é.m. constante U_0 à l'un de ces circuits; calculer le courant dans l'autre.

Le système d'équations opérationnelles est

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right) I_1 + MpI_2 = \frac{U_0}{p}, \quad \left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right) I_2 + MpI_1 = 0,$$

d'où nous trouvons le courant opérationnel dans le second circuit :

$$I_2(p) = \frac{U_0 M p^2}{M^2 p^4 - \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)^2}.$$

Les pôles de $I_2(p)$ sont $p_{1,2} = -\sigma_1 \pm i\omega_1$, $p_{3,4} = -\sigma_2 \pm i\omega_2$, où

$$\sigma_{1,2} = \frac{R}{2(L \pm M)}, \qquad \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{C(L \pm M)} - \sigma_{1,2}^2.$$

Nous trouvons l'original d'après le second théorème de développement (n° 82); après de simples transformations, nous obtenons:

$$i_2(t) = \frac{U_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{(-\sigma_1 + i\omega_1)t}}{(L+M)\, i\omega_1} - \frac{e^{(-\sigma_2 + i\omega_2)t}}{(L-M)\, i\omega_2} \right\} =$$

$$= \frac{U_0}{2} \left\{ \frac{e^{-\sigma_1 t} \sin \omega_1 t}{\omega_1 (L+M)} - \frac{e^{-\sigma_2 t} \sin \omega_2 t}{\omega_2 (L-M)} \right\}. \qquad (23)$$

7) Considérons un *filtre* électrique, c'est-à-dire un circuit formé d'un nombre quelconque de cellules (sections) en série (fig. 190). Nous supposons qu'une

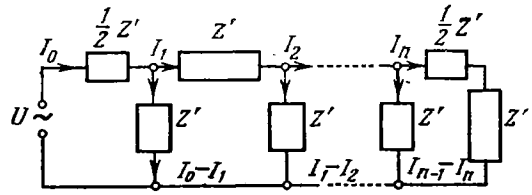

FIG. 190

f.é.m. est appliquée à la première cellule par l'intermédiaire de l'impédance $\frac{1}{2}Z'$ et que la dernière cellule est fermée sur cette même impédance $\frac{1}{2}Z'$. Appliquant successivement la loi de Kirchhoff aux cellules fermées, nous trouvons:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}Z'I_0 + Z(I_0 - I_1) &= U, \\ Z(I_0 - I_1) - I_1 Z' - Z(I_1 - I_2) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -Z(I_{n-1} - I_n) + \tfrac{1}{2}Z'I_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Dans les cellules voisines (excepté la première et la dernière), les courants sont ainsi liés entre eux par une équation aux différences finies (*)

$$(2Z + Z')I_k - Z(I_{k+1} + I_{k-1}) = 0. \qquad (25)$$

On peut chercher, d'une façon formelle, la solution de l'équation (25) de la même manière que la solution de l'équation différentielle correspondante, à savoir:

$$I_k = Ae^{\gamma k} + Be^{-\gamma k}, \qquad (26)$$

où A et B sont des constantes arbitraires et γ est choisi convenablement.

(*) Introduisant les différences $\Delta I_k = I_{k+1} - I_k$ et $\Delta^2 I_k = \Delta I_{k+1} - \Delta I_k$, nous pouvons écrire l'équation (25) sous la forme $Z\Delta^2 I_{k-1} - Z'I_k = 0$. Cette équation appartient à la classe des équations linéaires aux différences finies (à coefficients constants). La résolution de ces équations est en beaucoup de points analogue à celle des équations différentielles correspondantes. Le lecteur pourra trouver dans le livre de *A. Guelfond* « Calcul des différences finies » (Dunod, Paris 1965) des renseignements sur les équations aux différences finies.

Portant (26) dans (25), nous obtenons l'équation qui permet de déterminer γ : $2Z + Z' - 2Z \operatorname{ch} \gamma = 0$, d'où

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 + \frac{Z'}{2Z}. \tag{27}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les «conditions aux limites», c'est-à-dire par la première et la dernière équation (24). Déterminant ces constantes, nous représentons l'expression (26) sous la forme

$$I_k = \frac{U}{Z} \frac{\operatorname{ch}(n-k)\gamma}{\operatorname{sh}\gamma \operatorname{sh} n\gamma}. \tag{28}$$

Considérons pour exemple un *filtre à bobines d'induction*, pour lequel $Z' = R + Lp$, $Z = \frac{1}{pC}$ et auquel on applique une f.é.m. constante U_0. Nous avons de (27) :

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{2}{LC} (1 - \operatorname{ch} \gamma) = 0, \tag{29}$$

et la formule (28) prend la forme

$$I_k = U_0 C \frac{\operatorname{ch}(n-k)\gamma}{\operatorname{sh}\gamma \operatorname{sh} n\gamma}.$$

Ici, le dénominateur s'annule aux points $\gamma_\nu = \frac{i\nu\pi}{n}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) auxquels, d'après la formule (29), correspondent les pôles du premier ordre

$$p = 0, \quad p = -\frac{R}{L} \quad (\nu = 0), \qquad p = -\sigma \pm i\omega_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\sigma = \frac{R}{2L}$, $\omega_\nu = \sqrt{\frac{2}{LC}\left(1 - \cos\frac{\nu\pi}{n}\right) - \frac{R^2}{4L^2}}$. Nous trouvons l'original $i_k(t)$ d'après le théorème de développement. Pour cela, utilisant la formule (29), nous calculons d'abord

$$B' = \frac{d}{dp}(\operatorname{sh}\gamma \operatorname{sh} n\gamma) = (\operatorname{cth}\gamma \operatorname{sh} n\gamma + n \operatorname{ch} n\gamma)\left(LCp + \frac{RC}{2}\right).$$

Passant ici à la limite, lorsque $\gamma \to \gamma_0 = 0$ et, respectivement, lorsque $p \to 0$, $-\frac{R}{L}$, nous trouvons $B'_0 = \pm nRC$. D'une manière analogue, lorsque $\gamma \to \gamma_n = i\pi$ et $p \to -\sigma_n \pm i\omega_n$, nous trouvons $B'_n = \pm 2i\,(-1)^n\, nLC\omega_n$ et, lorsque $\gamma \to \gamma_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$), $B'_\nu = \pm i\,(-1)^\nu\, nLC\omega_\nu$. Alors le théorème de développement donne le courant dans la k-ième cellule du filtre :

$$i_k(t) = \frac{U_0}{nR} - \frac{U_0}{nR} e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{(-1)^k U_0}{nL\omega_n} e^{-\sigma t} \sin \omega_n t + \\ + \frac{2U_0}{nL} e^{-\sigma t} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\sin \omega_\nu t}{\omega_\nu} \cos \frac{k\nu\pi}{n}. \tag{30}$$

Ici, le premier terme donne un régime permanent et il est égal à la tension divisée par la résistance ohmique totale, les autres termes donnent le courant transitoire. L'amortissement des termes oscillatoires est le même et, pour les

petites $\frac{R}{2L}$, les fréquences sont

$$\omega_k \approx \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

La fréquence maximale est $\omega_n = \frac{2}{\sqrt{LC}}$; la différence entre les fréquences diminue lorsque n croît, c'est-à-dire que le filtre entre bien en résonance pour toute une bande de fréquences. Pour cette raison, on l'appelle *filtre à bande.*

8) Un *filtre à une infinité d'éléments* est plus simple à étudier. Dans ce cas, l'équation (27) ne change pas et il faut passer à la limite dans la formule (28) lorsque $n \to \infty$:

$$I_k = \frac{Ue^{-k\gamma}}{Z \operatorname{sh} \gamma} \tag{31}$$

(nous supposons $\operatorname{Re} \gamma > 0$). Remplaçant ici $Z \operatorname{sh} \gamma$ par $Z\sqrt{\operatorname{ch}^2 \gamma - 1}$ et e^{γ} par $\sqrt{\operatorname{ch}^2 \gamma - 1} + \operatorname{ch} \gamma$, nous obtenons d'après la formule (27)

$$I_k = \frac{U}{\sqrt{ZZ'}} \frac{\left\{\left(1 + \frac{Z'}{2Z}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{Z'}{2Z}\right)^2 - 1}\right\}^k}{\sqrt{1 + \frac{Z'}{2Z}}}. \tag{32}$$

Considérons, comme exemple, un filtre infini formé de capacités et de résistances $\left(Z = \frac{1}{Cp},\ Z' = R\right)$, auquel on applique une f.é.m. constante U_0. La formule (32) donne :

$$I_k = \frac{2U_0}{R\lambda^k} \frac{(p + \lambda - \sqrt{p^2 + 2p\lambda})^k}{\sqrt{p^2 + 2p\lambda}},$$

où $\lambda = \frac{2}{RC}$. Nous trouvons, d'après la formule (31) du Dictionnaire, l'original

$$i_k(t) = \frac{2U_0}{R} e^{-\lambda t} I_k(\lambda t), \tag{33}$$

où $I_k(t) = \frac{I_k(it)}{i^k}$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre k (cf. n° 96).

86. Equations aux dérivées partielles. La méthode opérationnelle s'applique avec succès à la résolution des *problèmes* dits *non stationnaires* des équations de la physique mathématique. Pour plus de commodité, nous nous bornons au cas où la fonction inconnue u dépend de deux variables indépendantes x et t dont la première est interprétée comme une coordonnée spatiale et la seconde comme le temps. En outre, nous supposons que l'équation différentielle a la forme

$$L[u] = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

où a, b, c, a_1 et b_1 sont des fonctions continues de la variable x, données sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant l$. Nous supposons toujours que

$a > 0$ et nous considérons deux cas fondamentaux : 1) $a_1 < 0$, le *cas hyperbolique*, et 2) $a_1 \equiv 0$, $b_1 < 0$, le *cas parabolique*.

Dans notre cas, le problème non stationnaire s'énonce de la façon suivante :

Déterminer la solution $u(x, t)$ *de l'équation différentielle* (1) *pour* $0 \leqslant x \leqslant l$ *et* $t \geqslant 0$ *qui vérifie les conditions initiales données*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{2}$$

(*on ne donne la deuxième condition que dans le cas hyperbolique*) *et les conditions aux limites*

$$u(0, t) = f(t), \quad \alpha \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t), \tag{3}$$

où α, β *et* γ *sont des constantes* (*).

Le problème est non stationnaire. En effet, on considère une solution essentiellement dépendante des conditions initiales (régime « non permanent », « transitoire » du processus physique).

Supposons que u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, considérées comme fonctions de t, sont des originaux et notons

$$U(p, x) = \int_0^\infty u(x, t)\, e^{-pt}\, dt$$

l'image de la fonction u. Alors, en vertu de nos suppositions,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \doteqdot \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt}\, dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt}\, dt = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

(nous notons la dérivation de U par rapport à x par le symbole d et non par ∂, car, partout par la suite, p est considéré comme un paramètre). D'après la règle de dérivation des originaux, nous obtenons encore :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - u(x, 0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot p^2 U - u(x, 0)\, p - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

ou, encore, tenant compte des conditions initiales,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - \varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Supposons encore que $f(t)$ soit un original et $F(p) \doteqdot f(t)$, alors les conditions aux limites donnent

$$U|_{x=0} = F(p), \quad \left[\alpha \frac{dU}{dx} + \beta (pU - \varphi)\right]_{x=l} = \gamma U|_{x=l}.$$

(*) Les conditions aux limites peuvent changer un peu. De plus, on rencontre souvent le cas où $l = \infty$, alors la deuxième condition aux limites disparaît.

Ainsi, la *méthode opérationnelle ramène la résolution du problème non stationnaire posé plus haut pour l'équation aux dérivées partielles* (1) *à la résolution de l'équation différentielle ordinaire*

$$a\frac{d^2U}{dx^2}+b\frac{dU}{dx}+AU+B=0, \tag{4}$$

où

$$A=c+a_1p^2+b_1p, \quad B=-a_1p\varphi-a_1\psi-b_1\varphi$$

et p est un paramètre complexe, avec les conditions aux limites suivantes:

$$U|_{x=0}=F(p), \quad \left[\alpha\frac{dU}{dx}+(\beta p-\gamma)U-\beta\varphi\right]_{x=l}=0. \tag{5}$$

Les raisonnements donnés ci-dessus montrent que pour les conditions adoptées, l'image U de la solution u du problème non stationnaire satisfait à l'équation (4) et aux conditions aux limites (5). Si l'on sait que le problème non stationnaire admet une solution unique qui satisfait avec ses dérivées des deux premiers ordres aux conditions imposées aux originaux au numéro 79 et si l'équation (4) avec les conditions aux limites (5) admet une solution unique U, il est alors clair que la solution du problème non stationnaire peut s'obtenir comme l'original de U.

Donnons plusieurs exemples.

1) La température $u(x, t)$ dans une tige fine satisfait à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}, \tag{6}$$

où a^2 est un coefficient constant. Considérons la répartition de la température dans une tige semi-limitée $0<x<\infty$ si l'on connaît la loi de variation de la température à son extrémité de gauche et si la température initiale de la tige est nulle :

$$u|_{t=0}=0, \quad u|_{x=0}=f(t). \tag{7}$$

Passant aux images, nous obtenons l'équation différentielle ordinaire

$$pU=a^2\frac{d^2U}{dx^2}, \tag{8}$$

contenant le paramètre complexe p et dont la solution doit satisfaire à la condition

$$U|_{x=0}=F(p). \tag{9}$$

La solution générale de l'équation (8) est

$$U=Ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_1e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x};$$

ici, on doit prendre $C_1=0$ car autrement U croîtrait indéfiniment lorsque $x\to\infty$. La condition (9) donne alors $C=F(p)$, donc

$$U=F(p)\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Pour déterminer l'original, considérons d'abord le cas particulier $f(t)=1$, alors $F(p)=\frac{1}{p}$, $U_1=\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$ et, d'après la formule 42 du Dictionnaire, nous trouvons l'original de U_1 :

$$u_1(x, t)=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\tau^2}d\tau. \tag{10}$$

Dans le cas des données aux limites arbitraires (7), nous utilisons l'intégrale de Duhamel (6) du n° 81 ; nous avons $U(p)=pF(p)U_1(p)$, donc (*)

$$u(x, t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}f\left(t-\frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right)e^{-\xi^2}d\xi \tag{11}$$

$\left(\text{nous avons posé } \xi=\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)$. Pour $x=0$, nous trouvons $u(0, t)=$ $=f(t)\operatorname{erf}(\infty)=f(t)$ de l'expression (11), ce qu'il fallait démontrer.

2) Considérons le même problème mais avec rayonnement de la chaleur dans un milieu de température nulle à l'extrémité gauche du conducteur, la température initiale de la tige étant $u_0=\text{const}$. Le problème se ramène à la résolution de l'équation (6) avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$u|_{t=0}=u_0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=hu|_{x=0}. \tag{12}$$

L'équation opérationnelle a la forme

$$pU-a^2\frac{d^2U}{dx^2}=u_0;$$

il faut la résoudre avec la condition : $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=hU|_{x=0}$. La solution de cette équation, bornée lorsque $x\to\infty$, a la forme

$$U=\frac{u_0}{p}+Ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

(*) Avec les notations du n° 81, nous avons ici $g(t)=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, $g(0)=0$,

$$g'(t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^{3/2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Utilisant la condition aux limites, nous trouvons :

$$U=\frac{u_0}{p}\left(1-\frac{h}{\frac{\sqrt{p}}{a}+h}\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=$$

$$=\frac{u_0}{p}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)+\frac{u_0}{a}\,\frac{1}{\sqrt{p}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}+h\right)}\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

D'après la formule (42) du Dictionnaire, nous avons $\frac{1}{p}\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\doteqdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, donc, l'original du premier terme est $u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$. Pour déterminer l'original du deuxième terme, remarquons que, d'après les théorèmes de retardement et d'homothétie,

$$F(p)=\frac{1}{\frac{p}{a}+h}\,e^{-p\frac{x}{a}}\doteqdot ae^{-h(at-x)}\,\eta(at-x).$$

Alors, d'après la conséquence (11) du théorème d'Efros (n° 81),

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{p}}{a}+h}\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\doteqdot\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x}{a}}^{\infty}e^{-h(a\tau-x)-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau.$$

Faisant le changement de variables $\frac{\tau+2aht}{2\sqrt{t}}=\xi$, nous trouvons :

$$u(x,t)=u_0\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+e^{hx+a^2h^2t}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)\right\}. \qquad (13)$$

3) Considérons la répartition de la température dans une tige limitée $0<x<l$, dont l'extrémité de gauche est calorifuge et l'extrémité de droite maintenue à une température constante u_1 ; la température initiale u_0 est également constante. Le problème se ramène à la résolution de l'équation (6) avec les conditions

$$u\Big|_{t=0}=u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=l}=u_1.$$

L'équation opérationnelle a la forme

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{p}{a^2}U=-\frac{u_0}{a^2};$$

il faut la résoudre avec les conditions

$$\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0}=0,\quad U|_{x=l}=\frac{u_1}{p}.$$

On prend la solution générale de l'équation opérationnelle sous la forme

$$U=\frac{u_0}{p}+C_1\operatorname{sh}\frac{\sqrt{p}}{a}x+C_2\operatorname{ch}\frac{\sqrt{p}}{a}x;$$

la substitution de la première condition aux limites donne $C_1 = 0$ et celle de la seconde $C_2 = \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}}$. Ainsi, l'image de la solution a la forme

$$U = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{p}}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}}.$$

La fonction $U(p)$ est uniforme, car le cosinus hyperbolique est une fonction paire et son développement en série de Taylor ne contient que des puissances paires. Cette fonction est méromorphe et a des pôles simples aux points $p = 0$ et $p_k = -a^2 \frac{\pi^2}{l^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. On peut démontrer qu'elle satisfait aux conditions du second théorème de développement (*).

Posons $A(p) = u_0 \operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p} + (u_1 - u_0) \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{p}$, $B(p) = p \operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}$; alors $U = \frac{A(p)}{B(p)}$, $A(0) = u_1$, $B'(0) = 1$, et pour $p = p_k = -\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2$, où $k = 1, 2, \ldots$, nous avons :

$$A(p_k) = (u_1 - u_0) \operatorname{ch} \frac{x}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right) i\pi = (u_1 - u_0) \cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l},$$

$$B'(p_k) = \frac{l}{2a} \sqrt{p_k} \operatorname{sh} \frac{l}{a} \sqrt{p_k} = (-1)^k \frac{\pi}{2} \left(k - \frac{1}{2}\right).$$

Le deuxième théorème de développement donne alors

$$u(x, t) = u_1 + \frac{2(u_1 - u_0)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \frac{1}{2}} \cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 t}. \quad (14)$$

4) Pour diminuer la vitesse des neutrons qui sont libérés par la réaction en chaîne dans les piles nucléaires, on utilise des modérateurs (en général à

(*) Indiquons l'idée de la démonstration : posons $\frac{l}{a} \sqrt{p} = q$; alors, répétant le raisonnement que nous avons donné au n° 71 pour ctg z, nous montrons que la fonction $\frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{p}}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{l} q}{\operatorname{ch} q}$ est bornée dans le plan duquel on a retranché (à l'aide de petits cercles) les pôles. Il en découle que la fonction $\frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{p}}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}}$ tend vers zéro, lorsque $p \to \infty$, sur un certain système de circonférences (condition 2 du théorème) ; de plus, puisque pour les grands $|p|$ le module de cette fonction n'est pas supérieur à une certaine constante multipliée par $\frac{1}{|p|} e^{\frac{x-l}{a} \sqrt{|p|}}$ et comme $x < l$, cette fonction est absolument intégrable sur la droite Re $p = \alpha$ (condition 3 du théorème).

graphite). Considérons un modérateur qui a la forme du demi-espace $x > 0$ et qui contient une source plane de neutrons, à savoir dans le plan $x = x_0$. Pour des suppositions connues qui simplifient le problème, le processus de ralentissement des neutrons y est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\partial \chi(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \chi(x, \theta)}{\partial x^2} + \delta(x - x_0)\,\delta(\theta), \tag{15}$$

où θ est l'âge symbolique des neutrons, $\chi(x, \theta)$ la densité de leur ralentissement, c'est-à-dire le nombre de neutrons dans l'unité de volume et par unité de temps, et δ la fonction impulsion (*).

Il faut résoudre cette équation avec la condition aux limites

$$\left(\chi - \gamma \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = 0, \tag{16}$$

où γ est une constante (physiquement parlant, cette relation exprime la condition que le flux total de neutrons à travers le plan $x = 0$ est nul), et avec la condition d'après laquelle la densité de ralentissement tend vers zéro lorsque $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \chi(x, \theta) = 0 \tag{17}$$

pour tous les θ. Il n'y a pas de conditions initiales (des conditions pour $\theta = 0$) car l'équation contient la fonction impulsion.

Appliquant la transformation de Laplace par rapport à θ et utilisant la relation $\delta(\theta) \doteqdot 1$, nous en déduisons l'équation opérationnelle

$$pX = \frac{d^2X}{dx^2} + \delta(x - x_0). \tag{18}$$

La présence, dans cette équation, de la fonction impulsion conduit à ce que la solution de cette équation, tout en restant continue pour $x = x_0$, a une dérivée discontinue en ce point. En effet, intégrant l'équation (18) par rapport à x le long du segment $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ et utilisant la propriété de l'intégrale d'une fonction impulsion de Dirac, nous trouvons :

$$p \int_{x_0 - h}^{x_0 + h} X\,dx = \frac{dX}{dx}\Big|_{x_0 - h}^{x_0 + h} + 1,$$

d'où, tenant compte de la continuité de la fonction X, à la limite, lorsque $h \to 0$, nous avons :

$$\frac{dX}{dx}\Big|_{x_0 - 0} - \frac{dX}{dx}\Big|_{x_0 + 0} = 1. \tag{19}$$

En partant de ce qui vient d'être dit, la solution générale de l'équation (18), pour $x < x_0$, peut être mise sous la forme

$$X = Ae^{(x_0 - x)\sqrt{p}} + Be^{-(x_0 - x)\sqrt{p}},$$

et pour $x > x_0$, tenant compte de la condition (17), sous la forme

$$X = Ce^{-(x - x_0)\sqrt{p}},$$

(*) Le lecteur pourra trouver l'établissement de l'équation (15) dans le livre de *I. N. Sneddon* [10], § 27.

où A, B et C sont des constantes. Les conditions (16) et (19), ainsi que la condition de continuité de la solution pour $x = x_0$, nous conduisent au système :

$$A(1+\gamma\sqrt{p})\,e^{x_0\sqrt{p}} + B(1-\gamma\sqrt{p})\,e^{-x_0\sqrt{p}} = 0,$$
$$\sqrt{p}(-A+B+C) = 1, \quad A+B-C = 0,$$

qui détermine complètement ces constantes. Résolvant ce système et effectuant de simples transformations, nous trouvons la solution opérationnelle :

$$X = \frac{e^{-|x-x_0|\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}} + \frac{e^{-(x+x_0)\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}} - \frac{e^{-(x+x_0)\sqrt{p}}}{\gamma p+\sqrt{p}}. \tag{20}$$

On trouve dans le Dictionnaire les originaux des deux premiers termes. Pour trouver l'original du troisième terme, posons

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\beta p+\sqrt{p}} = \frac{F\sqrt{p}}{\sqrt{p}},$$

nous avons alors $F(p) = \dfrac{e^{-\alpha p}}{1+\beta p}$ et, d'après le théorème de retardement, nous trouvons l'original $f(t) = \dfrac{1}{\beta}\,e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}\,\eta(t-\alpha)$. Donc, d'après la conséquence du théorème d'Efros (formule (11) du n° 81), nous avons :

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\beta p+\sqrt{p}} \doteq \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta\sqrt{\pi t}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\beta}-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau.$$

Il est facile d'exprimer l'intégrale obtenue par la fonction erfc si, après avoir dégagé de l'exposant un carré parfait, nous posons $\dfrac{\tau}{2\sqrt{t}} + \dfrac{\sqrt{t}}{\beta} = \xi$; nous avons enfin

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\beta p+\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\beta}\,e^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{t}{\beta^2}}\,\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{\beta}\right). \tag{21}$$

Ainsi, nous trouvons l'original de la solution (20), c'est-à-dire l'expression (*) définitive de la densité de ralentissement des neutrons :

$$\chi(x,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\left\{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\theta}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}\right\} - \frac{1}{\gamma}\,e^{\frac{x+x_0}{\gamma}+\frac{\theta}{\gamma^2}}\,\operatorname{erfc}\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\theta}}+\frac{\sqrt{\theta}}{\gamma}\right). \tag{22}$$

Donnons encore l'expression approchée de cette fonction pour les petites valeurs de γ. Utilisant la formule asymptotique de la fonction erfc x (formule (11) du n° 76), nous pouvons écrire pour les grands x :

$$\operatorname{erfc} x \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}.$$

(*) La discontinuité de la dérivée de la solution opérationnelle au point $x = x_0$ disparaît lorsqu'on passe aux originaux.

Donc, pour les petits γ, le dernier terme de la formule (22) est asymptotiquement égal à

$$-\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\theta}}+\frac{\sqrt{\theta}}{\gamma}\right)}e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}\approx-\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\left(1-\frac{x+x_0}{2\theta}\gamma\right)e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}$$

et pour les petits γ, nous avons :

$$\chi(x,\theta)\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\left\{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\theta}}-e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}\right\}+\frac{x+x_0}{2\theta\sqrt{\pi\theta}}\gamma e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}. \quad (23)$$

Il est important, pour les applications physiques, de savoir déterminer le point $x = x_c$ en lequel la vitesse de ralentissement est nulle et que l'on appelle point extrême d'extrapolation. D'après l'expression approchée (23), nous trouvons de la condition $\chi(x_c, \theta) = 0$

$$1-e^{\frac{x_cx_0}{\theta}}\approx\gamma^{\frac{x_c+x_0}{\theta}}.$$

Si l'on suppose de plus que x_cx_0 est petit par rapport à θ, nous trouvons: $-x_cx_0=\gamma(x_c+x_0)$, d'où

$$x_c\approx-\frac{\gamma x_0}{x_0+\gamma}\approx-\gamma.$$

5) On considère dans la théorie linéaire de l'écoulement non permanent autour des ailes d'un avion le problème suivant (*).

La fonction de deux variables $f(x, y)$, le potentiel réduit de l'écoulement supersonique autour de l'aile, est nulle pour $x < 0$ et pour $x \geqslant 0$ satisfait à l'équation différentielle

$$b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+c^2f=0, \quad (24)$$

où b^2 et c^2 sont des constantes positives, et pour $x=0$ aux conditions nulles:

$$f|_{x=0}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,$$

en outre, $f(x, y)$ est bornée lorsque $y \to +\infty$.

A partir de considérations physiques, on peut supposer que la fonction $-\frac{\partial f}{\partial y}|_{y=0} = \alpha(x)$, la déflexion réduite sur la surface de l'aile, est connue et on demande d'exprimer, à l'aide de cette fonction, les valeurs du potentiel $f(x, 0)$ sur la surface de l'aile.

Le problème se résout d'une manière élégante à l'aide de la méthode opérationnelle. La transformation de Laplace par rapport à la variable x fait correspondre à la fonction $f(x, y)$ la fonction $F(p, y)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^2F}{dy^2}-b^2(p^2+\lambda^2)F=0,$$

où $\lambda^2=\frac{c^2}{b^2}$ est une constante positive. La solution générale de cette équation a la forme

$$F=Ce^{-b\sqrt{p^2+\lambda^2}\,y}+C_1e^{b\sqrt{p^2+\lambda^2}\,y},$$

(*) Cf. par exemple, L. Howarth, « Modern developments in fluid dynamics »; High speed Flow 1953, Band 1, Kap. IX, § 6.

en outre, $C_1=0$ dans notre problème, car $F(p, y)$ doit être bornée lorsque $y \to +\infty$. Donc,

$$\left.\frac{dF}{dy}\right|_{y=0} = -Cb\sqrt{p^2+\lambda^2} = -A(p),$$

où $A(p)$ est l'image de la déflexion $\alpha(x)$: d'où

$$F(p, 0) = C = \frac{A(p)}{b\sqrt{p^2+\lambda^2}}.$$

Appliquant le théorème de multiplication et la formule 28 du Dictionnaire, nous trouvons la solution du problème :

$$f(x, 0) = \frac{1}{b}\int_0^x \alpha(x-\xi)\, J_0(\lambda\xi)\, d\xi. \tag{25}$$

6) Une barre de longueur l se trouve à l'état de repos et son extrémité $x = 0$ est fixée tandis que la force $A \sin \omega t$, dirigée suivant l'axe de la barre, est appliquée à l'extrémité libre $x = l$. Déterminer les vibrations longitudinales de la barre.

L'équation des vibrations de la barre a la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où $u = u(x, t)$ est le déplacement longitudinal et a^2 un coefficient constant qui dépend du matériau de la barre. Les conditions initiales et aux limites se ramènent aux suivantes :

$$u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \quad u|_{x=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{A}{E}\sin\omega t, \tag{26}$$

où E est le coefficient d'élasticité (*). L'équation opérationnelle a la forme

$$p^2 U = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2};$$

il faut la résoudre avec les conditions

$$U|_{x=0} = 0; \quad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=l} = \frac{A}{E}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Prenons la solution générale sous la forme

$$U = C_1 \operatorname{ch}\frac{p}{a}x + C_2 \operatorname{sh}\frac{p}{a}x;$$

en y faisant $x=0$, on trouve $C_1=0$; $x=l$ donne

$$C_2 = \frac{b}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l}, \quad \text{où} \quad b = \frac{Aa\omega}{E}.$$

(*) Nous avons tenu compte de ce que, d'après la loi de Hooke, la force X, qui agit le long de la barre, est liée au déplacement u par la relation

$$X = E\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ainsi, la solution opérationnelle a la forme

$$U=\frac{b}{p\,(p^2+\omega^2)}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{a}\,p}{\operatorname{ch}\frac{l}{a}\,p}. \tag{27}$$

Pour déterminer l'original, on peut recourir de nouveau au deuxième théorème de développement. La fonction U a un pôle réel $p = 0$ et une infinité de pôles purement imaginaires qui sont deux à deux conjugués complexes. Les pôles qui se trouvent dans le demi-plan supérieur : $p = i\omega$, $p_k = i\frac{\pi a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right) = i\omega_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), sont tous du premier ordre et différents si $\omega_k \neq \omega$ pour tout entier k (c'est la condition d'absence de résonance que nous supposons vérifiée). En partant du deuxième théorème de développement, nous obtenons :

$$u(x, t)=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{A(i\omega)}{B'(i\omega)}\,e^{i\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{i\omega_k t}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega}{a}\,x\sin\omega t+\frac{2ab}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{\omega_k}{a}x}{\omega_k^2-\omega^2}\,\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}. \tag{28}$$

7) Deux barres identiques de longueur l se déplacent le long de leurs axes, à la rencontre l'une de l'autre, avec une vitesse identique v_0. Déterminons le déplacement des points des barres après le choc.

Supposons que le choc se produit pour $t = 0$ à l'origine des coordonnées. En vertu de la symétrie, il suffit de considérer le déplacement $u(x, t)$ des points d'une des barres, par exemple, de celle de droite. Le problème se ramène à la résolution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec les conditions

$$u|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-v_0\,;\quad u|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

L'équation opérationnelle s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}\,U=\frac{v_0}{a^2}, \tag{29}$$

et les conditions aux limites deviennent

$$U|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=l}=0.$$

Pour ces conditions, la solution de l'équation (29) a la forme

$$U=-\frac{v_0}{p^2}+\frac{v_0}{p^2}\,\frac{e^{-p\frac{x}{a}}+e^{-p\frac{2l-x}{a}}}{1+e^{-\frac{2pl}{a}}}. \tag{30}$$

Développant $(1+e^{-\frac{2pl}{a}})^{-1}$ en progression géométrique (convergente, car $|e^{-\frac{2pl}{a}}|<1$), nous obtenons

$$U=-\frac{v_0}{p^2}+\frac{v_0}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{e^{-p\frac{2kl+x}{a}}+e^{-p\frac{2(k+1)l-x}{a}}\};$$

appliquant ensuite le théorème de retardement, nous trouvons l'original

$$u(x,t)=v_0\left\{-t+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\left(t-\frac{2kl+x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{2kl+x}{a}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(t-\frac{2(k+1)l-x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{2(k+1)l-x}{a}\right)\right]\right\}. \qquad (31)$$

Cette solution est valable tant que les barres sont en contact, c'est-à-dire tant que $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}<0$. Mais nous avons de la formule (30) $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{v_0}{ap}\operatorname{th}\frac{pl}{a}$ et, d'après la formule (19) du n°80, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-g(t)$, en outre, dans cette formule $A=\frac{v_0}{a}$, $\tau=2\frac{l}{a}$. Donc $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}<0$ seulement pour $0<t<2\frac{l}{a}$, et pour cette portion seulement trois termes sont non nuls dans la formule (31), c'est-à-dire

$$u(x,t)=v_0\left\{-t+\left(t-\frac{x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{x}{a}\right)+\left(t-\frac{2l-x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{2l-x}{a}\right)\right\}. \qquad (32)$$

On voit que, lorsque $t\to\frac{2l}{a}$, nous avons $u(x,t)\to 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\to v_0$, c'est-à-dire que les barres s'écartent l'une de l'autre sans vibration avec la vitesse v_0.

87. Calcul de longues lignes de transport de l'énergie électrique. Nous allons considérer une ligne longue à deux conducteurs comme

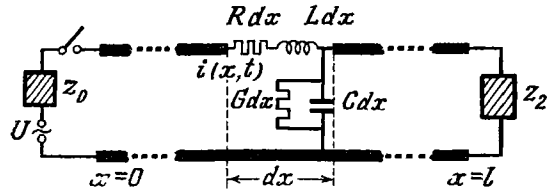

FIG. 191

un système de résistances, d'inductances, de capacitances et de perditances uniformément réparties; nous désignons leurs grandeurs rapportées à l'unité de longueur respectivement par R, L, C et G (fig. 191). Nous fixons une portion de ligne entre les points x et

$x + \Delta x$; alors, pour la tension u et le courant i nous avons:

$$u(x, t) - u(x+\Delta x, t) = L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t} + R\Delta x \cdot i,$$

$$i(x, t) - i(x+\Delta x, t) = C\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} + G\Delta x \cdot u,$$

et, passant à la limite, lorsque $\Delta x \to 0$, nous avons:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial u}{\partial t} + Gu. \tag{1}$$

Ce système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre se ramène facilement à une équation ; par exemple, pour le courant, nous avons

$$LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + RGi = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \tag{2}$$

et on a une équation identique pour la tension. Puisque les coefficients L et C sont non négatifs, l'équation (2) est donc soit du type hyperbolique soit du type parabolique, selon que $LC > 0$ ou $LC = 0$.

Désignons par U et I respectivement les images (par rapport au temps) de la tension et du courant et par i_0 et u_0 les valeurs de ces derniers pour $t = 0$; alors il correspond au système (1) le système opérationnel suivant:

$$(Lp + R)\, I = -\frac{dU}{dx} + Li_0, \quad (Cp + G)\, U = -\frac{dI}{dx} + Cu_0. \tag{3}$$

Eliminant le courant opérationnel, nous en déduisons l'équation pour U

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \gamma^2 U = L\frac{di_0}{dx} - C(Lp + R)\, u_0, \tag{4}$$

où

$$\gamma = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)} \tag{5}$$

est le *coefficient de propagation de l'onde*. Dans le cas des données initiales nulles, le second membre de l'équation (4) est nul et la solution générale de cette équation a la forme

$$U = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}, \tag{6}$$

où A et B ne peuvent dépendre que de p et non de x. Ces fonctions sont déterminées d'après les conditions aux extrémités de la ligne.

On obtient pour le courant opérationnel une équation analogue à l'équation (4), cependant, connaissant U, il est plus commode de déterminer le courant à l'aide de la première équation du système (3):

$$I = -\frac{1}{Lp + R}\left(\frac{dU}{dx} - Li_0\right). \tag{7}$$

Dans le cas des données initiales nulles, utilisant la solution (6), nous obtenons :

$$I = \frac{1}{Z}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}), \tag{8}$$

où

$$Z = \sqrt{\frac{Lp+R}{Cp+G}} \tag{9}$$

est ce qu'on appelle l'*impédance caractéristique de la ligne.*

Dans le cas général, l'étude des équations d'une ligne longue présente de grandes difficultés et, d'ordinaire, on fait certaines suppositions qui permettent de simplifier le problème. On suppose, par exemple, que la longueur de la ligne est infinie. D'ordinaire, on représente une telle ligne de longueur infinie allant du point $x = 0$ vers l'infini le long de l'axe positif des x. La condition d'après laquelle U et I sont bornées à l'infini conduit à ce que, dans les équations (6) et (8), le coefficient B est nul (nous supposons $Re\ \gamma > 0$), et ces équations prennent, par conséquent, la forme

$$U = Ae^{-\gamma x}, \quad I = \frac{A}{Z}e^{-\gamma x}. \tag{10}$$

Du point de vue physique, notre condition signifie que nous négligeons les phénomènes de réflexion des ondes sur l'extrémité de la ligne.

En outre, on néglige parfois différents paramètres de la ligne ou on suppose que ces paramètres sont liés entre eux par certaines relations.

Voyons plusieurs exemples.

1) *Ligne infiniment longue sans inductance et perditance (câble électrique)* (*).

Ici, $L = G = 0$, $\gamma = \sqrt{RCp}$, $Z = \sqrt{\frac{R}{Cp}}$, donc, les équations (10) prennent la forme

$$U = Ae^{-\sqrt{RCp}\,x}, \quad I = A\sqrt{\frac{Cp}{R}}\,e^{-\sqrt{RCp}\,x}. \tag{11}$$

On détermine la quantité A en partant de la condition que la ligne est parcourue par un courant. Par exemple, si on applique une force électromotrice constante à l'extrémité de gauche, alors, de la première équation (11), pour $x = 0$, nous avons $A = \frac{U_0}{p}$ et, d'après les formules 42 et 16 du Dictionnaire (avec $\alpha = \sqrt{RC}\,x$), nous trouvons, tout de suite, la tension et le courant :

$$u(x, t) = U_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right), \quad i(x, t) = U_0\sqrt{\frac{C}{R\pi t}}\,e^{-\frac{RCx^2}{4t}}. \tag{12}$$

(*) Dans le cas d'un câble souterrain ou sous-marin, on peut, vu la proximité des conducteurs, négliger la self et, pour une bonne isolation, la perditance.

Remarquons que le problème de la détermination de la tension est analogue au problème de la détermination de la température dans l'exemple 1) du n° 86 $\left(\text{il suffit seulement de poser } a = \frac{1}{\sqrt{RC}}\right)$. Donc, d'après la formule (11) du n° 86, lorsqu'on applique au câble une force électromotrice quelconque dont la loi de variation est donnée par la fonction $f(t)$, nous avons :

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2 RC}{4t\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi. \tag{13}$$

2) Il est commode de déterminer directement le *régime permanent dans un câble électrique* à l'aide de la formule d'inversion de Laplace en utilisant la méthode de déformation du contour qui a été exposée à la fin du n° 78. Comme exemple déterminons le courant permanent lorsqu'on applique une force électromotrice $u(t) = U_0 \sin \omega t$ au câble.

Nous avons à partir des équations (11)

$$I = \frac{U_0 \omega}{p^2 + \omega^2} \sqrt{\frac{Cp}{R}}\, e^{-\sqrt{RCp}\, x},$$

et, d'après la formule d'inversion,

$$i(x, t) = \frac{U_0 \omega}{2\pi i} \sqrt{\frac{C}{R}} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \frac{\sqrt{p}}{p^2 + \omega^2}\, e^{-\sqrt{RCp}\, x + pt}\, dp. \tag{14}$$

Déformant la droite d'intégration de manière à obtenir le contour L représenté sur la fig. 174, nous trouvons, d'après la méthode du n° 78,

$$i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C\omega}{R}}\, e^{-x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right) - \frac{U_0 \omega}{2\pi i} \sqrt{\frac{C}{R}} \int_L,$$

où le premier terme est la somme des résidus de la fonction à intégrer de (14) aux points singuliers $p = \pm i\omega$ ($\sqrt{p}$ est la branche de la racine qui est définie par la condition $-\pi < \arg p < \pi$) et on intègre la même fonction que dans (14). Posant $pt = q$, nous trouvons :

$$\int_L = \int_{L^*} \frac{\sqrt{q}}{t^{3/2}\left(\frac{q^2}{t^2} + \omega^2\right)}\, e^{-x\sqrt{\frac{RCq}{t}} + q}\, dq,$$

où L^* est un contour de la même forme que L. On voit que, lorsque $t \to \infty$, l'intégrale tend vers zéro, donc le courant permanent est

$$i_{\text{perm.}}(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C\omega}{R}}\, e^{-x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right). \tag{15}$$

En particulier, faisant $x = 0$, nous trouvons le courant permanent à l'entrée de la ligne :

$$i_{\text{perm.}} = U_0 \sqrt{\frac{C\omega}{R}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

3) *Alimentation d'un câble électrique par l'intermédiaire d'une impédance.* Supposons que l'on applique une f.é.m. $u_0(t)$ à l'extrémité gauche d'un câble électrique par l'intermédiaire d'une impédance Z_0. Comme on le sait, une f.é.m. appliquée est la somme de la chute de tension sur l'impédance et de la f.é.m. à l'entrée de la ligne :

$$U_0(p) = Z_0 I|_{x=0} + U|_{x=0}. \tag{16}$$

Pour le câble du système (11), nous trouvons $U|_{x=0} = A$, $I|_{x=0} = \sqrt{\frac{Cp}{R}}\, A$, donc, la condition (16) se met sous la forme

$$U_0(p) = A\left(1 + Z_0\sqrt{\frac{Cp}{R}}\right), \tag{17}$$

d'où nous trouvons A.

Par exemple, lorsqu'on applique une f.é.m. constante U_0 à un câble par l'intermédiaire d'une résistance R_0, on a

$$A = \frac{U_0}{p\left(1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)}, \quad \text{où} \quad \beta = \frac{R}{CR_0^2}.$$

D'où, d'après les formules (11), la tension opérationnelle est

$$U = \frac{U_0 e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p\left(1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)} = \frac{U_0 e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} - \frac{U_0}{\sqrt{\beta}}\,\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\frac{p}{\sqrt{\beta}}+\sqrt{p}},$$

où $\alpha = x\sqrt{RC}$. D'après la formule 42 du Dictionnaire et la formule (21) du n° 86, nous trouvons l'original :

$$u(x,t) = U_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right) - U_0 e^{x\frac{R}{R_0}+\beta t} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\beta t}\right). \tag{18}$$

D'après la formule (11), nous en déduisons le courant opérationnel

$$I = \frac{U_0 e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p\left(1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)}\sqrt{\frac{Cp}{R}} = U_0\sqrt{\frac{C}{R}}\,\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\frac{p}{\sqrt{\beta}}+\sqrt{p}},$$

donc

$$i(x,t) = \frac{U_0}{R_0} e^{x\frac{R}{R_0}+\beta t} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{2}} + \sqrt{\beta t}\right). \tag{19}$$

4) *Ligne infiniment longue sans pertes* ($R = G = 0$). Conformément aux formules (5) et (9), le coefficient de propagation de l'onde est $\gamma = \sqrt{LC}\,p = \frac{p}{v}$, où $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la vitesse de propagation de l'onde et l'impédance caractéristique $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$, donc

$$U = Ae^{-\frac{p}{v}x}, \qquad I = \sqrt{\frac{C}{L}}\,Ae^{-\frac{p}{v}x}. \tag{20}$$

Ici, $A = U|_{x=0}$, et si on applique à la ligne une f.é.m. arbitraire $f(t)$, alors, d'après le théorème de retardement, nous avons :

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} f\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{21}$$

Cela signifie que le long d'une telle ligne, les ondes de tension et de courant se propagent avec une vitesse constante v sans modifier la forme.

5) *Ligne infiniment longue sans déformation.* C'est ainsi que l'on appelle une ligne dont les paramètres vérifient la condition $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \delta$. Ici, $\gamma = \frac{p+\delta}{v}$, où $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ et, par suite,

$$U = Ae^{-\frac{p+\delta}{v}x}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}} Ae^{\frac{-p+\delta}{v}x}. \tag{22}$$

Si l'on applique une f.é.m. quelconque $f(t)$ à une telle ligne, alors

$$u(x, t) = e^{-\frac{\delta}{v}x} f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\delta}{v}x} f\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{23}$$

Cela signifie que dans une telle ligne, les ondes de tension et de courant se propagent avec une vitesse constante v sans changer de forme et avec un amortissement constant.

6) *Ligne infiniment longue avec pertes, mais sans perditance* ($G = 0$). Dans ce cas, $\gamma = \frac{1}{v}\sqrt{p^2 + 2ap}$, où $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $a = \frac{R}{2L}$ et $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{p} \sqrt{p^2+2ap}$, donc,

$$U = Ae^{-\frac{x}{v}x\sqrt{p^2+2ap}}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{Ape^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2+2ap}}}{\sqrt{p^2+2ap}}. \tag{24}$$

Si on applique à une telle ligne une f.é.m. constante U_0, alors $Ap = U_0$ et

$$I = U_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{e^{-\frac{x}{v}\sqrt{(p+a)^2-a^2}}}{\sqrt{(p+a)^2-a^2}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} F(p+a),$$

où $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}} e^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2-a^2}}$. D'après la formule 35 du Dictionnaire (cette formule sera établie au numéro 99 (*)), nous trouvons l'original $f(t) = \eta\left(t - \frac{x}{v}\right) I_0\left(a\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right)$, où I_0 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro et d'après le théorème de déplacement

$$i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-at} I_0\left(a\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right) \eta\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{25}$$

(*) Cf. la formule (19) du n° 99 ; ici, $\tau = \frac{x}{v}$ et au lieu de a nous avons ia.

7) *Courant permanent dans la ligne* de l'exemple précédent à laquelle on applique la f.é.m. $U_0 e^{i\omega t}$. Nous avons $A = U|_{x=0} = \frac{U_0}{p - i\omega}$ et, d'après la formule d'inversion, nous trouvons de la deuxième formule (24):

$$i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{p e^{-\frac{x}{v}\sqrt{p^2 + 2ap} + pt}}{(p - i\omega)\sqrt{p^2 + 2ap}} dp.$$

L'expression asymptotique de cette intégrale a été donnée au numéro 78 par la méthode de déformation du contour d'intégration (cf. la formule (16) du n° 78). Portant cette expression, nous avons:

$$i_{\text{perm.}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{i\omega}{\sqrt{2ai\omega - \omega^2}} e^{i\omega t - \frac{x}{v}\sqrt{2ai\omega - \omega^2}}. \qquad (26)$$

8) *Ligne de longueur finie* l à laquelle on applique une f.é.m. constante U_0 et ouverte à son extrémité de droite. Les formules (6) et (8) donnent

$$U = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}, \quad I = \frac{1}{Z}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}), \qquad (27)$$

nous trouvons les constantes A et B à partir des conditions données aux extrémités

$$U|_{x=0} = A + B = \frac{U_0}{p}, \quad I|_{x=l} = \frac{Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}}{Z} = 0,$$

donc,

$$U = U_0 \frac{\operatorname{ch} \gamma(l - x)}{p \operatorname{ch} \gamma l}, \qquad I = \frac{U_0}{Z} \frac{\operatorname{sh} \gamma(l - x)}{p \operatorname{ch} \gamma l}. \qquad (28)$$

Pour une ligne avec pertes, mais sans perditance, où $\gamma = \frac{1}{v}\sqrt{p^2 + 2ap}$, le dénominateur de la tension opérationnelle a un ensemble infini de zéros, définis par l'équation $\operatorname{ch} \gamma l = 0$, $\gamma l = (2n + 1)\frac{\pi}{2} i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Dans le plan des p, il leur correspond un ensemble infini de pôles de la fonction U, qui sont définis par l'équation

$$p^2 + 2ap + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} = 0,$$

d'où

$$p = -a \pm i\omega_n, \quad \text{où} \quad \omega_n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} - a^2}.$$

Appliquant le deuxième théorème de développement, nous trouvons:

$$u(x, t) = U_0 \left\{ 1 - \frac{\pi e^{-at} v^2}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{\omega_n (\omega_n^2 + a^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} (a \sin \omega_n t + \omega_n \cos \omega_n t) \right\}. \qquad (29)$$

88. **Autres transformations intégrales.** La transformation de Laplace qui à chaque original $f(t)$ fait correspondre l'image $F(p)$, d'après la formule

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{1}$$

et à chaque image $F(p)$ l'original $f(t)$, d'après la formule d'inversion

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp, \tag{2}$$

est un cas particulier des transformations intégrales de la forme

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, K(t,\ p)\, dt, \tag{3}$$

où $K(t,\ p)$, noyau de la transformation intégrale, est une fonction donnée de la variable t et du paramètre p. On utilise ce genre de transformations pour résoudre les équations différentielles et d'autres problèmes d'analyse. Pour terminer ce chapitre, nous indiquons les plus importantes d'entre elles et nous donnons plusieurs exemples de leurs applications.

1) Transformation de Fourier. Puisque, dans la formule d'inversion de Laplace (2), l'intégration se fait sur la droite $\operatorname{Re} p = a$, on peut donc poser dans cette formule $p = a + i\sigma$ et elle se met sous la forme

$$f(t) = \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\sigma)\, e^{i\sigma t}\, d\sigma.$$

Introduisons de nouvelles notations

$$f(t)\, e^{-at} = g(t), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(a + i\sigma) = G(\sigma); \tag{4}$$

avec ces notations, la dernière formule s'écrit sous la forme

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) \cdot e^{i\sigma t}\, d\sigma. \tag{5}$$

La formule (1) de la transformation directe de Laplace peut s'écrire sous la forme

$$F(a + i\sigma) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-at} e^{-i\sigma t}\, dt,$$

ou, avec les nouvelles notations,

$$G(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(t)\, e^{-i\sigma t}\, dt. \tag{6}$$

Les formules (5) et (6) sont appelées *formules d'inversion de Fourier* et le passage de la fonction $g(t)$ à $G(\sigma)$ *transformation de Fourier*. Ainsi, la transformation de Laplace, qui relie les fonctions $f(t)$ et $F(p)$, est la transformation de Fourier qui relie les fonctions $g(t) = f(t)\, e^{-at}$ et $G(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(a + i\sigma)$, où a est un nombre réel quelconque supérieur à l'indice de croissance de la fonction $f(t)$.

Le domaine d'application de la transformation de Fourier est beaucoup plus restreint que celui de la transformation de Laplace. En effet, pour la convergence de l'intégrale impropre (6), la fonction $g(t)$ doit satisfaire à l'infini à une condition assez embarrassante, par exemple, à la condition d'intégrabilité absolue (*), c'est-à-dire à la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$. La présence dans l'intégrale de Laplace (1) du facteur supplémentaire e^{-at} qui « amortit » les valeurs de $f(t)$ pour les grandes valeurs de la variable, élargit la classe des originaux jusqu'aux fonctions qui croissent à l'infini au plus comme une exponentielle et, pratiquement, cette condition n'est nullement gênante.

Si, en particulier, l'indice de croissance de la fonction $f(t)$ est nul et si on peut prendre $a = 0$ dans la formule d'inversion de Laplace, alors la transformation de Laplace (1)-(2) ne diffère de la transformation de Fourier (6)-(5) que par des facteurs non essentiels devant les intégrales. Dans ce sens, on peut dire que la transformation de Fourier est un cas particulier de la transformation de Laplace (**).

Du point de vue de la physique, la transformation de Fourier est bien plus naturelle que la transformation de Laplace. Ceci s'explique par le fait que les formules (5)-(6) sont analogues aux formu-

(*) Pour que l'on puisse appliquer la transformation de Fourier, en plus de la condition d'intégrabilité absolue de la fonction $g(t)$, il suffit d'exiger que cette fonction soit continue par morceau et qu'elle ait une variation bornée sur chaque intervalle fini de l'axe des t ; pour la démonstration, voir, par exemple, *V. Smirnov*, t. II.

(**) Notons que dans la théorie de la transformation de Fourier on ne suppose d'ordinaire pas que $g(t)$ soit nulle pour les t négatifs, et c'est pourquoi on prend $-\infty$ et non zéro comme limite inférieure de l'intégrale dans la formule (6). Dans la théorie de la transformation de Laplace, on renonce parfois aussi à cette supposition et on est alors conduit à la transformation de Laplace dite bilatérale (cf., par exemple, *van der Pol* and *H. Bremmer*, « Operational calculus based on the two-sided Laplace integral », 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge 1955).

les de développement d'une fonction $g(t)$ en série de Fourier :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{in\sigma t}, \qquad G_n = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\, e^{-in\sigma t}\, dt$$

(T est la période de la fonction $g(t)$; cf. les formules (20)-(21) du n° 70). En effet, la formule (5) peut être considérée comme le développement d'une fonction $g(t)$ en spectre continu de vibrations harmoniques simples $G(\sigma)\, e^{i\sigma t}$, dont les fréquences ne varient pas par sauts, comme dans le cas des séries de Fourier, mais d'une manière continue. La fonction $G(\sigma)$ définie par la formule (6) peut être considérée comme l'analogue des coefficients de Fourier G_n, c'est-à-dire comme l'amplitude complexe d'une vibration de fréquence σ. La quantité $|G(\sigma)|$ montre quelle est la participation de cette vibration dans le spectre de vibrations de $g(t)$, et, pour cette raison, la fonction $G(\sigma)$ est appelée *fonction spectrale*.

D'après ce qui vient d'être dit, il est facile de comprendre que l'application de la transformation de Fourier est en beaucoup de points analogue à celle de la transformation de Laplace.

Comme exemple, considérons, dans ses traits généraux, le problème du mouvement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible sous l'action de la force de pesanteur. Pour plus de simplicité, limitons-nous au cas des ondes planes dans un fluide de profondeur infinie. Orientons l'axe des x horizontalement et perpendiculairement aux crêtes d'ondes et l'axe des y verticalement vers le haut et supposons que la position d'équilibre de la surface libre du fluide coïncide avec le plan $y = 0$ et qu'à l'instant initial la surface libre occupe la position d'équilibre.

Comme on le sait d'hydrodynamique (*), le potentiel des vitesses $u = u(x, y, t)$ du mouvement du fluide satisfait dans ce problème à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

et aux conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{pour} \quad y = 0, \tag{8}$$

$$u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad t = 0 \tag{9}$$

(la deuxième condition (9) est déterminée par notre supposition que, pour $t = 0$, la surface libre coïncide avec le plan $y = 0$).

Introduisons la transformée de Fourier du potentiel des vitesses

$$U(\sigma, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t)\, e^{-i\sigma x}\, dx ;$$

(*) Cf., par exemple, *Кочин*, *Кибель* и *Розе*, «Теоретическая гидромеханика», Гостехиздат, 1948, т. 1, стр. 399.

alors, en supposant que $\frac{\partial u}{\partial x}$ et u tendent vers zéro lorsque $|x| \to \infty$, nous avons $-\sigma^2 U$ (*) pour image de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et, par conséquent, nous avons l'équation

$$\frac{d^2U}{dy^2} - \sigma^2 U = 0$$

à la place de (7). La solution de cette équation, qui tend vers zéro lorsque $y \to -\infty$, a la forme

$$U = C(\sigma, t)\, e^{|\sigma| y}, \tag{10}$$

où $C(\sigma, t) = U|_{y=0}$. D'autre part, multipliant l'équation (8) par $\frac{e^{-i\sigma x}}{\sqrt{2\pi}}$ et intégrant par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$, nous obtenons :

$$|\sigma| C = -\frac{1}{g}\frac{d^2C}{dt^2},$$

d'où

$$C(\sigma, t) = c_1(\sigma)\, e^{i\sqrt{g|\sigma|}\, t} + c_2(\sigma)\, e^{-i\sqrt{g|\sigma|}\, t}. \tag{11}$$

Mais, pour $y = 0$ et $t = 0$, nous avons :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dC}{dt} = i\sqrt{g|\sigma|}\,\{c_1(\sigma) - c_2(\sigma)\}$$

et, d'après la deuxième condition (9), nous trouvons que $c_1(\sigma) = c_2(\sigma) = c(\sigma)$. Mais alors, d'après la première condition (9), pour $y = 0$ et $t = 0$, nous avons :

$$U = C(\sigma, 0) = 2c(\sigma) = \Phi(\sigma),$$

où $\Phi(\sigma)$ est la transformée de Fourier de la fonction $\varphi(x)$.

Ainsi, nous obtenons de (11) que $C = \Phi(\sigma)\cos\sqrt{g|\sigma|}\, t$ et nous trouvons de (10) l'image de la solution

$$U = \Phi(\sigma)\cos\sqrt{g|\sigma|}\, t e^{|\sigma| y};$$

pour trouver la solution, il suffit d'appliquer la formule d'inversion de Fourier (5)

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sigma)\cos\sqrt{g|\sigma|}\, t e^{|\sigma| y + i\sigma x}\, d\sigma. \tag{12}$$

Dans le cas général, le calcul de cette intégrale est difficile. Supposons pour simplifier que $\varphi(x) = A\delta(x)$, où $\delta(x)$ est la fonction impulsion (du point de vue de la physique, cela signifie que les ondes surgissent sous l'action d'une impulsion appliquée à l'origine des coordonnées). Alors, d'après les propriétés de l'intégrale de la fonction impulsion, nous trouvons que $\Phi(\sigma) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}$, et

(*) En effet, intégrant par parties, nous trouvons que, pour nos suppositions, l'image de la dérivée première a la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\sigma x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, u e^{-i\sigma x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\sigma x}\, dx = i\sigma U,$$

d'une façon analogue l'image de la dérivée seconde a la forme $(i\sigma)^2 U$.

de la formule (12) nous obtenons pour $y = 0$:

$$u(x, 0, t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \sqrt{g\,|\,\sigma\,|}\; t e^{i\sigma x} d\sigma = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \sqrt{\sigma g}\, t \cos \sigma x\, d\sigma$$

(nous avons séparé la partie réelle et tenu compte de ce que cos σx est une fonction paire). Après certaines transformations (que nous ne donnons pas), cette intégrale s'exprime à l'aide des intégrales de Fresnel (cf. l'exemple 6 du n° 73)

$$u(x, 0, t) = \frac{A}{x} \sqrt{\frac{2\tau}{\pi}} \{\cos \tau C(\tau) + \sin \tau S(\tau)\}\,; \qquad (13)$$

ici $\tau = \dfrac{gt^2}{4x}$.

2) Transformation de Mellin. Remplaçons dans les formules de la transformation de Laplace bilatérale (*) (1) et (2) les variables p par $-p$ et t par $\tau = e^t$; ces formules s'écrivent sous la forme

$$F(-p) = \int_0^{\infty} f(\ln \tau)\, e^{p \ln \tau} \frac{d\tau}{\tau}\,; \quad f(\ln \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(-p)\, e^{-p \ln \tau}\, dp.$$

Si on pose encore $f(\ln \tau) = g(\tau)$ et $F(-p) = G(p)$, nous arrivons aux *formules d'inversion de Mellin* (**) :

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t)\, t^{p-1}\, dt\,; \qquad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{G(p)}{t^p}\, dp \qquad (14)$$

(nous écrivons à nouveau t au lieu de τ).

(*) La transformation de Laplace bilatérale diffère de la transformation ordinaire par le fait que dans la formule (1) l'intégration se fait de $-\infty$ à ∞ et non de zéro à ∞ ; cf. le renvoi de la page 572.

(**) Pour que ces formules puissent être appliquées, il suffit que $G(p)$ soit analytique dans la bande $s_1 < s < s_2$, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} G(s + i\sigma)\, d\sigma$ converge absolument pour tous les s de cette bande et que $G(s + i\sigma)$ converge uniformément vers zéro, lorsque $|\,\sigma\,| \to \infty$, dans toute bande plus étroite $s_1 - \delta \leqslant s \leqslant s_2 + \delta$, $\delta > 0$; la droite d'intégration dans la deuxième formule doit appartenir à cette bande (cf., par exemple, *Courant* et *Hilbert* [2] de la bibliographie du chapitre VII, pp. 90-91).

On peut énoncer des conditions d'application en termes de la fonction $g(t)$: il suffit d'exiger que cette fonction soit continue par morceau, qu'elle ait une variation bornée sur chaque segment du demi-axe $t > 0$ et qu'il existe deux constantes s_1 et s_2, $s_1 < s_2$, telles que les intégrales $\int_0^{\infty} g(t)\, t^{s_1 - 1} dt$ et $\int_0^{\infty} g(t)\, t^{s_2 - 1}\, dt$ convergent absolument ; la droite d'intégration dans la deuxième formule doit aussi appartenir à la bande $s_1 < s < s_2$ (cf., par exemple, *Titchmarsh* [9], p. 46). Parfois, on combine ces types de conditions et on choisit, par exemple, s_1 de la condition de convergence de la première intégrale ci-dessus et s_2 comme l'abscisse du point singulier de la fonction $G(p)$ le plus proche de la droite $s = s_1$ et appartenant au demi-plan de droite Re $s > s_1$.

On démontre d'une manière élémentaire que la transformation de Mellin jouit de toute une série de propriétés analogues aux propriétés de la transformation de Laplace, par exemple:

$$g(\alpha t) \doteqdot \frac{G(p)}{\alpha^p}, \quad t^\alpha g(t) \doteqdot G(p+\alpha), \quad f(t)\, g(t) \doteqdot$$

$$\doteqdot \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(q)\, G(p-q)\, dq. \qquad (15)$$

Notons tout particulièrement le théorème de l'image de la dérivée: si les limites de $g(t)\, t^{p-1}$, lorsque $t \to 0$ et $t \to +\infty$, sont nulles, alors (*)

$$g'(t) \doteqdot -(p-1)\, G(p-1); \qquad (16)$$

appliquant plusieurs fois ce théorème, nous obtenons une formule pour l'image des dérivées d'ordres supérieurs. Les images simples renferment les produits $t^k g^{(k)}(t)$; intégrant par parties, nous obtenons: si $g(t)\, t^p \,|_{t=0}^{\infty} = 0$, alors

$$\mathrm{tg}'(t) \doteqdot -pG(p); \qquad (17)$$

si, de plus, $g'(t)\, t^{p+1} \,|_0^{\infty} = 0$, alors

$$t^2 g''(t) \doteqdot (p+1)\, pG(p), \qquad (18)$$

etc. Cette dernière propriété peut être utilisée pour résoudre les équations différentielles qui contiennent des termes de la forme $t^k \frac{d^k x}{dt^k}$.

Comme exemple d'application de la transformation de Mellin, considérons le problème du champ thermique stationnaire dans le secteur $|\arg z| < \alpha$, sur les côtés duquel on maintient une température constante u_0 pour les points vérifiant $|z| < a$ et une température nulle pour les points vérifiant $|z| > a$. Le problème se ramène à la résolution de l'équation

$$r^2 \Delta u = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad (19)$$

où Δ est l'opérateur de Laplace en coordonnées polaires r, φ avec les conditions aux limites

$$u|_{\varphi=\pm\alpha} = \begin{cases} u_0 & \text{pour } r < a, \\ 0 & \text{pour } r > a. \end{cases} \qquad (20)$$

Faisons la transformation de Mellin par rapport à la variable r; d'après les formules (18) et (17), nous trouvons que l'équation (19) a pour image l'équa-

(*) La démonstration se fait immédiatement en intégrant par parties

$$g'(t) \doteqdot \int_0^{\infty} g'(t)\, t^{p-1}\, dt = g(t)\, t^{p-1} \Big|_0^{\infty} - (p-1) \int_0^{\infty} g(t)\, t^{p-2}\, dt = -(p-1)\, G(p-1).$$

tion différentielle ordinaire

$$p^2U+\frac{d^2U}{d\varphi^2}=0,$$

dont la solution générale a la forme

$$U=A(p)\cos p\varphi+B(p)\sin p\varphi.$$

Les conditions aux limites (20) donnent après avoir passé aux images :

$$U|_{\varphi=\pm\alpha}=\int_0^a u_0 r^{p-1}\,dr=u_0\frac{a^p}{p},$$

donc, nous devons avoir :

$$A(p)\cos p\alpha\pm B(p)\sin p\alpha=u_0\frac{a^p}{p}.$$

D'où nous trouvons $A(p)=u_0\dfrac{a^p}{p\cos p\alpha}$, $B(p)=0$ et nous obtenons l'image de la solution

$$U=u_0\frac{a^p\cos p\varphi}{p\cos p\alpha}.$$

La solution est trouvée à l'aide de la formule d'inversion de Mellin

$$u=\frac{u_0}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^p\frac{\cos p\varphi}{\cos p\alpha}\frac{dp}{p}.$$

La fonction à intégrer est analytique dans la bande $0<\operatorname{Re}p<1$ car le pôle le plus proche de $p=0$ de la fonction à intégrer coïncide avec le point $p=\dfrac{\pi}{2\alpha}>1$ si $\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ (ce que nous supposons justement). Donc, dans la dernière formule, on peut prendre pour s un nombre arbitraire tel que $0<s<1$ (*). En passant à la limite, lorsque $s\to 0$, nous pouvons prendre l'intégrale le long de l'axe imaginaire du plan des p en contournant le point $p=0$ par une demi petite circonférence dans le sens positif. Sur cette demi-circonférence, l'accroissement de l'intégrale est égal au résidu de la fonction à intégrer au point $p=0$ multiplié par πi, c'est-à-dire à πi, et nous obtenons :

$$u=\frac{u_0}{2}+\frac{u_0}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{i\sigma}\frac{\operatorname{ch}\sigma\varphi}{\operatorname{ch}\sigma\alpha}\frac{d\sigma}{\sigma},$$

où l'intégrale est prise au sens de la valeur principale. Tenant compte de ce que $\left(\dfrac{a}{r}\right)^{i\sigma}=e^{i\sigma\ln\frac{a}{r}}=\cos\left(\sigma\ln\dfrac{a}{r}\right)+i\sin\left(\sigma\ln\dfrac{a}{r}\right)$ et de ce que les fonctions à intégrer sont respectivement paires et impaires, nous trouvons

$$u=\frac{u_0}{2}+\frac{u_0}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left(\sigma\ln\frac{a}{r}\right)\frac{\operatorname{ch}\sigma\varphi}{\operatorname{ch}\sigma\alpha}\frac{d\sigma}{\sigma}. \tag{21}$$

(*) Cf. le renvoi de la page 575 pour le choix de s.

3) Transformation de Hankel. Par analogie avec (1), on peut écrire la transformation de Fourier à deux dimensions

$$G(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, e^{-i(\sigma x + \tau y)}\, dx\, dy,$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma, \tau)\, e^{i(\sigma x + \tau y)}\, d\sigma\, d\tau.$$

Passons ici aux coordonnées polaires, en posant $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ et $\sigma = \rho\cos\theta$, $\tau = \rho\sin\theta$; nous avons :

$$\left.\begin{aligned} G(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r\, dr \int_0^{2\pi} g(r, \varphi)\, e^{-ir\rho\cos(\varphi-\theta)}\, d\varphi, \\ g(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} G(\rho, \theta)\, e^{ir\rho\cos(\varphi-\theta)}\, d\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Posons, en particulier, $g(r, \varphi) = e^{-in\varphi} g(r)$, où n est un nombre entier, et remplaçons dans la première formule (22) $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + t$; tenant compte de la propriété bien connue de l'intégrale d'une fonction périodique, nous avons alors :

$$G(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi} e^{-in\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \int_0^{\infty} g(r)\, r\, dr \int_0^{2\pi} e^{i(r\rho\sin t - nt)}\, dt.$$

D'après la formule (15) du n° 70, l'intégrale par rapport à t est égale à $2\pi J_n(r\rho)$, où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. Donc, posant $G(\rho, \theta)\, e^{in\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = G_n(\rho)$, nous pouvons écrire la dernière formule sous la forme

$$G_n(\rho) = \int_0^{\infty} g(r)\, J_n(r\rho)\, r\, dr. \qquad (23)$$

Avec les nouvelles notations, la deuxième formule (22) prend la forme

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_n(\rho)\, \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} e^{i\left[n\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{2}\right) + r\rho\cos(\varphi-\theta)\right]}\, d\theta.$$

Après le changement de variables $\theta - \varphi = t - \frac{\pi}{2}$, l'intégrale par rapport à t se ramène à la formule (15) du n° 70 et nous obtenons :

$$g(r) = \int_0^{\infty} G_n(\rho)\, J_n(r\rho)\, \rho\, d\rho. \qquad (24)$$

Les formules (23) et (24) sont appelées *formules d'inversion de Hankel d'ordre n* (ou encore *formules de Fourier-Bessel*) (*).

Précisons la forme des formules pour les images des dérivées par les transformations considérées. D'après la définition de la transformation de Hankel d'ordre n

$$g'(r) \doteqdot \int_0^\infty \frac{dg}{dr} J_n(r\rho)\, r\, dr = rg(r) J_n(r\rho)\Big|_{r=0}^{\infty} - \int_0^\infty g(r) \frac{d}{dr}[rJ_n(r\rho)]\, dr$$

(nous avons eu recours à la formule d'intégration par parties). Supposant que le premier terme du second membre soit nul et ayant recours à la formule (22) du n° 95, d'après laquelle $J_n'(r\rho) = J_{n-1}(r\rho) - \frac{n}{r\rho} J_n(r\rho)$, nous trouvons:

$$\frac{d}{dr}[rJ_n(r\rho)] = rJ_n(r\rho) + \rho r J_n'(r\rho) = -(n-1) J_n(r\rho) + \rho r J_{n-1}(r\rho)$$

et

$$g'(r) \doteqdot (n-1) \int_0^\infty g(r) J_n(r\rho)\, dr - \rho \int_0^\infty g(r) J_{n-1}(r\rho)\, r\, dr.$$

L'intégrale du second terme dans le second membre est égale à la transformée de Hankel d'ordre $n-1$ de la fonction $g(r)$, que nous désignons par $G_{n-1}(\rho)$. L'intégrale du premier terme du second membre est égale à la transformée de Hankel d'ordre n de la fonction $\frac{g(r)}{r}$, mais il nous est plus commode de l'exprimer par l'image de la fonction même. Pour cela, nous avons recours à la formule de récurrence (23) du n° 95, d'après laquelle $\frac{J_n(r\rho)}{r} = \frac{\rho}{2n}[J_{n-1}(r\rho) + J_{n+1}(r\rho)]$, et nous trouvons la formule

$$g'(r) \doteqdot -\rho\left[\frac{n+1}{2n} G_{n-1}(\rho) - \frac{n-1}{2n} G_{n+1}(\rho)\right]. \qquad (25)$$

La formule que nous venons d'obtenir est assez compliquée; les formules pour les images de $g''(r)$ et des dérivées d'ordres supérieurs le sont encore plus. Sans écrire ces formules, trouvons l'image d'une certaine combinaison des fonctions g, g' et g''. Supposant que

(*) Pour que l'on puisse appliquer les formules d'inversion de Hankel, il suffit, par exemple, que la fonction $g(r)$ soit continue par morceau, qu'elle ait une variation bornée sur chaque intervalle fini du demi-axe $r > 0$ et que l'intégrale $\int_0^\infty g(r)\sqrt{r}\, dr$ soit absolument convergente (cf., par exemple, *Watson* [7] de la bibliographie du chapitre VII, pp. 456-464).

$rg'(r)\,J_n(r\rho)\,|_0^\infty = 0$ et intégrant par parties, nous obtenons:

$$\int_0^\infty \frac{d^2g}{dr^2}\,J_n(r\rho)\,r\,dr = -\int_0^\infty \frac{dg}{dr}\,\frac{d}{dr}\,[rJ_n(r\rho)]\,dr,$$

donc

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dg}{dr}\right) J_n(r\rho)\,r\,dr =$$

$$= -\rho\int_0^\infty \frac{dg}{dr}\,rJ_n'(r\rho)\,dr = \rho\int_0^\infty g(r)\,\frac{d}{dr}\,[rJ_n'(r\rho)]\,dr$$

(nous avons intégré encore une fois par parties et nous avons tenu compte de ce que $rg(r)\,J_n'(r\rho)\,|_0^\infty = 0$). Mais, d'après l'équation (1) du n° 95, à laquelle satisfait la fonction $J_n(r\rho)$, nous avons:

$$\rho\,\frac{d}{dr}\,[rJ_n'(r\rho)] = -\left(\rho^2-\frac{n^2}{r^2}\right) rJ_n(r\rho),$$

donc, on peut écrire la dernière formule sous la forme

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dg}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}\,g\right) J_n(r\rho)\,r\,dr = -\rho^2\int_0^\infty g(r)\,J_n(r\rho)\,r\,dr.$$

Ainsi, si $rg'(r)\,J_n(r\rho)\,|_0^\infty = rg(r)\,J_n'(r\rho)\,|_0^\infty = 0$, alors

$$g''(r)+\frac{1}{r}\,g'(r)-\frac{n^2}{r^2}\,g(r) \doteqdot -\rho^2 G_n(\rho). \tag{26}$$

En particulier, pour la transformation de Hankel d'ordre zéro, nous avons:

$$g''(r)+\frac{1}{r}\,g'(r) \doteqdot -\rho^2 G(\rho), \tag{27}$$

où

$$G(\rho) = G_0(\rho). \tag{28}$$

On rencontre la combinaison des dérivées, qui participe dans le premier membre de la formule (27), dans l'expression de l'opérateur de Laplace en coordonnées cylindriques ou polaires. Pour cette raison, la transformation de Hankel est appliquée en général dans les problèmes qui contiennent cette expression.

Comme exemple, considérons le problème classique du potentiel d'un champ engendré par un disque plan parcouru par un courant électrique (Weber). Le problème se ramène à l'intégration de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{29}$$

où z est la coordonnée sur l'axe perpendiculaire au disque, avec les conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned} &u|_{z=0} = u_0 \quad \text{pour } 0 \leqslant r < 1, \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad \text{pour } r > 1 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

(u_0 est une constante, la deuxième condition exprime la symétrie du champ par rapport au plan $z = 0$).

Appliquons la transformation de Hankel d'ordre zéro. D'après la formule (27), l'équation opérationnelle s'écrit sous la forme

$$-\rho^2 U + \frac{d^2U}{dz^2} = 0,$$

où U est l'image de la fonction u, et sa solution générale se met sous la forme

$$U = A(\rho)\, e^{-\rho z} + B(\rho)\, e^{\rho z}.$$

En vertu de la symétrie, il suffit de considérer le champ pour $z > 0$; puisque, lorsque $z \to +\infty$, le potentiel doit tendre vers zéro, on a $B = 0$ et, d'après la formule d'inversion de Hankel (24),

$$u(r, z) = \int_0^\infty A(\rho)\, e^{-\rho z} J_0(r\rho)\, \rho\, d\rho.$$

Les conditions aux limites s'écrivent sous la forme

$$\int_0^\infty A(\rho)\, J_0(r\rho)\, \rho\, d\rho = u_0 \quad \text{pour } 0 \leqslant r < 1,$$

$$\int_0^\infty A(\rho)\, J_0(r\rho)\, \rho^2\, d\rho = 0 \quad \text{pour } r > 1.$$

Les comparant à des relations connues (*) :

$$\int_0^\infty J_0(r\rho)\, \frac{\sin\rho}{\rho}\, d\rho = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } 0 \leqslant r < 1,$$

$$\int_0^\infty J_0(r\rho)\, \sin\rho\, d\rho = 0 \quad \text{pour } r > 1,$$

nous voyons que la fonction

$$A(\rho) = \frac{2u_0}{\pi}\, \frac{\sin\rho}{\rho^2}$$

satisfait à ces deux conditions. Tenant compte de l'unicité de la solution du problème (elle est évidente à partir de considérations physiques), nous obtenons :

$$u(r, z) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho z} J_0(r\rho)\, \frac{\sin\rho}{\rho}\, d\rho. \tag{31}$$

(*) Cf. les formules (9) et (11) du n° 99.

4) Inversion d'une intégrale de contour. Pour terminer, donnons un exemple de formule d'inversion d'un type un peu différent. Ce genre de formule est appliqué pour résoudre les équations différentielles au moyen d'intégrales de contour.

Soit $g(z)$ une fonction analytique dans un domaine D qui contient l'origine des coordonnées et soit

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta^N g(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^N}, \tag{32}$$

où C est la frontière du domaine D, N un nombre positif et $\frac{\zeta^N}{(\zeta-z)^N}$ la fonction analytique uniforme dans le domaine D coupé suivant le chemin γ qui réunit les points 0 et z. Alors, $g(z)$ est complètement déterminée par la formule

$$g(z)=\int_0^1 (1-\zeta)^{N-1} f'(z\zeta)\,d\zeta. \tag{33}$$

Pour établir cette formule, supposons d'abord que le point z appartient au cercle de convergence du développement en série de Taylor de $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ et déformons le contour C jusqu'à obtenir un contour c appartenant aussi à ce cercle et contenant à son intérieur la coupure γ. Portant ce développement dans la formule (32) et intégrant terme à terme, nous trouvons:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta^{N+k}\,d\zeta}{(\zeta-z)^N}. \tag{34}$$

On trouve le résidu de la fonction à intégrer au point $\zeta=\infty$ à partir du développement de la fonction $\zeta^k\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-N}$, et il est égal à

$$-\frac{N(N+1)\ldots(N+k)}{(k+1)!}z^{k+1}=-\frac{\Gamma(N+k+1)}{\Gamma(k+2)\,\Gamma(N)}z^{k+1}.$$

Puisque l'intégrale du k-ième terme de la formule (34) est égale à ce résidu multiplié par $-2\pi i$, dans le développement de $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, nous avons:

$$b_{k+1}=\frac{\Gamma(N+k+1)}{\Gamma(k+2)\,\Gamma(N)}c_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{35}$$

Par ailleurs, l'intégrale du second membre de (33) est égale à

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, b_{k+1} z^k \int_0^1 \zeta^k (1-\zeta)^{N-1}\, d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, b_{k+1} z^k \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(N)}{\Gamma(N+k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} \frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(N)}{\Gamma(N+k+1)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = g(z)$$

(pour calculer l'intégrale, c'est-à-dire la fonction bêta d'Euler, nous avons eu recours à la formule (2) du n° 90, et, d'après la formule (35), nous avons remplacé b_{k+1} par c_k). Ainsi, la formule (33) est démontrée dans le cas de la supposition faite plus haut. Pour la démontrer pour tous les z du domaine D, il suffit d'avoir recours au prolongement analytique.

Les formules d'inversion (32)-(33) ont été obtenues par Mackie (*) qui les a utilisées pour résoudre l'équation d'Euler-Poisson ayant d'importantes applications dans la dynamique des gaz.

BIBLIOGRAPHIE

[1] А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, ДНТВУ, 1937.
[2] А. М. Лурье, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1950.
[3] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Operational methods in applied mathematics, 2d. ed. | Lnd |, Oxford Univ. Press, 1948.
[4] М. И. Канторович, Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, Гостехиздат, 1949.
[5] К. А. Круг, Переходные процессы в линейных электрических цепях, Гостехиздат, 1948.
[6] А. В. Лыков, Теплопроводность нестационарных процессов, Госэнергоиздат, 1948.
[7] С. И. Евтянов, Переходные процессы в приемно-усилительных схемах, Гостехиздат, 1948.
[8] Б. В. Булгаков, Колебания, ч. I. Физматгиз, 1948.
[9] E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier intergrals, 2nd. ed., Clarendon Press, Oxford 1951.
[10] I. N. Sneddon, Fourier transforms, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London 1951.
[11] В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, 1951.
[12] Jan G. Mikusiński, Rachunek operatorów, Warszawa 1957.

(*) *A. G. Mackie*, « Contour integral solutions of a class of differential equations », J. Rational Mech. and Analysis, 4, 5 (1955), 733-750.

CHAPITRE VII

Fonctions spéciales

Nous donnons dans ce chapitre les classes fondamentales de fonctions dites spéciales, que l'on rencontre souvent dans les problèmes appliqués, et leurs applications les plus courantes. A titre d'exemples, nous avons déjà considéré plusieurs de ces fonctions (fonction gamma, fonctions cylindriques, polynômes spéciaux de Tchébicheff, de Legendre et autres) dans les chapitres précédents ; ici, leurs propriétés sont exposées d'une manière systématique.

Les méthodes fondamentales de l'étude des propriétés des fonctions spéciales vont être les méthodes développées dans les chapitres précédents. Toutefois, de nombreuses propriétés importantes des fonctions spéciales ne sont pas liées à la théorie des fonctions d'une variable complexe et nous allons aborder parfois des questions assez éloignées de cette théorie.

Le chapitre présent se pose pour but de donner une vue d'ensemble sur les propriétés les plus importantes des fonctions spéciales. On a parfois besoin, dans les applications de divers problèmes concrets, de propriétés beaucoup plus fines. N'ayant pas la possibilité de s'arrêter sur celles-ci, nous renvoyons le lecteur à la bibliographie.

§ 1. FONCTION GAMMA D'EULER

Un grand nombre de formules de l'analyse mathématique utilise la fonction « gamma » introduite en 1729 par Euler ; dans les chapitres précédents nous l'avons rencontrée à maintes reprises. Le fait qu'elle est le prolongement naturel des factorielles aux valeurs fractionnaires et même complexes de la variable suffit pour en comprendre la signification (*). C'est précisément cette considération qui se trouve à la base de la définition de la fonction gamma.

89. Définition et propriétés fondamentales. Considérons l'équation fonctionnelle

$$f(z+1) = zf(z) \tag{1}$$

qui pour toutes les valeurs entières non négatives $z = n$ est satisfaite par la fonction

$$f(n+1) = n! \tag{2}$$

(*) Comparer, par exemple, avec la formule (4) du n° 83.

Nous allons chercher une fonction analytique $f(z)$ *qui vérifie l'équation* (1) *pour toutes les valeurs complexes* z *et que nous supposons égale à* 1 *pour* $z = 1$ (*condition I*).

Remarquons d'abord que la fonction cherchée doit satisfaire pour tous les entiers positifs n à l'équation

$$f(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\ldots(z+1)f(z+1) \quad (3)$$

que l'on obtient en appliquant plusieurs fois la formule (1).

Faisant $z = 0$ dans la relation (3) il vient que pour tous les entiers positifs n la valeur $f(n+1)$ coïncide avec $n!$.

Remplaçant dans (3) $f(z+1)$ par $zf(z)$ et écrivant cette relation sous la forme

$$f(z) = \frac{f(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)\ldots z}, \quad (4)$$

nous voyons que la fonction cherchée $f(z)$ doit avoir des pôles en tous les points entiers non positifs $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). En effet, lorsque $z \to -n$, le numérateur de l'expression (4) tend vers 1 et le dénominateur vers zéro.

De cette même formule (4) on voit que

$$\lim_{z\to -n}(z+n)f(z) = \frac{1}{(-1)(-2)\ldots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (5)$$

c'est-à-dire que tous les pôles de $f(z)$ sont du premier ordre, de plus le *résidu au pôle* $z = -n$ *est égal à* $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Supposons encore que $f(z)$ *ne possède pas de singularités autres que* $z = 0, -1, -2, \ldots$, *et ne s'annule nulle part* (*condition II*).

La dérivée logarithmique de la fonction $f(z+1)$:

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln f(z+1) = \frac{f'(z+1)}{f(z+1)},$$

est une fonction méromorphe qui a des pôles simples aux points $z = -1, -2, \ldots$, de résidus -1 (cf. n° 23). En prenant les logarithmes dans les deux membres de la formule (3) et en la dérivant nous avons :

$$\psi(z+n+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k} + \psi(z+1).$$

Faisons isi $z = 0$ et posons $\psi(1) = -C$:

$$\psi(n+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - C\,;$$

retranchant l'égalité obtenue de la précédente nous trouvons:

$$\psi(z+1) = -C - \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right\} + \psi(z+n+1) - \psi(n+1). \quad (6)$$

Il est clair que la série de terme général

$$u_k(z) = \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} \frac{-z}{1+\frac{z}{k}},$$

converge pour tout $z \neq -k$ ($k = 1, 2, \ldots$), car le rapport de son terme général au terme général de la série convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ tend vers une limite finie $-z$. En outre, dans tout domaine borné, à partir d'un certain k, nous avons $| u_k(z) | \leqslant \frac{M}{k^2}$, où M est une constante, donc cette série converge uniformément. Ainsi, d'après le théorème de Weierstrass (n° 16), la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ est une fonction analytique en tous les points à distance finie, excepté les points $z = -k$ ($k = 1, 2, \ldots$) qui sont des pôles du premier ordre de résidus -1.

Passons à la limite dans la formule (6) lorsque $n \to \infty$; d'après ce qui précède, la limite de $\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ existe, donc la limite de $\psi(z + n + 1) - \psi(n + 1)$ existe aussi et nous la désignons par $\psi_0(z)$. Nous avons à la limite

$$\psi(z+\psi(z+1) = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right\} + \psi_0(z). \quad (7)$$

Puisque, d'après ce qui a été démontré, $f(z + 1)$ a des pôles du premier ordre aux points $z = -k$ ($k = 1, 2, \ldots$), les parties principales de sa dérivée logarithmique $\psi(z + 1)$ sont en ces points égales à $-\frac{1}{z+k}$ (cf. n° 23). Il en découle que $\psi_0(z)$ est une fonction entière. Inversement, il est clair que quelle que soit la fonction entière $\psi_0(z)$, la fonction $f(z)$ définie par sa dérivée logarithmique $\psi(z)$ satisfait à la condition II.

La condition I impose une restriction supplémentaire à la fonction $\psi_0(z)$. En effet, en prenant les logarithmes dans les deux membres de l'équation fonctionnelle (1) et en dérivant l'équation ainsi obtenue nous trouvons l'équation suivante pour la fonction $\psi(z)$:

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}. \quad (8)$$

Mais il découle de l'égalité (7):

$$\psi(z+1)-\psi(z)=\frac{1}{z}+\psi_0(z)-\psi_0(z-1)$$

(la constante C et tous les termes, excepté le premier, se simplifient lorsqu'on effectue les soustractions), donc, pour que la relation (8) soit satisfaite, la fonction $\psi_0(z)$ doit être périodique de période 1, c'est-à-dire $\psi_0(z)=\psi_0(z-1)$. Inversement, pour toute pareille fonction $\psi_0(z)$, la fonction $\psi(z)$ satisfait à l'équation (8) et, en intégrant et en dérivant cette dernière, nous trouvons:

$$\ln f(z+1)-\ln f(z)=\ln z+A,$$

où A est une constante. Si de plus la fonction $f(z)$ satisfait aux conditions $f(1)=f(2)=1$, en faisant $z=1$ dans cette dernière équation nous trouvons que $A=0$, c'est-à-dire que, en se débarrassant des logarithmes, nous retrouvons l'équation fonctionnelle (1).

Ainsi, pour toute fonction entière $\psi_0(z)$ périodique de période 1 la fonction correspondante $f(z)$ (si $f(1)=f(2)=1$) vérifie les deux conditions I et II. Autrement dit, toute une classe de fonctions méromorphes satisfait aux conditions I et II. Nous obtenons la fonction la plus simple de cette classe si nous posons $\psi_0(z)\equiv 0$ dans (7). Elle est appelée *fonction gamma d'Euler* et on la note $\Gamma(z)$.

On a donc, pour la dérivée logarithmique de la fonction gamma, le développement

$$\psi(z+1)=-C-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right\}, \tag{9}$$

où C est une constante que nous allons déterminer. En intégrant le développement (9) le long d'un chemin qui réunit le point $z=0$ à un point arbitraire $z\neq k$ ($k=-1,-2,\ldots$) et ne contient pas les points k, nous trouvons le développement du logarithme de la fonction gamma:

$$\ln\Gamma(z+1)=-Cz-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\ln\left(1+\frac{z}{k}\right)-\frac{z}{k}\right\}. \tag{10}$$

La constante C est définie par la condition $\Gamma(2)=1$ que nous avons imposée plus haut à la fonction gamma (*). Faisant $z=1$ dans (10), nous trouvons:

$$C=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right\}.$$

(*) La deuxième condition $\Gamma(1)=1$ est vérifiée pour tout C en vertu du choix de l'origine du chemin d'intégration (comparer avec le développement (10)).

Le produit ci-dessus, comme il est aisé de le voir, est égal à $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\ldots$ $\ldots\frac{n+1}{n}=n+1$; ajoutant à la somme, dont on prend la limite, le terme $\frac{1}{n+1}$ qui tend vers zéro et remplaçant $n+1$ par n nous trouvons :

$$-\psi(1)=C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right). \tag{11}$$

Cette constante est appelée *constante d'Euler* ; sa valeur approchée est 0,5772157 (*).

En se débarrassant du logarithme dans la formule (10), nous trouvons la représentation de la fonction $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ sous la forme d'un produit infini

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}. \tag{12}$$

Le produit infini que nous venons d'obtenir converge pour tous les z finis ; pour $z\neq -k$ ($k=1, 2, \ldots$) cela découle de la convergence de la série (9) et du théorème 1 du n° 72, et l'on voit directement que pour $z=-k$ il converge vers zéro.

Enumérons les propriétés fondamentales de la fonction gamma que nous avons déduites de la définition :

1) $\Gamma(z)$ *est analytique partout, excepté aux points entiers négatifs et au point* $z=0$.

2) $\Gamma(z)$ *satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{13}$$

ou à celle plus générale

$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\ldots(z+1)\,\Gamma(z+1). \tag{14}$$

3) *Pour tous les entiers positifs* $z=n$ *la valeur de* $\Gamma(n+1)$ *coïncide avec* $n!$:

$$\Gamma(n+1)=n!. \tag{15}$$

4) *Tous les pôles de la fonction gamma sont du premier ordre, le résidu de* $\Gamma(z)$ *au pôle* $z=-n$ *est* $\frac{(-1)^n}{n!}$ ($n=0, 1, 2, \ldots$).

Nous concluons de la convergence du produit infini (12) que

5) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *est une fonction entière, donc la fonction gamma ne s'annule pas.*

(*) On rencontre la constante d'Euler C dans d'autres questions.

Les propriétés 3)-5) expliquent le caractère général du graphe de la fonction $\Gamma(x)$ de la variable réelle x. Ce graphe est donné sur la fig. 192 (*) ; les pointillés représentent le graphe de $\frac{1}{\Gamma(x)}$. On donne sur la fig. 193 la surface d'équation $u = |\Gamma(z)|$. Des pics bien prononcés s'élèvent au-dessus des points $z = 0, -1, -2, \ldots$ et correspondent aux pôles. Les deux familles de courbes tracées sur la surface représentent les familles de courbes équimodule et équiargument, et les caractéristiques numériques qui y sont inscrites indiquent les valeurs du module et de l'argument (pour ce dernier en degrés).

Donnons encore quelques propriétés de la fonction gamma. En plus de la relation (13), une deuxième équation fonctionnelle pour la fonction gamma est utile dans de nombreuses questions.

6) *Pour tous les z complexes*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{16}$$

(*pour $z = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, les deux membres de cette égalité deviennent infinis*).

Pour établir cette relation, portons d'abord $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dans la formule (12), nous obtenons :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z}{\Gamma(z+1)} = ze^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}, \tag{17}$$

puis remplaçons dans cette même formule (12) z par $-z$:

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}}.$$

Multipliant les produits infinis obtenus (ce qui est légitime vu leur convergence absolue, cf. n° 72), nous trouvons :

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le développement de $\sin \pi z$ en produit infini (cf. n° 72), d'où découle la formule (16) que nous voulions établir.

(*) Les maxima et les minima de $\Gamma(x)$ pour les x négatifs tendent vers zéro lorsque $x \to -\infty$; ceci est lié à ce que, d'après la propriété 4), le résidu, c'est-à-dire le coefficient de la partie principale du développement de $\Gamma(x)$ au voisinage du point $x = -n$, décroît rapidement avec la croissance de n :

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n} + c_0 + c_1 (x+n) + \ldots$$

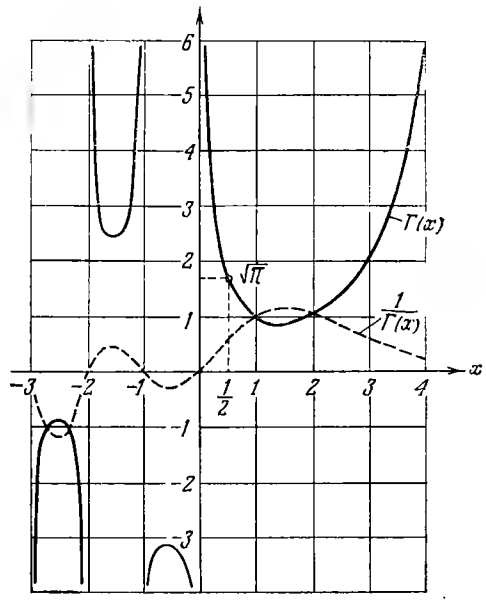

FIG. 192

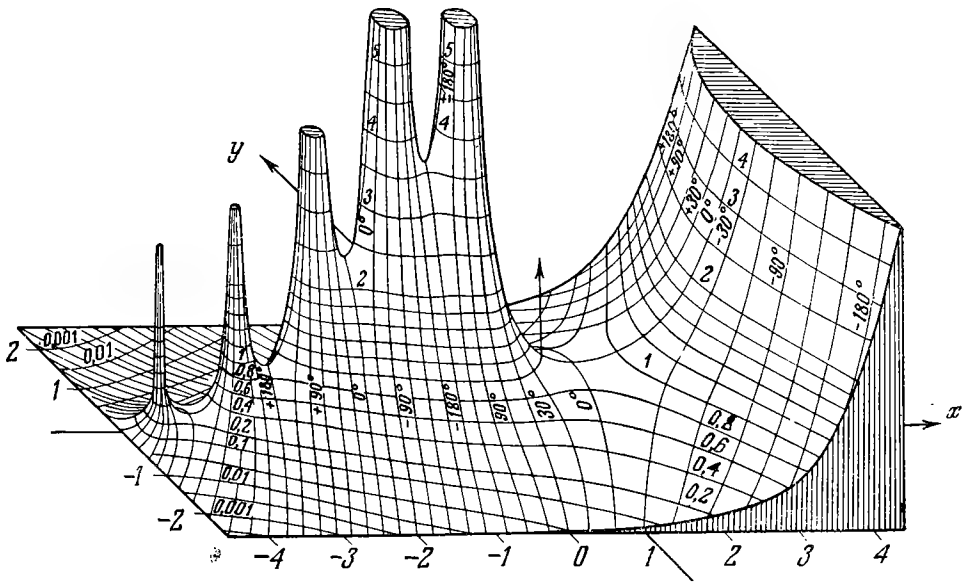

FIG. 193

Donnons plusieurs conséquences des formules obtenues. Faisant $z = \frac{1}{2}$ dans la formule (16), nous trouvons que $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$, d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Appliquant maintenant la formule (14) dans laquelle on fait $z = -\frac{1}{2}$, nous trouvons :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \quad (18)$$

Faisant $z = n+\frac{1}{2}$ dans (16), nous avons :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} = (-1)^n\pi.$$

d'où, d'après (18), nous déduisons une formule que nous avons déjà utilisée au n° 83 :

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = (-1)^n\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\sqrt{\pi} = (-1)^n\frac{4^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}. \quad (19)$$

Arrêtons-nous sur les représentations intégrales de la fonction gamma, que nous avons également utilisées dans les chapitres précédents.

7) *Pour tous les z du demi-plan de droite*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \quad (20)$$

où l'intégration se fait suivant le demi-axe positif des t (*Euler*).

Pour démontrer cette représentation remarquons d'abord que l'intégrale (20) converge pour tous les z pour lesquels $x = \operatorname{Re} z > 0$. En effet, $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t+(x-1)\ln t} = e^{-t}t^{x-1}$, et nous voyons que lorsque $t \to \infty$, la convergence de l'intégrale (pour x arbitraire) est assurée par le facteur e^{-t}, et lorsque $t \to 0$, la fonction à intégrer est équivalente à t^{x-1}, donc, pour $x > 0$, l'intégrale est convergente.

Considérons maintenant la fonction

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt;$$

introduisant ici une nouvelle variable d'intégration $\tau = \frac{t}{n}$ et appliquant ensuite la formule d'intégration par parties, nous trouvons:

$$f_n(z) = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}\, d\tau = \frac{n^z}{z}\, n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z\, d\tau$$

(la partie intégrée est nulle). Répétant cette astuce jusqu'à ce que le facteur $(1-\tau)$ disparaisse, nous obtenons:

$$f_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1}\, d\tau =$$

$$= \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)} = \frac{e^{z \ln n}}{z \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)}$$

Multiplions par $e^{-z \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{z}{k}}$ le numérateur et le dénominateur de l'expression que nous venons d'obtenir, nous avons:

$$f_n(z) = \frac{e^{z\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)}}{z \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}}.$$

Passons maintenant à la limite lorsque $n \to \infty$; en vertu des formules (11), (12) et (13) nous trouvons:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1}{z e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}} = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z).$$

D'autre part, étant donné que $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \to e^{-t}$, lorsque $n \to \infty$, il est donc naturel de s'attendre à ce que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad (21)$$

et ainsi la formule (20) est démontrée. Pour démontrer cette dernière relation nous utilisons l'inégalité (*)

$$0<e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n<\frac{t^2}{2n} \quad \text{pour } 0<t<n. \tag{22}$$

Evaluons la différence entre la limite éventuelle et $f_n(z)$:

$$\Delta=\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}\,dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

En vertu de la convergence de l'intégrale (20), pour tout $\varepsilon>0$ fixe, on peut trouver un numéro n_0 tel que pour $n>n_0$

$$\left|\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt\right|\leqslant\int_n^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{23}$$

Fixons ce numéro n_0 et, pour tout $n>n_0$, représentons Δ sous la forme

$$\Delta=\int_0^{n_0}\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}\,dt+$$

$$+\int_{n_0}^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}\,dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

Pour évaluer le premier terme, nous avons recours à l'inégalité (22) :

$$\left|\int_0^{n_0}\right|<\frac{1}{2n}\int_0^{n_0}t^{x+1}\,dt,$$

d'où l'on voit que pour les n suffisamment grands (et n_0 fixe) ce premier terme n'est pas supérieur à $\frac{\varepsilon}{3}$ en valeur absolue. On a

(*) En dérivant par rapport à t on vérifie la formule

$$1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\int_0^t e^{-\tau}\left(1-\frac{\tau}{n}\right)^{n-1}\frac{\tau}{n}\,d\tau,$$

de plus l'intégrale du second membre est comprise entre zéro et $\int_0^t e^t\,\frac{\tau}{n}\,d\tau=$ $=e^t\,\frac{t^2}{2n}$, d'où découle l'inégalité (22).

pour le second terme :

$$\left|\int_{n_0}^{n}\right| \leqslant \int_{n_0}^{n}\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right]t^{x-1}\,dt < \int_{n_0}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

(nous négligeons la quantité que l'on a retranchée et nous agrandissons l'intervalle d'intégration, puis nous appliquons l'inégalité (22)). Le module du troisième terme, pour tous les $n \geqslant n_0$, n'est pas supérieur à $\frac{\varepsilon}{3}$, par conséquent, $|\Delta| < \varepsilon$. La relation (21) est démontrée et, par suite, la formule (20) aussi.

De la représentation intégrale d'Euler (20) on a obtenu (*)

8) *les représentations intégrales de la fonction gamma dans tout le plan* (*Hankel*) :

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\int_{C} e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta, \tag{24}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} e^{\zeta}\zeta^{-z}\,d\zeta. \tag{25}$$

Ici C et C^* sont les contours indiqués sur les fig. 165 et 166. La formule (24) représente la fonction méromorphe $\Gamma(z)$ comme le rapport de deux fonctions entières (cf. n° 72) ; la formule (25) représente la fonction entière $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

9) Pour terminer donnons la formule asymptotique de la fonction gamma (*Stirling*), obtenue au numéro 77 :

pour les grands x positifs :

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\left\{1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}. \tag{26}$$

90. Exemples. Compléments. Comme premier exemple d'application de la fonction gamma nous donnons le calcul de l'*intégrale d'Euler de première espèce* (**), appelée encore *fonction bêta d'Euler*, qui pour Re $z > 0$, Re $w > 0$ est définie par la relation

$$B(z, w) = \int_{0}^{1} \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}\,d\tau \tag{1}$$

(l'intégrale (1) converge évidemment vu nos suppositions). Pour calculer l'intégrale (1) nous avons recours au calcul opérationnel.

(*) Cf. n° 74, formules (12) et (15).

(**) Introduite par L. Euler dans son article publié dans « Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae » en 1772.

Considérons une intégrale un peu plus générale

$$\int_0^t \tau^{z-1}(t-\tau)^{w-1}\,d\tau = t^{z-1} * t^{w-1},$$

qui est la convolution des fonctions t^{z-1} et t^{w-1} (cf. n° 81) et qui donne $B(z, w)$ pour $t = 1$. D'après le théorème de multiplication (n° 81) l'image de cette convolution est le produit des images de t^{z-1} et t^{w-1}, c'est-à-dire

$$t^{z-1} * t^{w-1} \doteq \frac{\Gamma(z)}{p^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{p^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{p^{z+w}}$$

d'après la formule (4) du n° 83. D'autre part, puisque $\Gamma(z)\,\Gamma(w)$ est constant, l'original du second membre peut être calculé d'après la même formule (4) du n° 83 :

$$\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{p^{z+w}} \doteq \Gamma(z)\,\Gamma(w)\,\frac{t^{z+w-1}}{\Gamma(z+w)}.$$

Nous avons donc, d'après le théorème d'unicité des images

$$t^{z-1} * t^{w-1} = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\,t^{z+w-1}.$$

Faisant ici $t = 1$, nous trouvons l'expression de $B(z, w)$ à l'aide de la fonction gamma

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \qquad (2)$$

Notons entre autres que la formule (2) donne le prolongement analytique de la fonction bêta, que l'intégrale (1) ne définit que pour les $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, dans tout le plan complexe des z et des w.

Différentes intégrales, que l'on rencontre fréquemment en analyse, se ramènent aux intégrales eulériennes. Donnons quelques exemples :

1) Par le changement de variable $x = 2t - 1$, l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^p\,(1+x)^q\,dx \qquad (p > -1,\ q > -1)$$

se ramène à $2^{p+q+1}\,B(p+1, q+1)$ et, d'après la formule (2), elle est égale à

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^p\,(1+x)^q\,dx = 2^{p+q+1}\,\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}. \qquad (3)$$

2) Par le changement de variable $x^m = t$, l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x^m)^{q-1}\,dx \qquad (p,\ q,\ m > 0)$$

se ramène à $\frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right)$. Donc, d'après la formule (2), elle est égale à

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx = \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right) \Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}. \tag{4}$$

3) Par le changement de variable $\sin \varphi = x$, l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} \varphi \cos^{q-1} \varphi \, d\varphi$$

se ramène à une intégrale calculée dans l'exemple 2) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} \varphi \cos^{q-1} \varphi \, d\varphi = \int_0^1 x^{p-1} (1-x^2)^{\frac{q}{2}-1} dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}. \tag{5}$$

4) Faisant $p-1=r$, $q-1=-r$ $(-1<r<1)$ dans l'exemple précédent, nous trouvons en particulier :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^r \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right).$$

Mais, d'après la deuxième équation fonctionnelle pour la fonction gamma (formule (16) du n° 89), $\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{1+r}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi r}{2}}$, c'est-à-dire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^r \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi r}{2}}. \tag{6}$$

5) Le changement de variable $\ln \frac{1}{x} = t$ ramène à la fonction gamma l'intégrale

$$\int_0^1 \ln^p \frac{1}{x} dx = \int_0^\infty e^{-t} t^p \, dt = \Gamma(p+1). \tag{7}$$

6) Les *intégrales elliptiques complètes* se ramènent aussi aux intégrales eulériennes pour la valeur des modules $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (cf. n° 39) :

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}; \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

En effet, le changement de variables $\cos\varphi = t$, puis $t^4 = \tau$ ramène la première de ces intégrales à la forme

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\,d\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right); \quad (8)$$

d'une façon analogue

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^4}}\right\} = \frac{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)}{4\sqrt{2}}. \quad (9)$$

7) Pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-it}\,dt = \Gamma(z)\, e^{-i\frac{\pi z}{2}}. \quad (10)$$

En effet, considérons l'intégrale prise le long du contour fermé indiqué sur la fig. 194:

$$\int_C \zeta^{z-1} e^{-\zeta}\,d\zeta = \int_{C_r} + \int_r^R + \int_{C_R} + \int_{Ri}^{ri} = 0$$

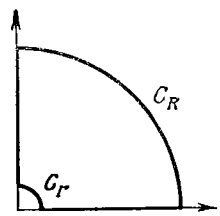

FIG. 194

(elle est nulle d'après le théorème de Cauchy). Puisque pour $\operatorname{Re} z = x < 1$ la quantité $|\zeta^{z-1}| = R^{x-1}$ tend vers zéro, lorsque $R \to \infty$, alors d'après le lemme de Jordan (n° 73, formule (2)) l'intégrale prise le long de C_R tend également vers zéro lorsque $R \to \infty$. D'autre part, pour $x > 0$, l'intégrale relative à C_r tend vers zéro lorsque $r \to 0$, car, d'après le théorème de l'évaluation d'une intégrale, son module n'est pas supérieur à $r^{x-1}\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} r^x$.

Ainsi, à la limite, lorsque $r \to 0$ et $R \to \infty$, nous obtenons:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt = \int_0^\infty (it)^{z-1} e^{-it} i\,dt = e^{i\frac{\pi z}{2}} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-it}\,dt,$$

d'où découle la formule que nous voulions établir. Faisant en particulier $z = \frac{1}{n}$, $n > 1$, dans cette formule, puis effectuant le changement de variable $t^{\frac{1}{n}} = x$, nous trouvons:

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{n}-1} e^{-it}\,dt = n\int_0^\infty e^{-ix^n}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) e^{-i\frac{\pi}{2n}},$$

d'où en séparant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons les intégrales :

$$\int_0^\infty \cos x^n\,dx = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n},$$

$$\int_0^\infty \sin x^n\,dx = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n} \qquad (11)$$

(pour $n=2$ nous obtenons un résultat que nous connaissons, cf. n° 73, exemple 6).

Donnons encore quelques relations dans lesquelles participe la fonction gamma.

1. *Intégrale de Raabe.* Calculons l'intégrale

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(t)\,dt.$$

Remplaçant t par $1-t$, nous pouvons écrire :

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\,dt,$$

et alors en additionnant cette expression à l'expression précédente et en tenant compte de la deuxième équation fonctionnelle pour la fonction gamma, nous obtenons :

$$2R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(t)\,\Gamma(1-t)\,dt = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi t}\,dt = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln\sin x\,dx.$$

Cette dernière intégrale se calcule au moyen du changement de variable $x=2u$ (*Euler*) :

$$I = \int_0^\pi \ln\sin x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2u\,du = \pi\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\,du + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos u\,du\ ;$$

la deuxième intégrale du second membre, après le changement de variable $u = v - \frac{\pi}{2}$, se transforme en $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin v\,dv$ et, en l'ajoutant à la première, nous trouvons $I = \pi\ln 2 + 2I$, d'où $I = -\pi\ln 2$. Ainsi

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(t)\,dt = \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2\pi}.$$

Raabe a considéré une intégrale plus générale ($a \geqslant 0$)

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(t)\, dt = \int_0^{a+1} - \int_0^a .$$

Puisque $R'(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln a$, nous trouvons par intégration $R(a) = a(\ln a - 1) + C$. Faisant ici $a = 0$ et tenant compte de ce que $R(0) = R_0 = \ln \sqrt{2\pi}$, nous trouvons :

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(t)\, dt = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi}. \tag{12}$$

2. *Formule de Legendre.* Considérons l'intégrale

$$B(z, z) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{z-1}\, d\tau = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \tau \right)^2 \right\}^{z-1} d\tau.$$

Puisque la parabole $\sigma = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \tau \right)^2$ est symétrique par rapport à la droite $\tau = \frac{1}{2}$, on peut écrire :

$$B(z, z) = 2 \int_0^{1/2} \left\{ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \tau \right)^2 \right\}^{z-1} d\tau,$$

d'où, après le changement de variable $\frac{1}{2} - \tau = \frac{1}{2} \sqrt{t}$, nous obtenons:

$$B(z, z) = \frac{2}{4^z} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{z-1}\, dt = \frac{1}{2^{2z-1}} B\left(\frac{1}{2}, z \right).$$

Remplaçant ici la fonction bêta par son expression (2) et tenant compte de ce que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, nous trouvons la *troisième équation fonctionnelle* pour la fonction gamma (*Legendre*) :

$$\Gamma(z)\, \Gamma\left(z + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z). \tag{13}$$

3. *Formule d'Euler.* Calculons le produit

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n} \right) \Gamma\left(\frac{2}{n} \right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n} \right),$$

ou n est un entier positif quelconque. Pour cela écrivons le produit dans l'ordre inverse

$$E = \Gamma\left(\frac{n-1}{n} \right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n} \right) \ldots \Gamma\left(\frac{1}{n} \right)$$

et multiplions membre à membre ces deux expressions de E. Réunissan chaque couple de facteurs, à l'aide de la deuxième équation fonctionnell

nous obtenons

$$E^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin 2\frac{\pi}{n}} \cdots \frac{\pi}{\sin(n-1)\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin k\frac{\pi}{n}}. \tag{14}$$

Pour calculer le produit des sinus, considérons l'identité

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) \ldots \left(z - e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}\right)$$

(comparer avec les racines n-ièmes de l'unité), d'où

$$\frac{z^n - 1}{z-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right)$$

et à la limite, lorsque $z \to 1$, nous trouvons :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right)$$

(comparer à la dérivée de z^n au point $z=1$). Passant aux valeurs absolues dans le second membre et tenant compte de ce que $\left|1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right| = \left|e^{ik\frac{\pi}{n}}\right| \times \left|2i \sin\frac{k\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$, nous avons :

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\frac{\pi}{n}.$$

Portant cette dernière expression dans la relation (14), nous obtenons la formule (*Euler*)

$$E = \prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{15}$$

§ 2. POLYNÔMES ORTHOGONAUX

91. Systèmes de fonctions orthogonaux. Dans de nombreux problèmes de physique mathématique on rencontre des développements de fonctions en *séries généralisées de Fourier*. Rappelons les notions fondamentales qui se rapportent à de tels développements.

Considérons une famille de fonctions réelles de la variable réelle x, données sur un intervalle fixe (a, b) qui peut être non borné. Nous supposons que ces fonctions sont différentiables par morceau et qu'elles ne possèdent que des points de discontinuité de première espèce. Par analogie avec l'algèbre vectorielle, introduisons la notion de produit scalaire des fonctions de la famille.

En algèbre vectorielle, le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ est la somme des

produits des coordonnées de même indice

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Conformément à cette définition, considérant les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ comme des vecteurs à un ensemble infini de « coordonnées » (les valeurs de ces fonctions en différents points de l'intervalle (a, b)), leur *produit scalaire* est la « somme continue des produits des coordonnées de même indice », c'est-à-dire

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{1}$$

De même, par analogie avec l'algèbre vectorielle, on introduit d'autres notions. On appelle *norme* (« longueur ») de la fonction $f(x)$ la racine carrée de son carré scalaire :

$$\| f \| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}. \tag{2}$$

Les notions introduites jouissent de certaines propriétés analogues aux propriétés usuelles correspondantes. Par exemple, il est clair que, avec nos suppositions, $\| f \| = 0$ si et seulement si $f(x) \equiv 0$ (nous ne tenons pas compte des valeurs de la fonction en ses points de discontinuité qui n'influent pas sur $\| f \|$). L'*inégalité de Bouniakovsky* connue en analyse

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx$$

peut être interprétée comme une propriété du produit scalaire

$$| (f, g) | \leqslant \| f \| \cdot \| g \|, \tag{3}$$

etc.

On dit que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ d'une famille quelconque sont *orthogonales* si leur produit scalaire est nul :

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0. \tag{4}$$

D'après cette définition, un système de fonctions $\{ \varphi_n(x) \}$ est dit *orthogonal* si ses deux fonctions quelconques sont orthogonales

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

De plus, ce système est dit *normé* si les normes de toutes ses fonctions sont égales à l'unité.

Les définitions que nous venons d'introduire s'étendent aussi aux fonctions de la variable réelle x à valeurs complexes si le produit scalaire de ces fonctions est défini non pas par l'intégrale (1), mais par l'intégrale

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \tag{5}$$

où $\overline{g(x)}$ est la conjuguée complexe de $g(x)$. Il est vrai que la propriété de symétrie du produit scalaire disparaît : il est clair que

$$(f, g) = \overline{(g, f)}.$$

Le carré scalaire de la fonction reste non négatif :

$$(f, f) = \int_a^b |f(x)|^2\,dx \geqslant 0,$$

et la notion de norme s'introduit sans modification ; on introduit, également sans modification, la notion de système orthogonal et normé.

Le système de fonctions

$$\varphi_n(x) = e^{in\omega x} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

est un exemple simple de système orthogonal. Ce système est orthogonal sur tout intervalle de longueur $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En effet, pour $m \neq n$, nous avons (a est un nombre réel quelconque) :

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^{a+T} e^{i(m-n)\omega x}\,dx = \frac{e^{i(m-n)\omega a}}{i(m-n)\omega}\left(e^{i(m-n)2\pi} - 1\right) = 0.$$

Le système n'est pas normé, car

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^{a+T} |e^{in\omega x}|^2\,dx} = \sqrt{T},$$

mais on peut le normer facilement en divisant chaque fonction du système par $\sqrt{T}$.

Les systèmes orthogonaux de fonctions sont particulièrement commodes pour développer d'autres fonctions par rapport à ces systèmes. En effet, soit $f(x)$ une fonction représentée par une série uniformément convergente par rapport aux fonctions d'un système orthogonal $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{6}$$

Faisant appel à la propriété d'orthogonalité, on peut facilement déterminer tous les coefficients de la série. Pour déterminer le coefficient c_n, nous multiplions les deux membres de (6) par $\overline{\varphi_n(x)}$ (*) (la série reste uniformément convergente) et intégrons sur l'intervalle fondamental (a, b):

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx.$$

En vertu de l'orthogonalité du système toutes les intégrales du second membre, excepté celle pour laquelle $k = \eta$, sont nulles et nous obtenons :

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx = c_n \|\varphi_n\|^2,$$

d'où

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx \tag{7}$$

(nous supposons que le système $\{\varphi_k, x)\}$ ne contient pas de fonctions identiquement nulles).

Une série de la forme (6) est appelée *série généralisée de Fourier* de la fonction $f(x)$ par rapport au système orthogonal $\{\varphi_n(x)\}$, et les formules (7), qui déterminent ses coefficients, s'appellent *formules généralisées de Fourier*. Pour le système $\varphi_n(x) = e^{in\omega x}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) considéré plus haut, la série (6) coïncide avec la série ordinaire de Fourier écrite sous la forme complexe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x},$$

(cf. n° 70) et les formules (7) avec les formules ordinaires de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\,e^{-in\omega x}\,dx.$$

Pour l'exposé qui va suivre un rôle important revient à l'*orthogonalisation* des systèmes de fonctions, c'est-à-dire un moyen qui permet de remplacer les fonctions $\varphi_n(x)$ du système par leurs combinaisons linéaires $\psi_n(x)$, de manière qu'elles forment un système orthogonal. Pour démontrer la possibilité d'orthogonalisation, nous suppo-

---

(*) Si toutes les fonctions du système $\{\varphi_n(x)\}$ sont des fonctions à valeurs réelles, alors $\overline{\varphi(x)} = \varphi_n(x)$.

sons que le système $\{\varphi_n(x)\}$ est *linéairement indépendant*. Comme en algèbre vectorielle, cela signifie qu'aucune des fonctions du système ne peut être représentée par une combinaison linéaire de certaines autres fonctions de ce système.

Théorème d'orthogonalisation. *Quel que soit le système linéairement indépendant de fonctions* $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *on peut toujours construire des fonctions* $\psi_n^0(x)$ *qui sont des combinaisons linéaires des* $\varphi_k(x)$ *et qui forment un système orthogonal normé.*

Prenons pour la fonction $\psi_0^0(x)$

$$\psi_0^0(x) = \frac{1}{\|\varphi_0\|}\varphi_0(x);$$

puisque le système $\{\varphi_n(x)\}$ est linéairement indépendant, il ne peut contenir de fonctions identiquement nulles (*), donc $\|\varphi_0\| \neq 0$. Choisissons maintenant la constante de manière que la fonction

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) - \alpha_{10}\psi_0^0(x)$$

soit orthogonale à ψ_0^0; nous avons $(\psi_1, \psi_0^0) = (\varphi_1, \psi_0^0) - \alpha_{10}$, donc il suffit de prendre $\alpha_{10} = (\varphi_1, \psi_0^0)$. La fonction $\psi_1(x)$ ne peut être identiquement nulle, car, dans le cas contraire, $\varphi_1(x)$ s'exprimerait linéairement à l'aide de $\varphi_0(x)$, ce qui est en contradiction avec les conditions du théorème. Donc nous pouvons prendre

$$\psi_1^0(x) = \frac{1}{\|\psi_1\|}\psi_1(x).$$

Considérons maintenant la fonction

$$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - \alpha_{20}\psi_0^0(x) - \alpha_{21}\psi_1^0(x)$$

et choisissons les constantes α_{20} et α_{21} de manière que ψ_2 soit orthogonale à ψ_0^0 et ψ_1^0. Puisque $(\psi_2, \psi_0^0) = (\varphi_2, \psi_0^0) - \alpha_{20}$ et $(\psi_2, \psi_1^0) = (\varphi_2, \psi_1^0) - \alpha_{21}$, il suffit de prendre $\alpha_{20} = (\varphi_2, \psi_0^0)$, $\alpha_{21} = (\varphi_2, \psi_1^0)$. La fonction $\psi_2(x)$ ne peut être identiquement nulle, car dans le cas contraire $\varphi_2(x)$ serait une combinaison linéaire de φ_0 et de φ_1, donc on peut prendre

$$\psi_2^0(x) = \frac{1}{\|\psi_2\|}\psi_2(x).$$

Nous pouvons continuer indéfiniment notre construction. Si les fonctions $\psi_0^0(x)$, $\psi_1^0(x)$, ..., $\psi_{n-1}^0(x)$ sont déjà construites, nous prenons

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{nk}\psi_k^0(x), \tag{8}$$

(*) La fonction $\varphi(x) \equiv 0$ s'exprime toujours linéairement à l'aide d'une autre : $\varphi(x) = 0 \cdot \psi(x)$.

où $\alpha_{nk} = (\varphi_n, \psi_k^0)$, puis

$$\psi_n^0(x) = \frac{1}{\|\psi_n\|} \psi_n(x).$$

Le système $\{\psi_n^0(x)\}$ est précisément celui que nous cherchions.

Remarque 1. On voit de notre construction que non seulement tous les $\psi_n^0(x)$ sont des combinaisons linéaires des $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, mais, inversement, les $\varphi_n(x)$ sont des combinaisons linéaires des $\psi_0^0, \psi_1^0, \ldots, \psi_n^0$. Il en découle que toute fonction $\varphi_k(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions $\psi_{k+1}^0, \psi_{k+2}^0, \ldots$ ou, autrement dit, *toute fonction* $\psi_n^0(x)$ *est orthogonale aux* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$.

Remarque 2. Dans un certain sens, il y a unicité du système orthogonal : *si la fonction* $\psi(x)$ *est une combinaison linéaire des* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *et orthogonale aux* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, *alors elle ne peut différer de* $\psi_n^0(x)$ *que par un facteur constant.* En effet, soit

$$\psi_n^0(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \varphi_k(x) \tag{9}$$

(ici, d'après ce qui précède, $\alpha_n \neq 0$). Considérons la fonction

$$\Psi(x) = \psi(x) - \frac{\beta_n}{\alpha_n} \psi_n^0(x);$$

il est clair qu'elle s'exprime linéairement à l'aide des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ (puisque son développement par rapport aux φ_k ne contient déjà plus φ_n) et est orthogonale à toutes ces fonctions. Il en découle alors que $\Psi(x) \equiv 0$, c'est-à-dire que $\psi(x) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \psi_n^0(x)$.

Pour terminer indiquons une généralisation de la notion d'orthogonalité que nous utiliserons plus loin (nous nous bornons au cas des fonctions réelles). On dit qu'un système de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ est *orthogonal par rapport au poids* $\rho(x)$ sur l'intervalle (a, b) si pour tout couple de fonctions du système

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) \rho(x) \, dx = 0. \tag{10}$$

Ici, le « poids » $\rho(x)$ est une fonction non négative fixe, continue sur l'intervalle (a, b). Pour $\rho(x) \equiv 1$ nous retrouvons l'orthogonalité ordinaire.

Le théorème d'orthogonalisation se généralise facilement au cas de l'orthogonalité par rapport à un poids. Il est évident que pour orthogonaliser par rapport au poids $\rho(x)$ un système de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$, il suffit d'orthogonaliser au sens ordinaire le système de fonctions $\{\sqrt{\rho(x)}\, \varphi_n(x)\}$. De plus, les fonctions qui s'obtiennent par orthogonalisation sont les produits par $\sqrt{\rho(x)}$ des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_k(x)$. Un système de telles combinaisons

linéaires

$$\psi_n^0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(x) \tag{11}$$

s'avère orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction développée en série uniformément convergente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \tag{12}$$

par rapport au système $\{\varphi_n(x)\}$ de fonctions orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$. Pour calculer les coefficients de ce développement, au lieu de la formule (7) nous avons la formule

$$c_n = \frac{1}{d_n^2}\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,\rho(x)\,dx, \tag{13}$$

où d_n est la « norme pondérée » de la fonction $\varphi_n(x)$:

$$d_n = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,\rho(x)\,dx}. \tag{14}$$

Pour établir la formule (13), il suffit de multiplier le développement (12) par $\varphi_n(x)\,\rho(x)$, puis de l'intégrer terme à terme en tenant compte de ce que le système $\{\varphi_n(x)\}$ est orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$.

92. Polynômes orthogonaux. Choisissons un intervalle (a, b) et appliquons le processus d'orthogonalisation par rapport au poids $\rho(x)$, décrit ci-dessus, au système des puissances de x: $\varphi_n(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ qui, comme on le sait, est linéairement indépendant. Pour chaque intervalle fixe (a, b) et pour chaque poids fixe $\rho(x)$ nous obtenons un système bien défini de polynômes $\{q_n(x)\}$ normé et orthogonal sur (a, b) par rapport au poids $\rho(x)$. On voit de la formule (11) que chaque polynôme $q_n^0(x)$ est de degré n.

Les systèmes de polynômes orthogonaux les plus usuels sont les suivants (*).

(*) Les polynômes $p_n(x)$ ont été introduits en 1785 par Legendre, les polynômes $t_n(x)$, $h_n(x)$ et $l_n(x) = l_n^0(x)$ par Tchébicheff en 1859 (dans l'article « Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions » publié dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Pétersbourg), en outre les polynômes $h_n(x)$ ont été étudiés par Hermite (1864) et les polynômes $l_n(x)$ par Laguerre (1879). Les polynômes de Legendre et de Tchébicheff sont un cas particulier des polynômes de Jacobi (1859) : on obtient les polynômes de Legendre pour $\lambda = \mu = 0$, ceux de Tchébicheff pour $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$.

Intervalle	Poids	Notation	Auteur
$(-1, 1)$	1	$p_n(x)$	Legendre
$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$t_n(x)$	Tchébicheff
$(-1, 1)$	$(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}$; $\lambda, \mu > -1$	$p_n^{(\lambda, \mu)}(x)$	Jacobi
$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$h_n(x)$	Tchébicheff-Hermite
$(0, \infty)$	$x^{\lambda}e^{-x}$; $\lambda > -1$	$l_n^{(\lambda)}(x)$	Tchébicheff-Laguerre

Donnons certaines propriétés des systèmes de polynômes orthogonaux. Par $q_n^0(x)$ nous désignons les polynômes appartenant à un système orthogonal et *normé* arbitraire mais fixe, par $Q_n(x)$ les polynômes qui diffèrent de $q_n^0(x)$ par un facteur constant arbitraire

$$Q_n(x) = d_n q_n^0(x),$$

où d_n est la norme pondérée de $Q_n(x)$. L'expression « tout polynôme » (ou « un polynôme quelconque ») signifie que l'on considère un polynôme à coefficients quelconques n'appartenant en général pas au système que l'on considère.

De la remarque 1 du n° 91 les théorèmes suivants découlent immédiatement.

Théorème 1. *Tout polynôme de degré n peut être représenté par une combinaison linéaire des polynômes* $Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$.

Théorème 2. *Le polynôme* $Q_n(x)$ *est orthogonal par rapport au poids* $\rho(x)$ *à tout polynôme de degré inférieur à n.*

La proposition générale suivante a lieu.

Théorème 3. *Le polynôme* $Q_n(x)$ *admet exactement n racines différentes sur l'intervalle* (a, b).

Pour démontrer ce théorème, considérons l'intégrale

$$\int_a^b Q_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0; \tag{1}$$

elle est nulle, car, d'après le théorème 2, $Q_n(x)$ est orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ au polynôme de degré zéro $x^0 = 1$. Puisque d'après le condition adoptée ci-dessus le poids $\rho(x)$ est une fonction non négative, il découle de l'égalité (1) que $Q_n(x)$ ne peut conserver un signe constant sur tout l'intervalle (a, b).

Supposons que $Q_n(x)$ change $m \geqslant 1$ fois de signe sur l'intervalle (a, b) aux points $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Considérons le polynôme de degré m

$$R_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m);$$

il est clair que le produit $Q_n(x) R_m(x)$ doit conserver un signe constant sur (a, b), donc

$$\int_a^b Q_n(x) R_m(x) \rho(x) dx \neq 0. \tag{2}$$

D'autre part, si $m < n$, alors, d'après le théorème 2, le polynôme $Q_n(x)$ doit être orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ au polynôme $R_m(x)$ et l'intégrale (2) doit être nulle. Il en découle que $m = n$ et le théorème est démontré.

Pour un système quelconque de polynômes orthogonaux on peut établir une formule de récurrence entre trois polynômes consécutifs Q_{n-1}, Q_n et Q_{n+1}. Supposons d'abord que le système soit normé. D'après le théorème 1, le produit $xq_n^0(x)$, qui est un polynôme de degré $n + 1$, peut être représenté par une combinaison linéaire des $q_0^0, q_1^0, \ldots, q_{n+1}^0$:

$$xq_n^0(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{nk} q_k^0(x). \tag{3}$$

D'après la formule (13) du n° 91 nous avons pour les coefficients de ce développement:

$$c_{nk} = \int_a^b xq_n^0(x) q_k^0(x) \rho(x) dx. \tag{4}$$

Mais si $k < n - 1$, alors $xq_k^0(x)$ est un polynôme de degré inférieur à n, et $c_{nk} = 0$ d'après le théorème 2. Ainsi, dans la relation (3) seulement les trois derniers coefficients $c_{n,n-1}$, $c_{n,n}$ et $c_{n,n+1}$ peuvent être différents de zéro.

Désignons par $a_{nn}^0 = a_n^0$ le coefficient du plus haut degré de x dans $q_n^0(x)$. En comparant dans l'identité (3) les coefficients de x^{n+1}, on trouve $a_n^0 = c_{n,n+1}\, a_{n+1}^0$, d'où

$$c_{n,n+1} = \frac{a_n^0}{a_{n+1}^0}.$$

Mais on voit de la formule (4) que $c_{nk} = c_{kn}$ pour tous n et k, donc $c_{n,n-1} = c_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}^0}{a_n^0}$, ce qui nous donne la formule de récurrence

$$xq_n^0(x) = \frac{a_n^0}{a_{n+1}^0} q_{n+1}^0(x) + c_{nn} q_n^0(x) + \frac{a_{n-1}^0}{a_n^0} q_{n-1}^0(x). \tag{5}$$

Le coefficient c_{nn} s'exprime facilement à l'aide des coefficients b_n^0 de x^{n-1} dans l'expression de $q_n^0(x)$; identifiant dans (5) les coefficients de x^n, nous obtenons $b_n^0 = \frac{a_n^0}{a_{n+1}^0} b_{n+1}^0 + c_{nn} a_n^0$, d'où

$$c_{nn} = \frac{b_n^0}{a_n^0} - \frac{b_{n+1}^0}{a_{n+1}^0}. \tag{6}$$

Pour passer au cas d'un système orthogonal quelconque de polynômes $\{Q_n(x)\}$, non obligatoirement normé, il suffit de remarquer que

$$a_n = d_n a_n^0, \quad b_n = d_n b_n^0,$$

où d_n est la norme pondérée du polynôme $Q_n(x)$.

Tenant compte de ces expressions, après de simples transformations dans les formules (5) et (6), nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 4. *Trois polynômes consécutifs arbitraires d'un système orthogonal vérifient la formule de récurrrence*

$$xQ_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} Q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) Q_n(x) + \\ + \frac{a_{n-1}}{a_n} \left(\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)^2 Q_{n-1}(x). \tag{7}$$

Ainsi, connaissant les coefficients a_n et b_n des deux puissances les plus élevées de x dans $Q_n(x)$, nous pouvons déterminer successivement ces polynômes. Le calcul des coefficients pour les systèmes concrets est donné au numéro 93, où nous obtenons également des relations définitives.

Pour obtenir d'autres propriétés des polynômes orthogonaux nous supposons que le *poids* $\rho(x)$ *satisfait à l'équation différentielle*

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1(x)}{\beta_0 + \beta_1(x) + \beta_2 x^2} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \tag{8}$$

où $\beta(x)$ *a comme racines les extrémités* a *et* b *de l'intervalle sur lequel le système considéré de polynômes est orthogonal* (*) (*par rapport à un poids*), *et vérifie aux extrémités de l'intervalle les conditions* :

$$\rho(x)\,\beta(x) \mid_{x=a,\,b} = 0. \tag{9}$$

Remarquons que ces conditions sont satisfaites pour toutes les classes spéciales de polynômes orthogonaux énumérées plus haut (**).

a) *Polynômes de Legendre* : $\rho' = 0$, donc l'équation (8) est satisfaite pour $\alpha(x) \equiv 0$; pour que (9) soit satisfaite, il suffit de prendre

(*) Si a ou b sont infinis, alors $\beta(x)$ est un polynôme du premier degré ou de degré zéro suivant qu'un des nombres a et b ou les deux sont infinis, mais on peut même dans ces cas considérer $\beta(x)$ comme un polynôme du deuxième degré de racines aux points a et b.

(**) On peut démontrer que ces classes épuisent les polynômes orthogonaux par rapport à un poids qui vérifie les conditions (8) et (9).

$\beta(x) = 1 - x^2$. Ainsi, pour les polynômes de Legendre

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1 - x^2. \tag{10}$$

b) *Polynômes de Tchébicheff*: $\rho' = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3} = \frac{x\rho}{1-x^2}$, donc

$$\alpha = x, \quad \beta = 1 - x^2. \tag{11}$$

La condition (9) est satisfaite.

c) *Polynômes de Jacobi*: $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\mu}{1+x} - \frac{\lambda}{1-x} = \frac{\mu-\lambda-(\mu+\lambda)x}{1-x^2}$, donc

$$\alpha = (\mu - \lambda) - (\mu + \lambda)x, \quad \beta = 1 - x^2; \tag{12}$$

pour $\lambda > -1$, $\mu > -1$, la condition (9) est satisfaite.

d) *Polynômes de Tchébicheff-Hermite*: $\frac{\rho'}{\rho} = -2x$, donc

$$\alpha = -2x, \quad \beta = 1; \tag{13}$$

la condition (9) est satisfaite, car $\rho = e^{-x^2} \to 0$, lorsque $x \to \pm\infty$.

e) *Polynômes de Tchébicheff-Laguerre*: $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\lambda - x}{x}$, donc

$$\alpha = \lambda - x, \quad \beta = x; \tag{14}$$

la condition (9) est satisfaite pour $\lambda > -1$.

Il s'avère que les polynômes orthogonaux satisfont à des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients variables auxquelles on est souvent conduit dans différents problèmes de physique (*). Nous allons obtenir une équation différentielle pour un système quelconque de polynômes orthogonaux vérifiant les conditions (8) et (9).

Soit $Q_n(x)$ un polynôme quelconque d'un système orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ sur l'intervalle (a, b) et non obligatoirement normé. Intégrant par parties, nous obtenons

$$I = \int_a^b [\beta(x)\rho(x)Q_n'(x)]' x^k dx = x^k[\beta\rho Q_n']_a^b - k\int_a^b x^{k-1}\beta\rho Q_n' dx;$$

en vertu de la condition (9) le premier terme du second membre est nul et intégrant encore une fois par parties ($x^{k-1}\beta\rho = u$, $Q_n' dx = dv$), nous obtenons :

$$I = -k[x^{k-1}\beta\rho Q_n]_a^b + k\int_a^b Q_n[(k-1)x^{k-2}\beta\rho + x^{k-1}\beta'\rho + x^{k-1}\beta\rho'] dx.$$

(*) C'est précisément cette circonstance qui rend compréhensible l'importance des polynômes orthogonaux pour les applications.

Ayant recours encore une fois à la condition (9) et remplaçant, d'après (8), $\beta\rho'$ par $\alpha\rho$, nous avons :

$$I = k \int_a^b Q_n \rho \left[(k-1)\, x^{k-2}\beta + x^{k-1}(\beta' + \alpha)\right] dx.$$

Dans les crochets sous le signe d'intégration figure un polynôme de degré k, car β est un polynôme du second degré et $\beta' + \alpha$ du premier degré. Nous en concluons, d'après le théorème 2, que pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ cette intégrale est nulle. Tenant compte de l'expression initiale de I nous obtenons que, pour $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$,

$$I = \int_a^b (\beta' \rho Q_n' + \beta\rho' Q_n' + \beta\rho Q_n'')\, x^k\, dx = \int_a^b \left[(\alpha + \beta')\, Q_n' + \beta Q_n''\right] x^k \rho\, dx = 0$$

(nous avons utilisé encore une fois l'équation (8)). Cette dernière égalité signifie que le polynôme de degré n qui se trouve entre les crochets et qui, d'après le théorème 1, est une combinaison linéaire des $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, est orthogonal par rapport au poids ρ aux x^k pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Etant donné que le système $\{Q_n\}$ est obtenu par orthogonalisation, par rapport au poids ρ, des puissances $\{x^n\}$, d'après la remarque 2 du n° 91, nous pouvons conclure que ce polynôme ne diffère de Q_n que par un facteur constant

$$(\alpha + \beta')\, Q_n'(x) + \beta Q_n''(x) = \gamma_n Q_n(x). \tag{15}$$

Pour déterminer le facteur γ_n, il suffit de comparer dans (15) les coefficients de x^n ; désignant par a_n le coefficient du plus haut degré dans Q_n et tenant compte des notations introduites dans la condition (8), nous avons $(\alpha_1 + 2\beta_2)\, n a_n + \beta_2 n (n-1)\, a_n = \gamma_n a_n$, d'où

$$\gamma_n = n\left[\alpha_1 + (n+1)\,\beta_2\right]. \tag{16}$$

Ainsi, le théorème suivant est démontré.

Théorème 5. *Pour tout système de polynômes $\{Q_n(x)\}$ orthogonaux par rapport au poids $\rho(x)$ vérifiant les conditions* (8) *et* (9), *le polynôme $Q_n(x)$ est une solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients variables*

$$\beta y'' + (\alpha + \beta')\, y' - \gamma_n y = 0, \tag{17}$$

où γ_n est défini par la formule (16).

Comme exemple indiquons les équations différentielles dont les polynômes spéciaux sont des solutions. Des formules (10)-(14) et

de l'équation (17) nous avons:

a) *polynômes de Legendre*:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + n\,(n+1)\, y = 0; \qquad (18)$$

b) *polynômes de Tchébicheff*:

$$(1 - x^2)\, y'' - xy' + n^2 y = 0; \qquad (19)$$

c) *polynômes de Jacobi*:

$$(1 - x^2)\, y'' + \{\mu - \lambda - (\mu + \lambda + 2)\, x\}\, y' + \\ + n\,(\mu + \lambda + n + 1)\, y = 0; \qquad (20)$$

d) *polynômes de Tchébicheff-Hermite*:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0; \qquad (21)$$

e) *polynômes de Tchébicheff-Laguerre*:

$$xy'' + (1 - x)\, y' + ny = 0. \qquad (22)$$

93. Expression au moyen du poids. Fonctions génératrices. Comme précédemment, nous considérons un système quelconque de polynômes $\{Q_n(x)\}$ orthogonal sur l'intervalle (a, b) par rapport au poids $\rho(x)$ vérifiant les conditions

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \qquad \rho(x)\,\beta(x)\,|_{x=a,\,b} = 0, \qquad (1)$$

et non obligatoirement normé. Pour de tels systèmes, il s'avère possible de donner une formule exprimant directement les polynômes $Q_n(x)$ à l'aide du poids $\rho(x)$ et de la fonction $\beta(x)$. On a le théorème:

Théorème 1. *Pour tout système de polynômes* $\{Q_n(x)\}$, *orthogonaux par rapport au poids* $\rho(x)$ *vérifiant les conditions* (1), *les polynômes* $Q_n(x)$ *peuvent être mis sous la forme*

$$Q_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{\rho(x)\,\beta^n(x)\}, \qquad (2)$$

où A_n *est un coefficient constant dépendant de la normalisation des polynômes.*

Pour les polynômes de Legendre, cette formule a été démontrée par *Rodrigues* (1814); des formules analogues ont été aussi obtenues pour les autres polynômes spéciaux. Pour établir cette formule, nous suivons le raisonnement de *I. Aramanovitch.*

Démontrons d'abord que l'expression

$$\tilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{\rho(x)\,\beta^n(x)\} \qquad (3)$$

est un polynôme de degré n. Nous avons:

$$(\rho\beta^n)' = \rho'\beta^n + \rho\beta^{n-1} n\beta' = \rho\beta^{n-1}\tilde{Q}_{n,\,1},$$

où $\widetilde{Q}_{n,1} = \alpha + n\beta'$ est un polynôme du premier degré (nous avons eu recours à l'équation (1)). D'une façon analogue

$$(\rho\beta^n)'' = (\rho\beta^{n-1}\widetilde{Q}_{n,1})' = \rho\beta^{n-2}\widetilde{Q}_{n,2},$$

où $\widetilde{Q}_{n,2} = [\alpha + (n-1)\beta']\,\widetilde{Q}_{n,1} + \beta\widetilde{Q}'_{n,1}$ est un polynôme du deuxième degré.

Ayant en vue l'application de la méthode de récurrence, nous supposons vraie la formule

$$(\rho\beta^n)^{(k)} = (\rho\beta^{n-k+1}\widetilde{Q}_{n,k-1})' = \rho\beta^{n-k}\widetilde{Q}_{n,k}, \tag{4}$$

où

$$\widetilde{Q}_{n,k} = [\alpha + (n-k+1)\beta']\,\widetilde{Q}_{n,k-1} + \beta\widetilde{Q}'_{n,k-1} \tag{5}$$

est un polynôme de degré k. Ayant recours encore une fois à l'équation (1), nous obtenons

$$(\rho\beta^n)^{(k+1)} = (\rho\beta^{n-k}\widetilde{Q}_{n,k})' = \\ = \rho\beta^{n-k-1}\{[\alpha + (n-k)\beta']\,\widetilde{Q}_{n,k} + \beta\widetilde{Q}'_{n,k}\}.$$

Nous voyons que cette formule contient les formules (4) et (5), écrites pour $k+1$. Ainsi, par récurrence nous pouvons affirmer que (4) et (5) sont vraies pour tous les $k = 1, 2, \ldots, n$. Notons que (4) est vraie aussi pour $k = 1$ si l'on pose $\widetilde{Q}_{n,0} \equiv 1$.

Les formules (4) et (5) pour $k = n$ donnent

$$(\rho\beta^n)^{(n)} = \rho\widetilde{Q}_n,$$

où

$$\widetilde{Q}_n = \widetilde{Q}_{n,n} = (\alpha + \beta')\,\widetilde{Q}_{n,n-1} + \beta\widetilde{Q}'_{n,n-1}$$

est un polynôme de degré n. Il en découle ainsi l'expression (3).

Montrons maintenant que le polynôme $\widetilde{Q}_n$ est orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ à tous les x^k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Pour cela nous appliquons successivement la formule d'intégration par parties à l'intégrale

$$I_k = \int_a^b x^k\widetilde{Q}_n\rho\,dx = \int_a^b x^k\,d(\rho\beta\widetilde{Q}_{n,n-1}),$$

tenant compte constamment de la formule (4) et de la condition (1) pour $\rho\beta$. En répétant cette intégration par parties $(k-1)$ fois, nous obtenons :

$$I_k = (-1)^{k-1}k!\int_a^b x\,d(\rho\beta^k\widetilde{Q}_{n,n-k}), \tag{6}$$

en la répétant k fois

$$I_k = (-1)^k k! \int_a^b d(\rho\beta^{k+1}\widetilde{Q}_{n,\,n-k-1}) = 0.$$

Cette dernière formule est vraie pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (pour $k = n-1$ nous posons $\widetilde{Q}_{n,0} = 1$) et l'orthogonalité est démontrée.

D'après la remarque 2 du n° 91, nous pouvons affirmer que le polynôme $\widetilde{Q}_n$ ne diffère du polynôme orthogonal Q_n que par un facteur constant : $Q_n = A_n\widetilde{Q}_n$, ce qui démontre précisément la formule (2) que nous voulions établir.

Comme nous l'avons déjà noté, le coefficient A_n dépend de la normalisation du polynôme. En particulier, le polynôme $\widetilde{Q}_n$ peut être normé de manière que $A_n = 1$. Calculons le coefficient $\widetilde{a}_n$ de degré le plus élevé de x dans ce polynôme. Pour cela, comparons d'abord les coefficients des plus hauts degrés de x dans la formule (5) :

$$\widetilde{a}_{n,\,k} = [\alpha_1 + (2n-k+1)\,\beta_2]\,\widetilde{a}_{n,\,k-1}.$$

D'où nous obtenons :

$$\widetilde{a}_n = \widetilde{a}_{n,\,n} = [\alpha_1 + (n+1)\,\beta_2]\,[\alpha_1 + (n+2)\,\beta_2]\,\ldots\,[\alpha_1 + 2n\beta_2]\,\widetilde{a}_{n,\,0},$$

où $\widetilde{a}_{n,\,0} = 1$, ou encore

$$\widetilde{a}_n = \prod_{k=n+1}^{2n} (\alpha_1 + k\beta_2). \tag{7}$$

D'une façon analogue, nous trouvons aussi le coefficient de x^{n-1} dans l'expression du polynôme $\widetilde{Q}_n$:

$$\widetilde{b}_n = n\,(\alpha_0 + n\beta_1) \sum_{k=n+1}^{2n-1} (\alpha_1 + k\beta_2) = \frac{\alpha_0 + n\beta_1}{\alpha_1 + 2n\beta_2}\, n\widetilde{a}_n\ (*). \tag{8}$$

Donnons comme exemple les valeurs de $\widetilde{a}_n$ et $\widetilde{b}_n$ pour les polynômes spéciaux normés de manière que dans la formule (2) le coefficient $A_n = 1$.

(*) Pour obtenir la formule (8) il faut comparer les coefficients de x^{k-1} dans la formule (5), ce qui donne

$$\widetilde{b}_{n,k} = [\alpha_1 + (2n-k)\,\beta_2]\,\widetilde{b}_{n,\,k-1} + (\alpha_0 + n\beta_1)\,\widetilde{a}_{n,\,k-1}$$

(les notations sont analogues aux précédentes), puis appliquer successivement cette formule à partir de $\widetilde{b}_{n,\,1} = \alpha_0 + n\beta_1$ jusqu'à ce que l'on obtienne $\widetilde{b}_{n,\,n} = \widetilde{b}_n$; de plus, il faut tenir compte des expressions de $\widetilde{a}_{n,\,k}$ obtenues ci-dessus.

Pour les *polynômes de Jacobi* $\alpha = (\mu - \lambda) - (\mu + \lambda)\, x$, $\beta = 1 - x^2$, donc

$$\widetilde{a}_n = (-1)^n \prod_{k=n+1}^{2n} (\lambda + \mu + k) = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda + \mu + 2n + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + n + 1)}, \qquad (9)$$

car en vertu de l'équation fonctionnelle de la fonction gamma (cf. (14) du n° 89)

$$\Gamma(z + 2n + 1) = (z + 2n)(z + 2n - 1) \ldots (z + n + 1)\, \Gamma(z + n + 1)$$

et

$$\widetilde{b}_n = n \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu + 2n} \widetilde{a}_n = (-1)^n (\lambda - \mu)\, n \frac{\Gamma(\lambda + \mu + 2n)}{\Gamma(\lambda + \mu + n + 1)}. \qquad (10)$$

Des formules (9) et (10) nous obtenons, en particulier, pour les *polynômes de Legendre* ($\lambda = \mu = 0$) :

$$\widetilde{a}_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}; \quad \widetilde{b}_n = 0, \qquad (11)$$

et pour les *polynômes de Tchébicheff* $\left(\lambda = \mu = -\frac{1}{2}\right)$:

$$\widetilde{a}_n = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}; \quad \widetilde{b}_n = 0. \qquad (12)$$

Pour les *polynômes de Tchébicheff-Hermite* ($\alpha = -2x$, $\beta = 1$), nous avons

$$\widetilde{a}_n = (-1)^n 2^n; \quad \widetilde{b}_n = 0, \qquad (13)$$

et pour les *polynômes de Tchébicheff-Laguerre* ($\alpha = \lambda - x$, $\beta = x$) :

$$\widetilde{a}_n = (-1)^n; \quad \widetilde{b}_n = (-1)^{n+1} (\lambda + n)\, n. \qquad (14)$$

Trouvons maintenant la norme pondérée $\widetilde{d}_n$ du polynôme $\widetilde{Q}_n$. Nous avons :

$$\widetilde{d}_n^2 = \int_a^b \widetilde{Q}_n^2 \rho\, dx = \int_a^b (\widetilde{a}_n x^n + \ldots)\, \widetilde{Q}_n \rho\, dx = \widetilde{a}_n \int_a^b x^n \widetilde{Q}_n \rho\, dx,$$

car d'après le théorème 2 du n° 92 $\widetilde{Q}_n$ est orthogonal par rapport au poids ρ à tout polynôme de degré inférieur à n. Appliquant maintenant la formule (6) pour $k = n$ et intégrant par parties, nous trouvons :

$$\widetilde{d}_n^2 = (-1)^n n!\, \widetilde{a}_n \int_a^b \rho \beta^n\, dx,$$

ou encore

$$\widetilde{d}_n = \sqrt{(-1)^n n!\, \widetilde{a}_n \delta_n}, \qquad (15)$$

où

$$\delta_n = \int_a^b \rho \beta^n \, dx \tag{16}$$

est une quantité définie par le poids ρ et la fonction β.

Connaissant $\widetilde{d}_n$ et $\widetilde{a}_n$ il n'est pas difficile de déterminer le coefficient a_n^0 du plus haut degré de x dans le polynôme normé $q_n^0(x) = \frac{1}{\widetilde{d}_n} \widetilde{Q}_n(x)$:

$$a_n^0 = \frac{\widetilde{a}_n}{\widetilde{d}_n} = \sqrt{\frac{(-1)^n}{n!} \frac{\widetilde{a}^n}{\delta_n}}. \tag{17}$$

Pour les *polynômes de Jacobi*, la formule (16) donne:

$$\delta_n = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\lambda+n} (1+x)^{\mu+n} \, dx = 2^{\lambda+\mu+2n+1} \frac{\Gamma(\lambda+n+1)\,\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2n+2)}$$

(nous avons utilisé la formule (3) du n° 90). En vertu de (9) et (17) nous obtenons alors

$$(a_n^0)^2 = \frac{1}{2^{\lambda+\mu+2n+1} n!} \frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+2)}{\Gamma(\lambda+n+1)\,\Gamma(\mu+n+1)} \frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)}. \tag{18}$$

En particulier, pour les *polynômes de Legendre* et *de Tchébicheff*, on obtient respectivement

$$a_n^0 = \frac{(2n)!}{2^{n+\frac{1}{2}} (n!)^2} \sqrt{2n+1}, \quad a_n^0 = \frac{(2n)!}{2^{n+\frac{1}{2}} n!} \frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{n-\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Pour les *polynômes de Tchébicheff-Hermite* et *de Tchébicheff-Laguerre*, on a respectivement

$$\delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}, \quad \delta_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\lambda+n} \, dx = \Gamma(\lambda+n+1)$$

et, en vertu de (13) et (14), nous obtenons :

$$(a_n^0)^2 = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}\, n!}; \quad (a_n^0)^2 = \frac{1}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)}. \tag{20}$$

D'ordinaire on considère dans la littérature des polynômes orthogonaux $Q_n(x)$ non normés. Afin de définir ces polynômes d'une manière unique, il suffit évidemment de donner, en plus du poids et de l'intervalle, les coefficients a_n de degré le plus élevé. Conservant les notations adoptées, nous avons:

$$Q_n(x) = A_n \widetilde{Q}_n(x) = d_n q_n^0(x),$$

d'où, comparant les coefficients de degré le plus élevé, nous trouvons :

$$a_n = A_n \widetilde{a}_n = d_n a_n^0, \qquad b_n = A_n \widetilde{b}_n = d_n b_n^0. \tag{21}$$

Puisque les coefficients $\widetilde{a}_n$ et a_n^0 sont déterminés ci-dessus, connaissant a_n, nous pouvons donc trouver A_n et d_n. Donnons ces quantités pour les polynômes spéciaux.

Polynômes	Notation	a_n	d_n^2	A_n
Legendre	$P_n(x)$	$\dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$	$\dfrac{2}{2n+1}$	$(-1)^n \dfrac{1}{2^n n!}$
Tchébicheff	$T_n(x)$	1	$\dfrac{\pi}{2^{2n-1}}$	$(-1)^n \dfrac{(n-1)!}{(2n-1)!}$
Jacobi	$P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$	$\dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)}$	$\dfrac{2^{\lambda+\mu+1}}{n!} \dfrac{\Gamma(\lambda+n+1)\,\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)(\lambda+\mu+2n+1)}$	$(-1)^n \dfrac{1}{2^n n!}$
Tchébicheff-Hermite	$H_n(x)$	2^n	$2^n n! \sqrt{\pi}$	$(-1)^n$
Tchébicheff-Laguerre	$L_n^{(\lambda)}(x)$	$(-1)^n$	$n!\,\Gamma(\lambda+n+1)$	1

Connaissant A_n, nous pouvons écrire la formule (2) pour tous ces polynômes. Ecrivons-la par exemple pour les polynômes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n \tag{22}$$

(elle coïncide avec la formule connue de Rodrigues) et pour les polynômes de Tchébicheff-Laguerre

$$L_n^{(\lambda)}(x) = x^{-\lambda} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{\lambda+n}) \tag{23}$$

(elle sert souvent de définition pour $L_n^{(\lambda)}(x)$).

Connaissant ensuite les coefficients a_n, d_n et b_n (le dernier étant déterminé de (21) à l'aide de A_n et des $\widetilde{b}_n$ trouvés ci-dessus), nous pouvons écrire sous une forme définitive les relations de récurrence pour ces polynômes (cf. la formule (7) du n° 92):

a) *polynômes de Legendre* :

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1 ; \tag{24}$$

b) *polynômes de Tchébicheff* :

$$xT_n(x) = T_{n+1}(x) + \frac{1}{4} T_{n-1}(x), \quad n \geqslant 2 \text{ (*)} ; \tag{25}$$

c) *polynômes de Jacobi* :

$$\begin{aligned}(\nu+2n)(\nu+2n+1)(\nu+2n+2)\, xP_n^{(\lambda,\mu)}(x) = \\ = 2(n+1)(\nu+n+1)(\nu+2n)\, P_{n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) + \\ + (\mu^2-\alpha^2)(\nu+2n+1)\, P_n^{(\lambda,\mu)}(x) + \\ + 2(\alpha+n)(\beta+n)(\nu+2n+2)\, P_{n-1}^{(\lambda,\mu)}(x),\end{aligned} \tag{26}$$

où $\nu = \lambda + \mu$;

d) *polynômes de Tchébicheff-Hermite* :

$$xH_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1 ; \tag{27}$$

e) *polynômes de Tchébicheff-Laguerre* :

$$\begin{aligned}xL_n^{(\lambda)}(x) = -L_{n+1}^{(\lambda)}(x) + (\lambda+2n+1) L_n^{(\lambda)}(x) - \\ - n(\lambda+n) L_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n > 1.\end{aligned} \tag{28}$$

Pour terminer, montrons que les polynômes d'un système orthogonal peuvent être considérés comme les coefficients du développement en série de Taylor d'une certaine fonction analytique que l'on appelle fonction génératrice des polynômes de ce système (**).

Selon Aramanovitch et Kojevnikov, on peut établir la fonction génératrice d'une famille quelconque de polynômes orthogonaux par rapport au poids ρ vérifiant la condition (1). Nous exposons ici leur résultat.

Pour plus de simplicité, nous considérons les polynômes $\widetilde{Q}_n$ normés de manière que dans la formule (2) tous les coefficients A_n sont égaux à l'unité. Nous appelons *fonction génératrice* de la famille $\{\widetilde{Q}_n\}$ une fonction de deux variables complexes z et w, définie par la relation (***)

$$\Psi(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{Q}_n(z)}{n!} w^n. \tag{29}$$

(*) Pour $n < 2$, les formules ont une autre forme :

$$xT_1 = T_2 + \frac{1}{4} T_0 + \frac{1}{4}, \quad xT_0 = T_1.$$

(**) Nous avons déjà donné des exemples où les polynômes sont définis à l'aide de fonctions génératrices (n° 70).

(***) Le rayon de convergence de la série (29) ordonnée suivant les puissances de w dépend évidemment de z. Au début du n° 93 $\widetilde{Q}_n$ est défini pour les valeurs réelles de la variable, mais vu que $\widetilde{Q}_n$ est un polynôme, nous pouvons le considérer défini dans tout le plan complexe.

Transformons l'expression (29) à l'aide de la formule (2) et de la formule de Cauchy pour les dérivées d'ordres supérieurs. Nous avons :

$$\Psi(z, w) = \frac{1}{\rho(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{d^n(\rho\beta^n)}{dz^n} = \frac{1}{\rho(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{n}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(\zeta)\beta^n(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

où C est un contour fermé contenant à son intérieur le point $\zeta = z$ et appartenant au domaine d'analyticité de la fonction $\rho(\zeta)\beta^n(\zeta)$. Intervertissant dans cette dernière formule l'ordre de sommation et d'intégration et sommant la progression géométrique ainsi obtenue, nous obtenons :

$$\Psi(z, w) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w\beta(\zeta)}{\zeta - z}\right)^n d\zeta = \frac{1}{\rho(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z - w\beta(\zeta)}.$$

Nos transformations sont légitimes si pour tous les ζ sur la courbe C la raison $\frac{w\beta(\zeta)}{\zeta - z}$ de la progression géométrique est en module inférieure à l'unité, et cela a toujours lieu pour les $|w|$ suffisamment petits. Le dénominateur de la fonction à intégrer est un polynôme du second degré en ζ, en outre pour les petits $|w|$ l'une des racines de ce polynôme, que nous désignons par ζ_w, est voisine du point $\zeta = z$ et l'autre est grande en valeur absolue. En rétrécissant au besoin le contour C nous pouvons supposer que la seconde racine se trouve à l'extérieur de ce contour. Alors la fonction à intégrer ne possède à l'intérieur de C qu'un seul pôle du premier ordre $\zeta = \zeta_w$ de résidu

$$C_{-1} = \frac{\rho(\zeta_w)}{1 - w\beta'(\zeta_w)}.$$

Appliquant le théorème de Cauchy sur les résidus nous avons le théorème suivant :

Théorème 2. *Pour tout système de polynômes* $\{\widetilde{Q}_n(x)\}$, *orthogonal par rapport au poids* $\rho(x)$ *vérifiant la condition* (1), *il existe une fonction génératrice* $\Psi(z, w)$ *telle que*

$$\Psi(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{Q}_n(z)}{n!} w^n. \tag{29}$$

Cette fonction est définie par la formule

$$\Psi(z, w) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{\rho(\zeta_w)}{1 - w\beta'(\zeta_w)}, \tag{30}$$

où ζ_w *désigne la racine de l'équation du second degré*

$$\zeta - z - w\beta(\zeta) = 0, \tag{31}$$

qui pour les petits w *est voisine de* $\zeta = z$.

Donnons quelques exemples.

1) *Polynômes de Legendre.* L'équation (31) est de la forme $w\zeta^2 + \zeta - (z + w) = 0$, d'où

$$\zeta_w = \frac{1}{2w}\left(-1 + \sqrt{1 + 4wz + 4w^2}\right)$$

(le signe devant la racine est pris de manière que pour les petits $|w|$ on ait $\zeta_w \approx z$) et, d'après la formule (30), nous avons:

$$\Psi(z, w) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4wz + 4w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{P}_n(z)}{n!} w^n.$$

Remplaçant $\widetilde{P}_n = \frac{1}{A_n} P_n = 2^n n!\,(-1)^n P_n$ et w par $-\frac{w}{2}$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zw + w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, w^n, \tag{32}$$

ce qui coïncide avec la formule (8) du n° 70.

2) *Polynômes de Tchébicheff-Hermite.* L'équation (31) est de la forme $\zeta - z - w = 0$ et, d'après la formule (30),

$$\Psi(z, w) = \frac{\rho(\zeta_w)}{\rho(z)} = e^{-(w^2 + 2wz)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{H}_n(z)}{n!} w^n.$$

Remplaçant $\widetilde{H}_n = (-1)^n H_n$ et w par $-w$, nous obtenons:

$$e^{2wz - w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} w^n. \tag{33}$$

3) *Polynômes de Tchébicheff-Laguerre.* L'équation (31) est de la forme $\zeta - w - w\zeta = 0$ et, d'après la formule (30),

$$\Psi(z, w) = \frac{z^{-\lambda}}{(1 - w)^{\lambda + 1}} e^{-\frac{zw}{1 - w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(z)}{n!} w^n. \tag{34}$$

94. Exemples. Applications. 1) Les polynômes de Legendre jouent un rôle important dans la théorie du potentiel. Considérons dans l'espace à trois dimensions un point attractif P de masse unité qui se trouve à la distance a de l'origine des coordonnées O. Le potentiel de cette masse, calculé au point M se trouvant à la distance r de l'origine des coordonnées, est de la forme:

$$V(M) = \frac{1}{MP} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}},$$

où φ est l'angle formé par OP et OM. Posons $t=\frac{a}{r}$, $x=\cos\varphi$, alors

$$V(M)=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{a}{r}\cos\varphi+\frac{a^2}{r^2}}}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

et si l'on développe le second membre en série suivant les puissances de la variable t, alors, d'après la formule (32) du n° 93, les coefficients de cette série sont les polynômes de Legendre:

$$V(M)=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n. \tag{1}$$

Pour les x réels, $-1\leqslant x\leqslant 1$, ce développement converge pour $|t|<1$, c'est-à-dire pour $r>a$. En effet, pour de tels x les racines de l'équation du second degré $t^2-2tx+1=0$, $t_{1,2}=e^{\pm i\varphi}$ ($x=\cos\varphi$), qui sont des points singuliers de V, considéré comme fonction de t, se trouvent sur la circonférence unité.

2) Formules de récurrence des polynômes de Legendre. Outre la formule fondamentale de récurrence

$$xP_n(x)=\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)+\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) \tag{2}$$

on peut donner pour les polynômes de Legendre d'autres formules reliant les $P_n(x)$ de différents degrés. Avant tout, dérivant le développement

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n \tag{3}$$

par rapport à x, nous trouvons:

$$\frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)\,t^n,$$

d'où, en ayant recours au développement (3) et en comparant les coefficients des mêmes puissances de t, nous obtenons la *deuxième formule de récurrence*

$$P_n(x)=P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x). \tag{4}$$

Dérivant (2) par rapport à x et excluant $P'_n(x)$ de la relation obtenue et de la formule (4), nous obtenons la *troisième formule de récurrence*

$$(2n+1)\,P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x). \tag{5}$$

3) Représentations intégrales des polynômes de Legendre. D'après la formule de Rodrigues (22)

du n°93, nous avons

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2-1)^n\}.$$

Ayant recours à la formule de Cauchy pour les dérivées d'ordres supérieurs (n° 17), nous trouvons la *première représentation intégrale*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-x)^{n+1}}\, d\zeta, \tag{6}$$

où C est un contour fermé enveloppant le point x. Supposons, en particulier, x réel, $|x|<1$, C étant une circonférence de centre au point x et de rayon $\sqrt{1-x^2}$; alors posant $\zeta - x = \sqrt{1-x^2}\, e^{it}$, nous trouvons $\zeta^2 - 1 = 2\sqrt{1-x^2}\, e^{it}(x + i \sin t \sqrt{1-x^2})$ et, par conséquent,

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i \sin t \sqrt{1-x^2})^n\, dt.$$

Etant donné que le premier et le second membre sont des fonctions analytiques de x, la dernière égalité obtenue pour les x réels, $|x|<1$, est vraie aussi pour toutes les valeurs complexes de x. De plus, on voit que l'on peut y remplacer sin t par cos t et l'intégrale de 0 à 2π par le double de l'intégrale de 0 à π. Ainsi, nous obtenons la *deuxième représentation intégrale des polynômes de Legendre (Laplace)*:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos t)^n\, dt. \tag{7}$$

Remplaçons ici $x + i\sqrt{1-x^2}\cos t = \zeta$, alors $dt = \dfrac{i\, d\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}}$ et la courbe d'intégration dans le plan des ζ est le segment de droite vertical joignant les points $x + i\sqrt{1-x^2} = e^{i\varphi}$, $x - i\sqrt{1-x^2} = e^{-i\varphi}$ de manière que

$$P_n(x) = -\frac{i}{\pi} \int_{e^{-i\varphi}}^{e^{i\varphi}} \frac{\zeta^n\, d\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}}.$$

D'après le théorème de Cauchy, on peut remplacer ce segment par un arc de circonférence $|\zeta| = 1$ sur lequel $\zeta = e^{i\theta}$, $-\varphi \leqslant \theta \leqslant \varphi$; nous obtenons alors:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{e^{i(n+1)\theta}\, d\theta}{\sqrt{1-2xe^{i\theta}+e^{2i\theta}}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - x}}. \tag{8}$$

Faisant ici $x = \cos\varphi$ et séparant dans le second membre la partie réelle, nous trouvons la *troisième représentation intégrale des polynômes de Legendre (Dirichlet)* :

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}}. \qquad (9)$$

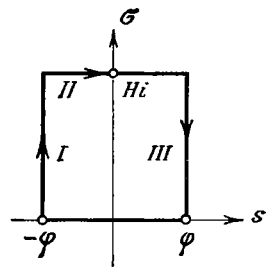

FIG. 195

4) Formules asymptotiques des polynômes de Legendre. Considérons, dans l'intégrale (8), au lieu de θ la variable complexe $\zeta = s + i\sigma$ et remplaçons à l'aide du théorème de Cauchy l'intervalle d'intégration $(-\varphi, \varphi)$ par la ligne brisée à trois côtés $I \cup II \cup III$ (fig. 195), nous obtenons :

$$\pi\sqrt{2}\, P_n(\cos\varphi) = \int_I + \int_{II} + \int_{III}; \qquad (10)$$

sur le segment II, où $\zeta = s + iH$, le module de la fonction à intégrer

$$\left| \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\zeta}}{\sqrt{\cos\zeta - \cos\varphi}} \right| \leqslant \left| \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)H}}{\sqrt{|\cos\sigma| - |\cos\varphi|}} \right|$$

tend vers zéro, lorsque $H \to \infty$, donc $\int_{II} \to 0$, lorsque $H \to \infty$; sur les segments I et III, nous avons $\zeta = \mp\varphi + i\sigma$, $d\zeta = i\, d\sigma$. Passant à la limite, lorsque $H \to \infty$, nous obtenons de (10) :

$$\pi\sqrt{2}\, P_n(\cos\varphi) = ie^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma} d\sigma}{\sqrt{\cos(\varphi - i\sigma) - \cos\varphi}} -$$

$$- ie^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma} d\sigma}{\sqrt{\cos(\varphi + i\sigma) - \cos\varphi}}. \qquad (11)$$

Pour donner une valeur approchée des intégrales pour les grandes valeurs de n, appliquons la méthode du col (n° 77). Pour les grands n, la fonction $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}$ a un pic très accentué au point $\sigma = 0$, de plus la pente la plus raide est celle pour laquelle σ prend des valeurs réelles, de manière qu'il ne soit pas nécessaire de déformer le chemin d'intégration. La présence du facteur $\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi \pm i\sigma) - \cos\varphi}}$ devant $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}$ ne fait qu'accentuer le pic au point $\sigma = 0$. En effet.

$\cos(\varphi \pm i\sigma) - \cos\varphi = \mp 2 \sin\left(\varphi \pm \frac{i\sigma}{2}\right) \sin\frac{i\sigma}{2}$, et le module de ce facteur

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi \pm i\sigma) - \cos\varphi}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\operatorname{sh}\frac{\sigma}{2}\left|\sin\left(\varphi \pm i\frac{\sigma}{2}\right)\right|}}$$

tend vers l'infini lorsque $\sigma \to 0$ et décroît avec la vitesse de la fonction exponentielle lorsque $\sigma \to \infty$.

Ainsi, la partie principale des intégrales (11) pour les grands n peut être calculée en se limitant au petit intervalle d'intégration $0 < \sigma < h$ sur lequel

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi \pm i\sigma) - \cos\varphi}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pm 2 \sin\varphi \cdot \frac{i\sigma}{2}}} = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\varphi}} \sigma^{-\frac{1}{2}}.$$

Avec le même degré de précision on peut conserver aussi la partie restante (h, ∞) de l'intervalle d'intégration, car pour les grands n la fonction $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}$ prend sur celle-ci des valeurs très petites. Nous obtenons alors pour la première intégrale de la formule (11) :

$$\int_0^\infty \approx \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\varphi}} \int_0^\infty \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma} d\sigma = \frac{1-i}{\sqrt{2\sin\varphi}} \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1-i}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}.$$

D'une manière analogue, on donne l'estimation de la seconde intégrale :

$$\int_0^\infty \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\varphi}} \int_0^\infty \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma} d\sigma = \frac{1+i}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}},$$

alors

$$P_n(\cos\varphi) \approx \frac{i}{2\pi\sqrt{\sin\varphi}} \sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \left\{(1-i)\, e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi} - (1+i)\, e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi}\right\}$$

ou encore, après de simples transformations,

$$P_n(\cos\varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}} \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\varphi}}.$$

Nous pouvons avec le même degré de précision remplacer dans le dénominateur $n+\frac{1}{2}$ par n et nous obtenons alors la *formule asymptotique des polynômes de Legendre (Laplace)*:

$$P_n(\cos\varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\varphi}}. \qquad (12)$$

Nous ne nous arrêtons pas sur l'estimation de l'erreur dans la formule obtenue.

On voit de la formule asymptotique que P_n, pour n croissant indéfiniment, tend vers zéro comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$. De cette même formule on peut obtenir une formule approchée des zéros de la fonction $P_n(\cos\varphi)$:

$$\varphi_k \approx \frac{4k-1}{2} \frac{\pi}{2n+1} \quad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad (13)$$

qui est d'autant plus précise que n est grand.

5) Fonctions de Legendre. Tâchons de satisfaire l'équation différentielle des polynômes de Legendre (formule (18) du n° 92):

$$L[w] = (1-z^2)w'' - 2zw' + n(n+1)w = 0 \qquad (14)$$

pour les n non entiers par l'intégrale (6) qui, pour les n entiers positifs, donne une représentation du polynôme $P_n(x)$:

$$w(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

Portant cette dernière expression dans l'équation (14), nous trouvons:

$$L[w] = \frac{n+1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+3}} [2(n+1)\zeta(\zeta-z) - (n+2)(\zeta^2-1)]\, d\zeta =$$

$$= \frac{n+1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{d}{d\zeta} \left\{\frac{(\zeta^2-1)^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+2}}\right\} d\zeta.$$

Ainsi, $L[w]=0$ si, en décrivant le contour C, la fonction

$$f(\zeta) = \frac{(\zeta^2-1)^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+2}}$$

reprend sa valeur de départ. Faisons une coupure dans le plan des ζ suivant une demi-droite reliant le point -1 à $-\infty$ le long de l'axe négatif et choisissons pour C tout contour fermé enveloppant les points $\zeta = 1$ et $\zeta = z$ et évitant la coupure (fig. 196). Lorsqu'on décrit complètement ce contour,

$$\arg f(\zeta) = (n+1)\{\arg(\zeta-1) + \arg(\zeta+1)\} - (n+2)\arg(\zeta-z)$$

a un accroissement de $(n+1)2\pi - (n+2)2\pi = -2\pi$, car $\arg(\zeta-1)$ et $\arg(\zeta-z)$ subissent des accroissements de 2π et $\arg(\zeta+1)$ reprend sa valeur de départ. Il en découle que lorsqu'on décrit le contour C, la fonction $f(\zeta)$ reprend sa valeur de départ, c'est-à-dire que l'intégrale

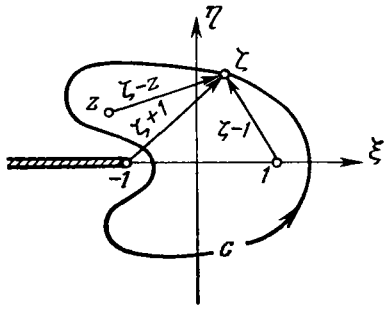

FIG. 196

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta, \quad (15)$$

où C est un contour du type décrit, est une solution de l'équation (14) pour tout n. Cette intégrale est appelée *fonction de Legendre de première espèce*. Pour les n entiers positifs les points $\zeta = \pm 1$ cessent d'être des points singuliers et l'on peut déformer C de manière à obtenir tout contour contenant à son intérieur le point $\zeta = z$. Donc, pour de tels n, la fonction de Legendre coïncide avec le polynôme ordinaire de Legendre.

Etant donné que l'équation différentielle de Legendre (14) est du second degré, outre $P_n(z)$ elle possède une autre solution, linéairement indépendante de $P_n(z)$. On peut obtenir cette solution à partir de $P_n(z)$ à l'aide de la quadrature:

$$w = P_n(z)\int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)P_n^2(\zeta)}. \quad (16)$$

En effet, écrivons l'équation de Legendre sous la forme

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dw}{dz}\right] + n(n+1)w = 0.$$

Puisque $P_n(z)$ lui satisfait, on a

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right] + n(n+1)P_n = 0.$$

Multipliant la première de ces deux équations par P_n et la seconde par w, puis retranchant l'une de l'autre, nous trouvons:

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\left(P_n\frac{dw}{dz} - w\frac{dP_n}{dz}\right)\right] = 0,$$

d'où, par intégration, nous obtenons $(1-z^2)\left(P_n\frac{dw}{dz} - w\frac{dP_n}{dz}\right) = C$ ou

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w}{P_n}\right) = \frac{C}{(1-z^2)P_n^2(z)},$$

soit encore

$$w = P_n(z)\,C\int \frac{dz}{(1-z^2)P_n^2(z)},$$

ce qui coïncide avec l'intégrale (16) à un facteur constant C près. L'intégrale (16), normée de manière qu'elle soit nulle à l'infini, c'est-à-dire

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_{\infty}^{z} \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2) P_n^2(\zeta)}, \tag{17}$$

est d'ordinaire appelée *fonction de Legendre de deuxième espèce.*

Les fonctions $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont linéairement indépendantes car, lorsque $z \to \infty$, $P_n(z) \to \infty$ et $Q_n(z) \to 0$ (de la relation $\alpha P_n(z) + \beta Q_n(z) \equiv 0$, en faisant tendre z vers ∞, nous obtenons d'abord $\alpha = 0$, puis, en substituant z, nous obtenons $\beta = 0$).

Comme on le voit de la formule (17), les points $\zeta = \pm 1$ sont pour la fonction de Legendre $Q_n(z)$ des points singuliers de caractère logarithmique de sorte que même pour les n entiers $Q_n(z)$ n'est pas un polynôme.

6) Fonctions sphériques. Considérons un polynôme harmonique homogène $U_n(x, y, z)$ de la forme

$$U_n(x, y, z) = \sum_{k+l+m=n} a_{klm} x^k y^l z^m, \tag{18}$$

où la somme est étendue à tous les indices non négatifs k, l, m, de somme n. Le polynôme U_n satisfait à l'équation de Laplace à trois dimensions

$$\Delta U_n = \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2}. \tag{19}$$

En coordonnées sphériques $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$ $z = r \cos\theta$, notre polynôme harmonique peut être mis sous la forme

$$U_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \varphi), \tag{20}$$

où Y_n est un polynôme en $\cos\theta$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$, $\sin\varphi$. La fonction $Y_n(\theta, \varphi)$ est appelée *fonction sphérique d'ordre n.*

En dérivant par rapport à x, y et z sous le signe somme, nous voyons que les $2n+1$ polynômes de degré n

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos t + iy\sin t)^n \cos mt\, dt \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ &\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos t + iy\sin t)^n \sin mt\, dt \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{21}$$

(pour $m > n$ les intégrales sont nulles en vertu de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques) sont des polynômes harmoniques.

On peut démontrer qu'ils forment un système linéairement indépendant maximal (*) de polynômes de degré n.

Introduisant les coordonnées sphériques et tenant compte des représentations (20), nous obtenons de (21)le système de $(2n+1)$ fonctions sphériques :

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\cos\theta + i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n \cos mt\, dt,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\cos\theta + i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n \sin mt\, dt.$$

Faisant dans ces intégrales le changement de variable $t-\varphi=\tau$, nous les représentons sous la forme

$$\int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi} [\cos\theta + i\sin\theta\cos\tau]^n \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} m(\varphi+\tau)\, d\tau.$$

Tenant compte maintenant de la propriété connue des fonctions périodiques d'après laquelle l'intégrale relative à un segment de longueur égale à la période ne dépend pas de la position de ce segment, nous remplaçons l'intervalle d'intégration $[-\pi-\varphi,\ \pi-\varphi]$ par le segment $[-\pi, \pi]$. Enfin développant $\cos m(\varphi+\tau)$ d'après une formule connue et tenant compte de ce que la fonction $\sin m\tau$ est impaire, nous en déduisons l'expression du système de $(2n+1)$ fonctions sphériques de degré n :

$$\cos m\varphi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\tau)^n \cos m\tau\, d\tau \quad (m=0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sin m\varphi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\tau)^n \cos m\tau\, d\tau \quad (m=1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Les coefficients de $\cos m\varphi$ et de $\sin m\varphi$ dans les expressions (22) sont égaux ; les fonctions

$$P_{n,m}(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\tau)^n \cos m\tau\, d\tau, \tag{23}$$

qui n'en diffèrent que par un facteur constant, sont appelées *fonctions de Legendre associées*. En particulier,

$$P_{n,0}(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\tau)^n\, d\tau = P_n(\cos\theta)$$

(*) Ceci signifie que tout polynôme harmonique $U_n(x, y, z)$ de degré n peut être représenté par une combinaison linéaire des polynômes (21).

coïncide avec le polynôme de Legendre (nous avons eu recours à la représentation intégrale de Laplace (7)).

Ainsi, le *système de* $(2n + 1)$ *fonctions sphériques de degré n peut être représenté sous la forme*

$$P_n(\cos\theta);\quad P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi,\quad P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi, \tag{24}$$

où $m = 1, 2, \ldots, n$ et $P_{n,m}$ sont les fonctions de Legendre associées.

7) Propriété extrémale des polynômes de Tchébicheff. Les polynômes de Tchébicheff sont des polynômes qui s'écartent le moins de zéro sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$. Cela signifie que le maximum du module de $T_n(x)$ atteint sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ la plus petite valeur qui soit possible pour les polynômes de degré n dont le coefficient du terme de degré le plus élevé est égal à l'unité. En effet, posons $x = \cos\varphi$ et $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, alors de la formule

$$(T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x) = \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}},$$

(cf. (11) du n° 70) nous obtenons:

$$T_n(x_k) = \frac{\cos k\pi}{2^{n-1}} = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}},$$

c'est-à-dire qu'en ces points $T_n(x)$ atteint sa plus grande valeur en module.

Soit $R_n(x)$ un polynôme de degré n dont le coefficient du terme de degré le plus élevé soit égal à l'unité. Supposons que $R_n(x)$ s'écarte de zéro sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ au plus comme $T_n(x)$, il est alors clair que

$$T_n(x_0) \geqslant R_n(x_0),\quad T_n(x_1) \leqslant R_n(x_1),\quad T_n(x_2) \geqslant R_n(x_2),\ \ldots$$

Il en découle que la différence $R_{n-1}(x) = R_n(x) - T_n(x)$, qui est un polynôme de degré non supérieur à $n - 1$, change de signe sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ au moins n fois, c'est-à-dire qu'ell a au moins n racines. Cette contradiction montre précisément que les $T_n(x)$ sont des polynômes qui s'écartent le moins de zéro.

8) Polynômes de Jacobi et série hypergéométrique. L'équation différentielle

$$z(z-1)w'' + [-\gamma + (1 + \alpha + \beta)z]w' + \alpha\beta w = 0 \tag{25}$$

est appelée *équation hypergéométrique* (*Gauss*). Sa solution est une série entière

$$w = F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}z^n + \ldots, \tag{26}$$

appelée *série hypergéométrique* (*). Pour $\alpha = \beta = \gamma = 1$ elle se réduit à la progression géométrique de raison z.

Pour que la série (26) se réduise à un polynôme de degré n, il faut évidemment que α ou β soit égal à $-n$. Posons par exemple $\beta = -n$ et notons

$$\lambda = \gamma - 1, \quad \mu = \alpha + \beta - \gamma;$$

le polynôme obtenu, multiplié par le coefficient C_n, est noté comme suit :

$$Q_n^{(\lambda, \mu)}(z) = C_n F(\lambda + \mu + n + 1, \ -n, \ \lambda + 1 ; \ z).$$

On peut montrer que si l'on remplace z par la variable x suivant la formule

$$z = \frac{1 - x}{2}$$

et si l'on pose

$$C_n = \frac{\Gamma(\lambda + n + 1)}{n! \, \Gamma(\lambda + 1)},$$

alors $Q_n^{(\lambda, \mu)}(z)$ se réduit au polynôme de Jacobi $P_n^{(\lambda, \mu)}(z)$.

9) Equation d'onde et fonctions de Tchébicheff-Hermite. L'équation d'onde pour une particule qui se trouve dans un champ de forces (*Schrödinger*) a la forme suivante :

$$\frac{h^2}{2m} \Delta\psi + (E - V)\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{27}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace, ψ une fonction des coordonnées géométriques de la particule et du temps, h la constante de Planck, m la masse de la particule, V le potentiel et E un paramètre. Nous supposons que ψ ne dépend que de la coordonnée x et $V = \frac{k}{2} x^2$, ce qui correspond au cas d'un oscillateur linéaire. Introduisant deux nouvelles constantes $\alpha^2 = \frac{mk}{h^2}$, $\lambda = \frac{2mE}{h^2}$ dont la première est donnée et la seconde joue le rôle d'un paramètre à la place de E, nous pouvons écrire l'équation (27) sous la forme

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\psi = 0. \tag{28}$$

L'équation (28) se ramène à l'équation des polynômes de Tchébicheff-Hermite. Pour le démontrer nous considérons le système de fonctions

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t), \tag{29}$$

(*) On détermine les coefficients de la série (26) par la méthode ordinaire des coefficients indéterminés.

orthogonal par rapport au poids 1 sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ ($\psi_n(t)$ sont appelées *fonctions de Tchébicheff-Hermite*). Portant $H_n(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\psi_n(t)$ dans l'équation différentielle des polynômes de Tchébicheff-Hermite, nous trouvons après simplification par $e^{\frac{t^2}{2}}$:

$$\psi_n''(t) + (1 + 2n - t^2)\psi_n(t) = 0. \tag{30}$$

Cette équation se ramène à l'équation (28) par un simple changement de variable indépendante. En effet, posons $t = ax$, où a est une constante, et $\psi_n(ax) = \psi(x)$, d'où $\psi''(x) = a^2\psi_n''(t)$ (les dérivées sont calculées par rapport à la variable entre parenthèses). Portant ceci dans l'équation (30), nous la ramenons à la forme

$$\psi''(x) + [(1 + 2n)a^2 - a^4x^2]\psi(x) = 0.$$

Comparant (28) à l'équation obtenue, nous voyons que si l'on prend $a = \sqrt{\alpha}$, alors, pour

$$\lambda = \lambda_n = (1 + 2n)\alpha, \tag{31}$$

elle coïncide avec l'équation (28). Ainsi, si le paramètre λ dans l'équation (28) satisfait à la condition (31), alors la fonction

$$\psi = \psi_n(\sqrt{\alpha}x) = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} H_n(\sqrt{\alpha}x), \tag{32}$$

où H_n est un polynôme et ψ_n une fonction de Tchébicheff-Hermite, est une solution de cette équation.

10) Fonctions de Tchébicheff-Hermite et coordonnées paraboliques. Considérons l'équation d'onde à deux dimensions de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu^2 u = 0, \tag{33}$$

où μ^2 est une constante. Introduisons les nouvelles variables indépendantes ξ, η en posant $\zeta = \xi + i\eta$ et

$$z = x + iy = f(\zeta),$$

où $f(\zeta)$ est une fonction analytique. Par l'application directe de la règle de dérivation des fonctions composées et d'après les équations de Cauchy-Riemann, nous trouvons:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = |f'(\zeta)|^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

donc l'équation (33) par rapport aux nouvelles variables prend la forme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \mu^2 |f'(\zeta)|^2 u = 0. \tag{34}$$

Posons en particulier $f(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta^2$, alors

$$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad y = \xi\eta$$

et les lignes de coordonnées $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ dans le plan des $z = x + iy$ sont des paraboles, c'est pour cette raison que les coordonnées ξ et η sont appelées coordonnées *paraboliques*.

L'équation (34) en coordonnées paraboliques est de la forme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \mu^2(\xi^2 + \eta^2)\, u = 0.$$

Nous cherchons sa solution par la méthode de la séparation des variables en posant $u = U(\xi)\, V(\eta)$. La dernière équation prend alors (après de simples transformations) la forme:

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)} + \mu^2\xi^2 = -\frac{V''(\eta)}{V(\eta)} - \mu^2\eta^2 \tag{35}$$

et, étant donné que le premier membre n'est fonction que de ξ et le second que de η, les deux membres sont donc égaux à une même constante que nous posons égale à $-\beta^2$. Nous obtenons deux équations au lieu de l'équation (35):

$$U''(\xi) + (\mu^2\xi^2 + \beta^2)\, U(\xi) = 0, \quad V''(\eta) + (\mu^2\eta^2 - \beta^2)\, V(\eta) = 0.$$

Ces deux équations différentielles se ramènent à l'équation (30) des fonctions de Tchébicheff-Hermite si l'on introduit les nouvelles variables $t = \sqrt{i\mu}\,\xi$, $\tau = i\sqrt{i\mu}\,\eta$ et si l'on pose $\beta = \beta_n = \sqrt{(2n+1)\, i\mu}$ (cf. (8)). Ainsi, nous obtenons un ensemble infini de solutions de l'équation d'onde (33) de la forme

$$u = u_n = A_n \psi_n(\sqrt{i\mu}\,\xi)\, \psi_n(i\sqrt{i\mu}\,\eta),$$

où ψ_n sont les fonctions de Tchébicheff-Hermite et A_n des constantes.

Les solutions ainsi construites permettent de résoudre, par exemple, les problèmes de diffraction dans le cas du cylindre parabolique.

§ 3. FONCTIONS CYLINDRIQUES

Les fonctions cylindriques ou fonctions de Bessel jouent un rôle important dans les applications, principalement dans les problèmes concernant les corps circulaires ou cylindriques. En effet, la solution des équations de la physique mathématique contenant l'opérateur de Laplace en coordonnées cylindriques conduit par la méthode classique de la séparation des variables (cf. n° 99, exem-

ples 6-8) à l'équation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \lambda^2) y = 0, \qquad (1)$$

qui sert de définition des fonctions cylindriques.

La fonction cylindrique $J_0(x)$ a été pour la première fois étudiée par *Daniel Bernoulli* dans un travail consacré aux vibrations des chaînes pesantes (Pétersbourg, 1732). Bernoulli est arrivé au cas particulier de l'équation (1) correspondant à $\lambda = 0$ et, en la résolvant, il a trouvé l'expression de $J_0(x)$ sous la forme d'une série entière; en outre, il a remarqué, sans donner de démonstration, que l'équation $J_0(x) = 0$ a un ensemble infini de solutions réelles (cf. n° 99, exemple 6).

Le travail suivant dans lequel on trouve des fonctions cylindriques est celui de *Leonhard Euler* (Pétersbourg, 1738). Considérant le problème des vibrations d'une membrane circulaire, Euler est arrivé à l'équation (1) pour des valeurs entières de $\lambda = n$ (cf. n° 99, exemple 7). Résolvant cette équation, il a trouvé pour les n entiers l'expression de $J_n(x)$ sous la forme d'une série suivant les puissances de x et, dans les travaux suivants, il a étendu cette expression au cas des valeurs arbitraires de l'indice λ. En outre, Euler a démontré que, pour les λ égaux à un entier augmenté de $\frac{1}{2}$, les fonctions $J_\lambda(x)$ s'expriment à l'aide de fonctions élémentaires (cf. n° 95), il a remarqué, sans donner de démonstration, que pour λ réel la fonction $J_\lambda(x)$ admet un ensemble infini de zéros réels (cf. n° 98) et donné une représentation intégrale de $J_\lambda(x)$.

Enfin, dans un travail datant de 1769 Euler a donné pour les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ l'expression sous forme de série de la seconde solution de l'équation (1) linéairement indépendante de $J_\lambda(x)$ (cf. (4) du n° 96).

Ainsi, Euler a obtenu les principaux résultats se rapportant aux fonctions cylindriques et à leurs applications en physique mathématique.

L'astronome allemand *Friedrich Bessel* qui étudiait en l'occurrence le mouvement des planètes autour du Soleil a donné en 1824 des relations de récurrence des fonctions $J_\lambda(x)$, qui malgré toute leur importance revêtent un caractère élémentaire (n° 95). Il a obtenu pour les entiers n une nouvelle représentation intégrale de $J_n(x)$ (cf. n° 70), démontré que $J_0(x)$ admet un ensemble infini de zéros et établi les premières tables pour $J_0(x)$, $J_1(x)$ et $J_2(x)$.

95. Fonctions cylindriques de première espèce. 1) Représentations intégrales de Sonine. Considérons l'équation différentielle des fonctions cylindriques

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \lambda^2) x = 0, \qquad (1)$$

où t est la variable indépendante, x la fonction inconnue et λ un paramètre, *indice* de l'équation (1), supposé réel pour plus de com-

modité. Nous allons chercher la solution de cette équation par la méthode opérationnelle donnée au n° 84.

Si l'on désigne par $X(p)$ l'image de la fonction inconnue, alors, d'après les théorèmes III et IV de dérivation de l'original et de l'image du n° 80, nous avons:

$$t^2x'' \doteq (p^2X - px_0 - x_1)'' = p^2X'' + 4pX' + 2pX,$$

$$tx' \doteq -(pX - x_0)' = -pX' - X, \quad t^2x \doteq X'',$$

où $x_0 = x(0)$ et $x_1 = x'(0)$ sont les données initiales (*). Ainsi, l'équation opérationnelle correspondant à l'équation (1) a la forme:

$$(p^2 + 1)X'' + 3pX' + (1 - \lambda^2)X = 0. \qquad (2)$$

Pour trouver la solution de cette équation, faisons le changement de variable indépendante et de fonction en posant

$$p = \operatorname{sh} q, \quad X(p) = \frac{1}{\operatorname{ch} q} Y(q).$$

Alors nous avons : $X' = \frac{dX}{dq} : \frac{dp}{dq} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 q} Y' - \frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^3 q} Y$, $X'' = \frac{dX'}{dq} : \frac{dp}{dq} =$

$= \frac{1}{\operatorname{ch}^3 q} Y'' - 3\frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^4 q} Y' + \frac{3\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{ch}^2 q}{\operatorname{ch}^5 q} Y$, et en portant dans (2) nous en déduisons l'équation plus simple

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0.$$

En revenant aux anciennes variables p et X dans la solution particulière $Y = e^{-\lambda q}$, nous obtenons une solution particulière de l'équation (2):

$$X = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} e^{-\lambda \operatorname{arsh} p} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}\,(p + \sqrt{p^2+1})^{\lambda}}. \qquad (3)$$

La fonction $\sqrt{p^2+1}$ admet des branches uniformes dans le plan des $p = s + i\sigma$ coupé suivant les demi-droites $s = 0$, $|\sigma| > 1$. Supposons $\lambda > 0$ et convenons de considérer la branche de $\sqrt{p^2+1}$ qui sur l'axe des s prend des valeurs positives. Alors la fonction $X(p)$ tend vers zéro lorsque $|p| \to \infty$, avec $\operatorname{Re} p > 0$, uniformément par rapport à $\arg p$ et, par conséquent, sert d'image (cf. le théorème 4 du n° 79; nous ne nous arrêtons pas sur la vérification des autres conditions). Nous appelons l'original de $X(p)$, la solution particulière de l'équation (1), *fonction cylindrique de première espèce* ou *fonction de Bessel d'ordre* λ et nous la notons $J_\lambda(t)$ (pour les $\lambda = n$ entiers cf. la formule (7) du n° 82). Nous trouvons la fonction $J_\lambda(t)$

(*) Les données initiales ne participent pas dans l'équation opérationnelle (2), car $t = 0$ est un point singulier de l'équation (1).

au moyen de la formule d'inversion du n° 79:

$$J_\lambda(t)\frac{1}{2\pi i}=\int_L \frac{e^{pt}\,dp}{\sqrt{p^2+1}\,(p+\sqrt{p^2+1})^\lambda}, \tag{4}$$

où L est une droite arbitraire $\operatorname{Re} p = a > 0$.

Passons ici à la nouvelle variable

$$\omega = p + \sqrt{p^2+1}; \tag{5}$$

alors $p = \frac{1}{2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)$, $\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{d\omega}{\omega}$ et la courbe d'intégration est la courbe C du plan des $\omega = \xi + i\eta$, image de la droite L par la transformation (5). Puisque par la transformation (5) l'axe des σ a pour image l'ensemble des demi-droites $\xi = 0$, $|\eta| > 1$ et la demi-circonférence $|\omega| = 1$, $\xi > 0$ (cf. la propriété de la transformation de Joukovski (n° 7), la transformation (5) ne s'en distingue que peu) et le nombre a est aussi petit qu'on le veut, C a la forme représentée en pointillé sur la fig. 197. L'intégrale (4) se transforme donc en l'intégrale (*N. Sonine*, 1870)

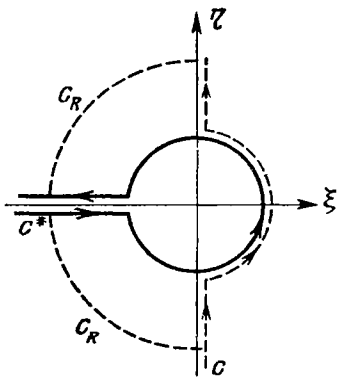

FIG. 197

$$J_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{t}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}}{\omega^{\lambda+1}}\,d\omega. \tag{6}$$

Sans changer la valeur de l'intégrale, on peut évidemment remplacer la courbe C par toute droite verticale $\operatorname{Im}\omega = a > 0$.

Etant donné que sur la circonférence $|\omega| = R$, la fonction $\frac{e^{-\frac{t}{2\omega}}}{\omega^{\lambda+1}}$ tend vers zéro lorsque $R \to \infty$, pour $t > 0$ d'après le lemme de Jordan l'intégrale (6) tend vers zéro sur l'arc C_R (fig. 197). On peut donc remplacer le contour C dans la formule (6) par le contour C^* de la fig. 197 qui part du point $-\infty$ suivant le bord inférieur du demi-axe négatif des ξ, contourne l'origine des coordonnées suivant une circonférence et revient vers $-\infty$ suivant le bord supérieur de ce même demi-axe. Ainsi, nous obtenons encore une représentation intégrale des fonctions cylindriques appartenant également à *Sonine* (nous écrivons z au lieu de t):

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}}{\omega^{\lambda+1}}\,d\omega. \tag{7}$$

L'intégrale de Sonine (7) a été obtenue pour les z positifs, cependant, le second membre de cette formule représente une fonction analytique dans le demi-plan de droite des z, car, pour $\operatorname{Re} z > 0$, l'intégrale (7) converge uniformément en z. Ainsi, l'intégrale de Sonine donne le prolongement analytique de $J_\lambda(z)$ dans le demi-plan de droite.

En outre, pour $\operatorname{Re} z > 0$, l'intégrale de Sonine converge non seulement pour les valeurs positives du paramètre λ, mais aussi pour toutes valeurs complexes, car sur la partie horizontale du contour C^* le facteur exponentiel tend vers zéro plus rapidement que $|\omega^{\lambda+1}|$ croît. Donc l'*intégrale de Sonine définit dans le demi-plan de droite les fonctions de Bessel d'ordre complexe quelconque.*

2) Propriétés analytiques. Pour les valeurs entières du paramètre $\lambda = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) la fonction à intégrer dans l'intégrale de Sonine (7) est uniforme, donc les intégrales sur les parties horizontales du contour C^* disparaissent et l'intégrale (7) prend la forme que nous avons déjà rencontrée (n° 70):

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)}}{\omega^{n+1}}\, d\omega \tag{8}$$

(nous prenons égal à l'unité le rayon de la circonférence qui fait partie du contour C^*). Puisque l'intégrale du second membre de (8) converge pour tout z, de plus uniformément, nous pouvons affirmer que *pour les valeurs entières du paramètre $\lambda = n$ les fonctions $J_n(z)$ sont des fonctions entières.*

Soit maintenant z positif et λ un nombre complexe quelconque. Faisant dans l'intégrale de Sonine (7) le changement de variables $\omega = \frac{2\zeta}{z}$, nous obtenons l'*intégrale de Sonine-Schläfli*

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{C^*} e^{\zeta - \frac{z^2}{4\zeta}} \zeta^{-\lambda-1}\, d\zeta \tag{9}$$

(par ce changement de variables le contour C^* est remplacé par un contour semblable, donc de la même forme que C^*).

L'intégrale de Sonine-Schläfli converge, de plus uniformément, dans tout domaine borné des valeurs de z et pour toute valeur complexe de λ et, par conséquent, elle donne le *prolongement analytique de la fonction cylindrique $J_\lambda(z)$ dans tout le plan complexe des z et pour toutes les valeurs complexes du paramètre λ.* La présence du facteur z^λ devant l'intégrale montre que cette fonction est en général à une infinité de déterminations avec le point de branchement $z = 0$. Mais le *rapport $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$, pour toute valeur complexe de λ, est une fonction entière.*

3) Autres représentations intégrales. Soit $\operatorname{Re} z > 0$; faisons le changement de variables $\omega = e^{i\zeta}$ dans l'inté-

grale de Sonine; le contour C^* est remplacé par le contour représenté sur la fig. 198 (le rayon de la circonférence dans le contour C^* est considéré égal à l'unité). L'intégrale de Sonine se transforme en l'*intégrale de Schläfli*:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} e^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}\, d\zeta, \tag{10}$$

qui représente la fonction cylindrique dans le demi-plan de droite.

Pour les valeurs entières du paramètre $\lambda = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), en vertu de la périodicité des fonctions $e^{in\zeta}$ et $\sin\zeta$ les intégrales relatives aux parties verticales du contour Π se détruisent mutuellement et nous obtenons:

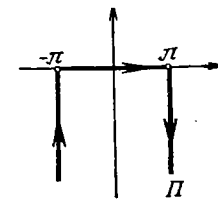

FIG. 198

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\zeta - in\zeta}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z\sin\zeta - n\zeta)\, d\zeta \tag{11}$$

(nous développons la fonction $e^{i(z\sin\zeta - n\zeta)}$ d'après la formule d'Euler et nous tenons compte de ce que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire). C'est l'*intégrale de Bessel* que nous avons déjà donnée au n° 70.

4) Représentation sous forme de série. Développons le facteur $e^{-\frac{1}{\zeta}\left(\frac{z}{2}\right)^2}$ dans l'intégrale de Sonine-Schläfli en série suivant les puissances de $\frac{1}{\zeta}$ et intervertissons l'ordre de sommation et l'ordre d'intégration (cela est légitime vu la convergence uniforme de la série obtenue):

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{C^*} e^{\zeta}\zeta^{-\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\zeta^k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^{\zeta}\zeta^{-\lambda-1-k}\, d\zeta.$$

Tenant compte de la représentation intégrale de Hankel de la fonction gamma (cf. la formule (24) du n° 89) nous en déduisons le *développement en série de la fonction cylindrique*:

$$J_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k}. \tag{12}$$

On voit de la formule (12) que *pour les* λ *réels et* $z = x$ *la fonction* $J_\lambda(x)$ *prend des valeurs réelles.*

Pour les valeurs entières non négatives $\lambda = n$, nous obtenons en particulier le développement

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \tag{13}$$

que nous connaissons déjà (cf. par exemple n^{os} 70 et 82). Pour les valeurs entières négatives $\lambda = -n$, les premiers n termes de la somme (12) disparaissent car $\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = 0$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, et la formule (12) devient:

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\nu}}{(n+\nu)!\,\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu}$$

(nous avons remplacé l'indice de sommation k par l'indice $\nu = k - n$) ou encore

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \tag{14}$$

5) Fonction génératrice. Pour les valeurs entières $\lambda = n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ l'intégrale de Sonine (8) coïncide avec la formule des coefficients du développement de la fonction $e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}$ en série de Laurent suivant les puissances de w. Ainsi,

$$e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, w^n. \tag{15}$$

La fonction $e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}$ est appelée *fonction génératrice* des $J_n(z)$. Au numéro 70 nous l'avons utilisée pour définir les fonctions cylindriques d'ordre entier.

Faisant dans (15) le changement de variables $w = e^{i\theta}$, nous obtenons le développement en série de Fourier de la fonction

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, e^{in\theta}. \tag{16}$$

Séparant dans (16) (pour les z et θ réels) les parties réelles et imaginaires, nous obtenons:

$$\cos(z\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\cos n\theta, \quad \sin(z\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\sin n\theta,$$

ou encore, ayant recours à la relation (14), nous obtenons les séries de Fourier sous la forme réelle :

$$\begin{aligned} \cos(z\sin\theta) &= J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\theta, \\ \sin(z\sin\theta) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\theta. \end{aligned} \tag{17}$$

En particulier, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \cos z &= J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) + \ldots, \\ \sin z &= 2J_1(z) - 2J_3(z) + \ldots \end{aligned}$$

6) Relations de récurrence. Du développement en série (12) nous trouvons :

$$\frac{d}{dz}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1} =$$

$$= -\frac{1}{z^\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k-1}$$

(nous avons remplacé l'indice de sommation k par $k-1$), soit encore

$$\frac{d}{dz}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}. \tag{18}$$

Cette dernière formule peut être mise sous la forme

$$\frac{d}{z\,dz}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^{\lambda+1}},$$

d'où l'on voit que l'application de l'opération $\frac{1}{z}\frac{d}{dz}$ à $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ se ramène à changer le signe et à remplacer λ par $\lambda+1$. Appliquant cette opération plusieurs fois de suite et introduisant la notation

$$\underbrace{\frac{d}{z\,dz}\cdot\frac{d}{z\,dz}\cdots\frac{d}{z\,dz}}_{n\text{ fois}} = \frac{d^n}{(z\,dz)^n},$$

nous obtenons :

$$\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = (-1)^n\frac{J_{\lambda+n}(z)}{z^{\lambda+n}}. \tag{19}$$

Nous obtenons exactement de la même manière :

$$\frac{d}{dz}(z^\lambda J_\lambda(z)) = 2^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda+k)}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+2k-1} =$$

$$= z^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k-1}$$

(nous avons eu recours à la relation de récurrence pour la fonction gamma), ou encore

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\lambda}J_{\lambda}(z)\right) = z^{\lambda}J_{\lambda-1}(z). \tag{20}$$

Divisant par z les deux membres de l'égalité, nous voyons que l'application de l'opération $\frac{1}{z}\frac{d}{dz}$ à $z^{\lambda}J_{\lambda}(z)$ se ramène à un remplacement de l'indice λ par $\lambda - 1$. Appliquant cette opération plusieurs fois, nous trouvons:

$$\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left\{z^{\lambda}J_{\lambda}(z)\right\} = z^{\lambda-n}J_{\lambda-n}(z). \tag{21}$$

Les formules (18) et (20) s'écrivent sous la forme

$$J'_{\lambda}(z) = \frac{\lambda}{z}J_{\lambda}(z) - J_{\lambda+1}(z); \quad J'_{\lambda}(z) = J_{\lambda-1}(z) - \frac{\lambda}{z}J_{\lambda}(z). \tag{22}$$

Retranchant l'une des équations (22) de l'autre, nous trouvons une *relation de récurrence* qui ne contient pas de dérivées:

$$J_{\lambda-1}(z) + J_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z}J_{\lambda}(z). \tag{23}$$

De la même manière, en additionnant les équations (22), nous trouvons la *deuxième relation de récurrence*

$$J_{\lambda-1}(z) - J_{\lambda+1}(z) = 2J'_{\lambda}(z). \tag{24}$$

Notons encore que de (22), pour $\lambda = 0$, nous obtenons

$$J'_0(z) = -J_1(z). \tag{25}$$

7) Fonctions cylindriques d'ordre $\lambda = n + \frac{1}{2}$, où n est un entier. Comme l'a montré Euler, ces fonctions s'expriment par des fonctions élémentaires. En effet, d'après la formule (11) et tenant compte de ce que $\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2k+2)!\sqrt{\pi}}{4^{k+1}(k+1)!}$ (cf. la formule (18) du n° 89) nous obtenons d'abord

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^{k+1}(k+1)!}{k!\,(2k+2)!\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \tag{26}$$

et

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 4^k k!}{k!\,(2k!)\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z. \quad (27)$$

Puis tenant compte des relations (19) et (21), nous trouvons :

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(z)&=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\frac{\sin z}{z},\\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\frac{\cos z}{z}, \end{aligned} \quad (28)$$

d'où l'on voit que $J_{\pm n+\frac{1}{2}}(z)$ s'expriment au moyen de fonctions élémentaires.

Après de simples transformations ces formules s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{S_1\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)+S_2\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\right\},\\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{S_1\cos\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)-S_2\sin\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

où

$$\begin{aligned} S_1&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!\,(n-2k)!\,(2z)^{2k}},\\ S_2&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k+1)!}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!\,(2z)^{2k+1}} \end{aligned} \quad (30)$$

($[a]$ désigne la partie entière du nombre positif a, par exemple, $\left[\frac{7}{2}\right]=3$).

8) Orthogonalité. Par définition, la fonction cylindrique $y=J_\lambda(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$x^2J''_\lambda(x)+xJ'_\lambda(x)+(x^2-\lambda^2)J_\lambda(x)=0. \quad (31)$$

Posons $x=\alpha t$, où α est une constante, et considérons la fonction $y=J_\lambda(\alpha t)=y(t)$. Nous avons $J'_\lambda(x)=\frac{1}{\alpha}\frac{dy}{dt}$, $J''_\lambda(x)=\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

et en les portant dans (31) nous trouvons l'équation différentielle à laquelle la fonction $y = J_\lambda(\alpha t)$ satisfait :

$$y'' + \frac{1}{t} y' + \left(\alpha^2 - \frac{\lambda^2}{t^2}\right) y = 0. \tag{32}$$

Considérons maintenant les deux fonctions $y_1 = J_\lambda(\alpha t)$ et $y_2 = J_\lambda(\beta t)$, où α et β sont des constantes ; d'après ce qui vient d'être démontré, ces fonctions satisfont aux équations :

$$y_1'' + \frac{1}{t} y_1' + \left(\alpha^2 - \frac{\lambda^2}{t^2}\right) y_1 = 0, \quad y_2'' + \frac{1}{t} y_2' + \left(\beta^2 - \frac{\lambda^2}{t^2}\right) y_2 = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par y_2, la seconde par y_1 et retranchons la seconde de la première. Si l'on désigne encore $u = y_1' y_2 - y_1 y_2'$, il est alors clair que $u' = y_1'' y_2 - y_1 y_2''$ et nous obtenons :

$$u' + \frac{1}{t} u = (\beta^2 - \alpha^2) y_1 y_2.$$

Après multiplication par t, le premier membre devient égal à $\frac{d}{dt}(ut)$, par suite, intégrant par rapport à t de 0 à l, nous obtenons

$$ut\,|_{t=0}^{l} = (\beta^2 - \alpha^2) \int_0^l y_1 y_2 t\, dt$$

(pour les λ non entiers la convergence de l'intégrale exige que nous supposions $\lambda > -1$; alors si même la fonction à intégrer $J_\lambda(\alpha t) \times \times J_\lambda(\beta t)\, t$ tend vers l'infini, lorsque $t \to 0$, cet infini est d'ordre inférieur au premier). Portant les valeurs de y_1 et y_2 en fonction de J_λ, nous avons :

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^l J_\lambda(\alpha t)\, J_\lambda(\beta t)\, t\, dt = l\{\alpha J_\lambda'(\alpha l)\, J_\lambda(\beta l) - \beta J_\lambda(\alpha l)\, J_\lambda'(\beta l)\}. \tag{33}$$

Soient maintenant α et β des racines distinctes de l'équation

$$J_\lambda(xl) = 0 \tag{34}$$

ou de l'équation

$$J_\lambda'(xl) = 0. \tag{35}$$

Alors le second membre de (33) est nul et nous obtenons :

$$\int_0^l J_\lambda(\alpha t)\, J_\lambda(\beta t)\, t\, dt = 0. \tag{36}$$

Comme on le démontre au numéro 98, pour les λ réels chacune des équations (34) et (35) a un ensemble infini de racines réelles. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ un système de racines de l'une de ces

équations, alors en partant de la formule (36) on peut affirmer que les *fonctions* $J_\lambda(\alpha_1 t)$, $J_\lambda(\alpha_2 t)$, . . ., $J_\lambda(\alpha_k t)$, . . . *forment un système orthogonal par rapport au poids* t *sur l'intervalle* $(0, l)$ (*).

Ce fait montre l'analogie entre les fonctions cylindriques $J_\lambda(\alpha t)$ (qui vérifient l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{t}y' + \left(\alpha^2 - \frac{\lambda^2}{t^2}\right) y = 0$) et les fonctions trigonométriques $\sin \alpha t$ et $\cos \alpha t$ (qui vérifient l'équation $y'' + \alpha^2 y = 0$). En effet, les fonctions trigonométriques $\sin k\alpha t$, $\cos k\alpha t$ forment également une famille orthogonale sur un certain intervalle. Dans la suite nous soulignons à plusieurs reprises cette analogie.

9) Séries suivant les fonctions cylindriques. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ des racines *positives* de l'équation (34) ou (35) et soit $f(t)$ une fonction différentiable par morceau sur l'intervalle $(0, l)$. Supposons que $f(t)$ soit représentable sur cet intervalle par la série uniformément convergente

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_\lambda(\alpha_k t). \tag{37}$$

Puisque, d'après ce qui a été démontré dans 8), les fonctions $J_\lambda(\alpha_k t)$ forment un système orthogonal par rapport au poids t sur l'intervalle $(0, l)$, les coefficients de la série (37) sont définis par la formule générale (7) du n° 91 :

$$c_k = \frac{1}{d_k^2} \int_0^l f(t) J_\lambda(\alpha_k t)\, t\, dt, \tag{38}$$

où

$$d_k^2 = \int_0^l J_\lambda^2(\alpha_k t)\, t\, dt.$$

Calculons cette dernière intégrale. Pour cela nous avons recours à la formule (33) dans laquelle nous supposons que α_k est l'une des racines de l'équation (34) ou (35) et que β tend indéfiniment vers cette racine. Dans le cas de l'équation (34) la formule (33) se met sous la forme :

$$\int_0^l J_\lambda(\alpha_k t) J_\lambda(\beta t)\, t\, dt = \frac{\alpha_k l J'_\lambda(\alpha_k l) J_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2},$$

d'où on voit que, lorsque $\beta \to \alpha_k$, on a une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ dans le second membre. Levant cette indétermination à

(*) Pour les λ non entiers nous supposons $\lambda > -1$.

l'aide de la règle de L'Hospital, nous trouvons :

$$d_k^2 = \int_0^l J_\lambda^2(\alpha_k t)\, t\, dt = \lim_{\beta \to \alpha_k} \frac{\alpha_k l J_\lambda'(\alpha_k l)\, J_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2} = \frac{l^2}{2} J_\lambda'^2(\alpha_k l).$$

D'après la première formule (22), y faisant $z = \alpha_k l$, nous trouvons $J_\lambda'(\alpha_k l) = -J_{\lambda+1}(\alpha_k l)$, et la dernière formule s'écrit sous la forme

$$d_k^2 = \frac{l^2}{2} J_{\lambda+1}^2(\alpha_k l). \tag{39}$$

D'une façon analogue, dans le cas de l'équation (35), nous trouvons :

$$d_k^2 = -\lim_{\beta \to \alpha_k} \frac{\beta J_\lambda(\alpha_k l)\, J_\lambda'(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2} = -\frac{l^2}{2} J_\lambda(\alpha_k l)\, J_\lambda''(\alpha_k l).$$

Mais de l'équation différentielle (31), en y faisant $x = \alpha_k l$ et en tenant compte de la formule (35), nous trouvons $J_\lambda''(\alpha_k l) = -\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2 l^2}\right) J_\lambda(\alpha_k l)$, donc la dernière formule peut s'écrire sous la forme

$$d_k^2 = \frac{1}{2}\left(l^2 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2}\right) J_\lambda^2(\alpha_k l). \tag{40}$$

La série (37), dont on trouve les coefficients d'après les formules (38), est la série généralisée de Fourier ; on l'appelle aussi *série de Fourier-Bessel*. On démontre qu'elle converge vers $\frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)]$ pour toute fonction différentiable par morceau sur l'intervalle $(0, l)$.

96. Autres fonctions cylindriqes. 1) Fonctions de Hankel. Considérons l'équation différentielle des fonctions cylindriques d'indice λ :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \lambda^2) w = 0 \tag{1}$$

(z est la variable indépendante, w la fonction inconnue, λ le paramètre ; ici toutes les quantités sont supposées complexes). Tâchons de trouver une solution de l'équation (1) à l'aide d'une transformation intégrale (cf. n° 88), c'est-à-dire que nous cherchons une solution de la forme

$$w = \int_C K(z, \zeta)\, W(\zeta)\, d\zeta, \tag{2}$$

où W est une nouvelle fonction inconnue, la fonction $K(z, \zeta)$ et le contour C sont choisis comme nous le faisons plus bas. Portant (2) dans l'équation (1), nous avons (on suppose que nous pouvons intervertir l'ordre de dérivation et l'ordre d'intégration) :

$$\int_C \left\{ z^2 \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + z \frac{\partial K}{\partial z} + (z^2 - \lambda^2) K \right\} W(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Supposons maintenant que K satisfasse à l'équation différentielle

$$z^2 \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + z \frac{\partial K}{\partial z} + z^2 K + \frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2} = 0, \tag{3}$$

alors la relation précédente prend la forme :

$$\int_C \left\{ \frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2} + \lambda^2 K \right\} W(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Intégrant deux fois par parties le premier terme $\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2} W(\zeta)$, nous ramenons cette dernière équation à la forme

$$\int_C \{W'' + \lambda^2 W\} K\, d\zeta + \left[W \frac{\partial K}{\partial \zeta} - K W' \right]_a^b = 0,$$

où a et b sont les extrémités de la courbe C. On voit que si l'on prend

$$W = e^{\pm i\lambda\zeta}$$

et que si l'on choisit le chemin d'intégration de manière qu'en ses extrémités l'expression $W \frac{\partial K}{\partial \zeta} - KW'$ s'annule, alors l'intégrale (2) donne la solution de l'équation (1). Il est facile de vérifier que l'équation (3) est satisfaite si l'on prend $K = e^{iz \sin \zeta}$. Nous prenons pour chemins d'intégration les contours C_1 et C_2 de la fig. 199. Pusique sur l'axe imaginaire $\sin \zeta = \sin iy = i \operatorname{sh} y$ et sur les droites $\pm\pi + iy$ nous avons $\sin \zeta = -\sin iy = -i \operatorname{sh} y$, sur les parties verticales de C_1 et C_2

$$|K| = \begin{cases} e^{-x \operatorname{sh} y}, & y > 0, \\ e^{x \operatorname{sh} y}, & y < 0. \end{cases}$$

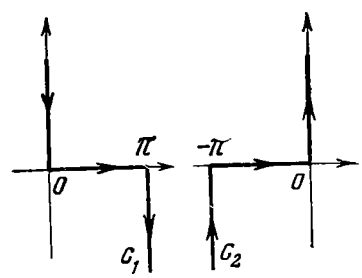

FIG. 199

On voit que si $x = \operatorname{Re} z > 0$, alors, lorsque $y \to +\infty$ (respectivement $y \to -\infty$), $|K|$ tend vers zéro avec la vitesse $e^{-\frac{x}{2} e^{y}}$ (respectivement $-e^{-\frac{x}{2} e^{-y}}$). Mais alors aussi bien $W \frac{\partial K}{\partial \zeta} = e^{\pm i\lambda\zeta} iz \times$ $\times \cos \zeta \cdot K$ que $KW' = \pm i\lambda e^{\pm i\lambda\zeta} K$ tendent vers zéro, lorsque ζ tend vers les extrémités de C_1 et C_2, car le fait que K tend vers zéro atténue la croissance possible du facteur qui se trouve devant K.

Ainsi, nous obtenons dans le demi-plan de droite $\operatorname{Re} z > 0$ les solutions de l'équation (1)

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda^{(1)}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}\,d\zeta\,; \\ H_\lambda^{(2)}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

qui sont appelées *fonctions cylindriques de troisième espèce ou fonctions de Hankel* (*).

2) Relations entre les fonctions cylindriques des première et troisième espèces. Si l'on additionne les deux formules (4), alors l'intégrale suivant le demi-axe imaginaire disparaît et, tenant compte de l'intégrale de Schläfli (cf. la formule (10) du n° 95), nous obtenons :

$$H_\lambda^{(1)}(z) + H_\lambda^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\Pi} e^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}\,d\zeta = 2J_\lambda(z)$$

(Π est le contour de la fig. 198). Ainsi, pour toutes les valeurs complexes de λ dans le demi-plan de droite $\operatorname{Re} z > 0$ la fonction de Bessel est égale à

$$J_\lambda(z) = \frac{H_\lambda^{(1)}(z) + H_\lambda^{(2)}(z)}{2}. \tag{5}$$

Pour trouver l'expression des fonctions de Hankel à l'aide des fonctions de Bessel, trouvons d'abord la relation qui existe entre les fonctions de Hankel dont les ordres ne diffèrent que par le signe. Par exemple, nous avons

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}\,d\zeta,$$

et introduisant une nouvelle variable d'intégration $\omega = -\zeta + \pi$, le contour C_1 devenant le contour C_1^- qui coïncide avec C_1 mais est parcouru en sens contraire, nous obtenons :

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z) = -\frac{e^{i\lambda\pi}}{\pi}\int_{C_1^-} e^{iz\sin\omega - i\lambda\omega}\,d\omega = e^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z).$$

De façon analogue, introduisant $\omega = -\zeta - \pi$, nous obtenons une formule pour $H_\lambda^{(2)}(z)$. Ainsi,

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z) = e^{i\lambda\pi}H_\lambda^{(1)}(z), \quad H_{-\lambda}^{(2)} = e^{-i\lambda\pi}H_\lambda^{(2)}(z). \tag{6}$$

(*) Les fonctions cylindriques de deuxième espèce sont données plus loin. Les fonctions $H_\lambda^{1,2}(z)$ ont été introduites en 1902 par Nielsen qui les a appelées fonctions de Hankel, en l'honneur du savant dont un des travaux (1869) a permis des recherches qui conduisirent à ces fonctions.

Si maintenant en plus de la relation (5) nous considérons la formule

$$J_{-\lambda}(z)=\frac{H_{-\lambda}^{(1)}(z)+H_{-\lambda}^{(2)}(z)}{2}=\frac{e^{i\lambda\pi}H_{\lambda}^{(1)}(z)+e^{-i\lambda\pi}H_{\lambda}^{(2)}(z)}{2}$$

(nous avons eu recours aux formules (6)), alors nous déduisons de ces deux formules les expressions des fonctions de Hankel au moyen des fonctions de Bessel

$$H_{\lambda}^{(1)}(z)=i\frac{e^{-i\lambda\pi}J_{\lambda}(z)-J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi};\quad H_{\lambda}^{(2)}(z)=-i\frac{e^{i\lambda\pi}J_{\lambda}(z)-J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi}. \tag{7}$$

Strictement parlant, les formules (7) ont été obtenues pour les λ distincts des nombres entiers, cependant elles restent vraies aussi dans le cas des λ entiers si on lève l'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ d'après la règle de L'Hospital dans les seconds membres. Nous pouvons alors affirmer que les formules (7) donnent le prolongement analytique de $H_{\lambda}^{(1)}(z)$ et $H_{\lambda}^{(2)}(z)$ dans tout le plan de la variable complexe z. De même que les fonctions de Bessel, les fonctions $H_{\lambda}^{(1,2)}(z)$ s'avèrent, en général, des *fonctions multiformes ayant $z=0$ pour point de branchement.*

Des formules (7) nous obtenons, pour les fonctions de Hankel, des relations analogues à celles que vérifient les fonctions de Bessel. Par exemple, tenant compte de la formule de récurrence (23) du n° 95 nous en déduisons les formules de récurrence

$$H_{\lambda-1}(z)+H_{\lambda+1}(z)=\frac{2\lambda}{z}H_{\lambda}(z),\quad H_{\lambda-1}(z)-H_{\lambda+1}(z)=2H_{\lambda}'(z) \tag{8}$$

(ici H_{λ} peut aussi bien désigner $H_{\lambda}^{(1)}$ que $H_{\lambda}^{(2)}$). A l'aide des formules (24) et (25) du n° 95, nous obtenons :

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz};\quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz}. \tag{9}$$

Plus haut, nous avons attiré l'attention sur l'analogie qui existe entre les fonctions de Bessel et les fonctions trigonométriques ; les formules (5) et (9) montrent l'analogie entre les fonctions $H_{\lambda}(z)$ et les fonctions $e^{\pm iz}$.

3) Fonctions de Weber. La formule (5) montre que la fonction $J_{\lambda}(z)$ est construite à partir de la fonction $H_{\lambda}(z)$ de la même façon que la fonction cosinus à partir des fonctions $e^{\pm iz}$. On considère aussi les fonctions que l'on peut construire à l'aide de H_{λ} de la même façon que la fonction sinus :

$$Y_{\lambda}(z)=\frac{H_{\lambda}^{(1)}(z)-H_{\lambda}^{(2)}(z)}{2i}. \tag{10}$$

Ces fonctions sont appelées *fonctions cylindriques de deuxième espèce ou fonctions de Weber*; on les appelle encore *fonctions de Neumann* et on les note alors $N_\lambda(z)$ (*).

Etant donné que pour les valeurs réelles de z et λ les fonctions $J_\lambda(z)$ sont réelles, il découle des formules (7) que pour les valeurs réelles de z et λ

$$\overline{H_\lambda^{(1)}(z)} = H_\lambda^{(2)}(z).$$

Mais alors il résulte de (10) que pour les valeurs réelles de z et λ, les fonctions de Weber prennent des valeurs réelles.

Utilisant les formules (7) et (10), nous obtenons aussi les expressions des fonctions de Weber à l'aide des fonctions de Bessel:

$$Y_\lambda(z) = \frac{\cos \lambda\pi J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda\pi}. \tag{11}$$

Cette dernière formule est vraie pour les λ non entiers; pour λ tendant vers un nombre entier n, nous obtenons une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$. Levant cette indétermination à l'aide de la règle de L'Hospital, nous obtenons pour les $\lambda = n$ entiers:

$$Y_n(z) = \left.\frac{\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}\cos\lambda\pi - \pi\sin\lambda\pi J_\lambda(z) - \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}}{\pi\cos\lambda\pi}\right|_{\lambda=n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=n}. \tag{12}$$

Les relations de récurrence suivantes sont vraies pour les fonctions de Weber

$$Y_{\lambda-1}(z) + Y_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} Y_\lambda(z); \quad Y_{\lambda-1}(z) - Y_{\lambda+1}(z) = 2Y'_\lambda(z). \tag{13}$$

Pour les vérifier il suffit d'y porter les expressions de Y_λ exprimées à l'aide des H_λ (d'après la formule (10)) et de tenir compte des relations (8).

Les fonctions de Weber dont l'ordre est égal à un entier augmenté de $\frac{1}{2}$ s'expriment également à l'aide de fonctions élémentaires, car de la formule (11) il découle pour $\lambda = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$:

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1} J_{-n-\frac{1}{2}}(z); \quad Y_{-n-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z). \tag{14}$$

(*) La fonction $Y_\lambda(z)$ a été introduite par Weber en 1873. En 1867, Neumann a introduit des fonctions qui diffèrent un peu de $Y_\lambda(z)$; elles sont égales à

$$\frac{\pi}{2} Y_\lambda(z) + (\ln 2 - C) J_\lambda(z),$$

où C est la constante d'Euler.

Trouvons sous forme de série entière l'expression des fonctions de Weber d'ordre entier. Pour cela nous pouvons utiliser la formule (12) et le développement en série

$$J_\lambda(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{1}{\Gamma(\lambda+k+1)}. \qquad (15)$$

Etablissons d'abord des formules auxiliaires à partir de la théorie de la fonction gamma. Faisant $z=n-1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, dans la formule (9) de la dérivée logarithmique de la fonction gamma (n° 89), nous obtenons:

$$\psi(n)=\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=-C-\left(\frac{1}{n}-1\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{3}\right)-$$

$$-\ldots=-C+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1} \qquad (16)$$

(les autres termes se simplifient). D'où, pour $n=1, 2, 3, \ldots$ nous avons

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\Big|_{t=n}=-\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma^2(n)}=\frac{1}{(n-1)!}\left(C-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n-1}\right)$$

(nous avons remplacé $\Gamma(n)$ par $(n-1)!$). Aux points $t=-n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ la fonction gamma a des pôles du premier ordre de résidus $\frac{(-1)^n}{n!}$ (cf. n° 89), donc, au voisinage du point $t=-n$, nous avons le développement suivant:

$$\frac{1}{\Gamma(t)}=(-1)^n n!\,(t+n)\{1+C_1(t+n)+\ldots\}.$$

On voit que pour $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\Big|_{t=-n}=(-1)^n n!.$$

Dérivant maintenant (15) par rapport à λ, nous trouvons:

$$\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}=\ln\frac{z}{2}J_\lambda(z)+\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\Big|_{t=\lambda+k+1}$$

et

$$\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}=-\ln\frac{z}{2}J_{-\lambda}(z)-\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\Big|_{t=-\lambda+k+1}.$$

Pour les $\lambda=n$ entiers positifs, d'après les deux dernières formules, la formule (12) et les valeurs déjà calculées de $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)$, nous

obtenons :

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \left(\ln \frac{z}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+k} + \right.$$

$$\left. + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right\} \text{(*)} \qquad (17)$$

et pour $n = 0$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left(\ln \frac{z}{2} + C\right) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right). \qquad (18)$$

Nous voyons que les fonctions de Bessel d'ordre entier sont des fonctions entières tandis que dans le développement de $Y_n(z)$, outre les puissances de z, participe encore $\ln z$.

4) Solution générale de l'équation des fonctions cylindriques. Par construction, les fonctions de Hankel $H_\lambda^{(1)}(z)$ et $H_\lambda^{(2)}(z)$ sont des solutions de l'équation

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \lambda^2) w = 0. \qquad (1)$$

Au numéro 97 nous montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes, donc, d'après une propriété bien connue des équations différentielles linéaires, la solution générale de l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$w = C_1 H_\lambda^{(1)}(z) + C_2 H_\lambda^{(2)}(z), \qquad (19)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Puisque les fonctions $J_\lambda(z)$ et $Y_\lambda(z)$ s'expriment à l'aide des fonctions $H_\lambda^{(1)}(z)$ et $H_\lambda^{(2)}(z)$ d'une manière linéaire avec un déterminant non nul

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{i}{2}$$

(cf. formules (5) et (10)), les fonctions $J_\lambda(z)$, $Y_\lambda(z)$ sont aussi des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1). Donc, la

(*) Le premier terme ($k = 0$) de l'expression entre accolades est $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

solution générale de cette équation pour tout λ peut encore être représentée sous la forme

$$w = C_1 J_\lambda(z) + C_2 Y_\lambda(z), \tag{20}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. De plus, puisque $H_\lambda^{(1)}$ et $H_\lambda^{(2)}$ s'expriment linéairement à l'aide de J_λ et de $J_{-\lambda}$ avec un déterminant

$$\begin{vmatrix} i\dfrac{e^{-i\lambda\pi}}{\sin\lambda\pi} & -\dfrac{i}{\sin\lambda\pi} \\ -i\dfrac{e^{i\lambda\pi}}{\sin\lambda\pi} & \dfrac{i}{\sin\lambda\pi} \end{vmatrix} = \frac{2i}{\sin\lambda\pi}$$

non nul et fini pour tout λ non entier, la solution générale, pour λ non entier, peut encore être représentée sous la forme

$$w = C_1 J_\lambda(z) + C_2 J_{-\lambda}(z). \tag{21}$$

Pour $\lambda = n$ entier, les fonctions J_n et J_{-n} sont linéairement dépendantes car $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ et, au lieu de (21), il faut prendre la solution générale sous la forme (19) ou (20).

5) Fonctions cylindriques de la variable purement imaginaire ou fonctions de Bessel modifiées. Dans certaines applications, on a besoin des fonctions cylindriques de la variable purement imaginaire $z = ix$. De la formule (28) du n° 95 il découle que la fonction $y = J_\lambda(ix)$ satisfait à l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{22}$$

Nous trouvons du développement en série de $J_\lambda(z)$:

$$J_\lambda(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^\lambda i^{2k}}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k} = i^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}.$$

On voit que si nous voulons obtenir une fonction réelle pour λ et x réels, nous devons multiplier $J_\lambda(ix)$ par le facteur constant $i^{-\lambda} = e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}}$. Ce produit est noté comme suit

$$I_\lambda(x) = e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}} J_\lambda(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}. \tag{23}$$

La fonction $I_{-\lambda}(x)$ est aussi une solution de l'équation (22), et si λ n'est pas un nombre entier, alors $I_\lambda(x)$ et $I_{-\lambda}(x)$ sont linéairement indépendantes. Si $\lambda = n$ est un entier, alors de (23) et de la relation $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ nous obtenons :

$$I_{-n}(z) = I_n(z). \tag{24}$$

Pour obtenir la seconde solution linéairement indépendante de I_n, il faut ici utiliser des fonctions qui se déduisent des autres fonctions cylindriques. La fonction la plus utilisée, qui s'obtient de la première fonction de Hankel de la variable purement imaginaire multipliée par un facteur constant (*Macdonald*, 1899), est

$$K_\lambda(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\lambda\pi i}{2}} H_\lambda^{(1)}(ix). \tag{25}$$

L'importance de cette fonction pour les applications tient à ce qu'elle est une solution de l'équation (22), positive et qui tend vers 0, lorsque $x \to \infty$, suivant une loi exponentielle (cf. les formules (17) du n° 97). Tenant compte de l'expression (7) de la fonction de Hankel exprimée à l'aide de la fonction de Bessel, nous trouvons pour les λ non entiers :

$$K_\lambda(x) = -\pi \frac{e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}} J_\lambda(ix) - e^{\frac{\lambda\pi i}{2}} J_{-\lambda}(ix)}{2 \sin \lambda\pi},$$

ou, en introduisant à l'aide de la formule (23) la fonction $I_\lambda(x)$

$$K_\lambda(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)}{\sin \lambda\pi}. \tag{26}$$

Passant ici à la limite lorsque λ tend vers un nombre entier n et levant l'indétermination, nous obtenons :

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda} - \frac{\partial I_\lambda(x)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=n}. \tag{27}$$

D'où nous pouvons aussi obtenir le développement de $K_n(x)$ en série de la même manière que pour la fonction de Weber. Par exemple, pour $n = 0$ nous trouvons

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \psi(k+1), \tag{28}$$

où ψ est la dérivée logarithmique de la fonction gamma. En vertu des formules (25) et (6) ci-dessus nous obtenons pour tout λ :

$$K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x).$$

Il est facile de vérifier que les fonctions $I_\lambda(z)$ et $K_\lambda(z)$ satisfont à des relations de récurrence un peu modifiées :

$$I_{\lambda-1}(z) - I_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} I_\lambda(z) ; \quad I_{\lambda-1}(z) + I_{\lambda+1}(z) = 2I'_\lambda(z). \tag{29}$$

$$K_{\lambda-1}(z) - K_{\lambda+1}(z) = -\frac{2\lambda}{z} K_\lambda(z) ; \quad K_{\lambda-1}(z) + K_{\lambda+1}(z) = -2K'_\lambda(z), \tag{30}$$

en particulier

$$I_0'(z) = I_1(z); \quad K_0'(z) = -K_1(z). \tag{31}$$

Pour λ égal à un nombre entier augmenté de $\frac{1}{2}$, ces fonctions s'expriment à l'aide de fonctions élémentaires; par exemple

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{sh}\,z, \quad I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{ch}\,z;$$

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = K_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}. \tag{32}$$

On rencontre dans certains problèmes des fonctions cylindriques de la variable $z = x\sqrt{-i} = e^{\frac{3i\pi}{4}}x$. On a introduit des notations spéciales pour les parties réelles et imaginaires de ces fonctions

$$\left.\begin{aligned} J_\lambda(x\sqrt{-i}) = I_\lambda(x\sqrt{-i}) &= \mathrm{ber}_\lambda x + i\,\mathrm{bei}_\lambda x,\\ K_\lambda(x\sqrt{-i}) &= \mathrm{ker}_\lambda x + i\,\mathrm{kei}_\lambda x,\\ H_\lambda(x\sqrt{-i}) &= \mathrm{her}_\lambda x + i\,\mathrm{hei}_\lambda x. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Pour $\lambda = 0$, l'indice d'ordinaire est omis, par exemple

$$I_0(x\sqrt{-i}) = \mathrm{ber}\,x + i\,\mathrm{bei}\,x. \tag{34}$$

97. Expressions asymptotiques des fonctions cylindriques. Les expressions asymptotiques sont de diverses formes selon que nous considérons les grandes valeurs de l'ordre λ, de la variable x ou les deux simultanément. Nous allons donc considérer trois cas:

1) *Expressions asymptotiques pour les grandes valeurs de l'ordre.* Considérons d'abord la première fonction de Hankel que nous prenons sous la forme de l'intégrale (4) du n° 96

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{ix\sin\zeta - i\lambda\zeta}\,d\zeta, \tag{1}$$

où C_1 est le contour de la fig. 199. Nous supposons $\lambda > x > 0$ et posons $\frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\alpha}$. La formule (1) prend la forme:

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\lambda}\int_{C_1} e^{\lambda\left(i\frac{\sin\zeta}{\mathrm{ch}\,\alpha} - i\zeta\right)}\,d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{\lambda f(\zeta)}\,d\zeta, \tag{2}$$

où

$$f(\zeta) = i\frac{\sin\zeta}{\mathrm{ch}\,\alpha} - i\zeta = -\cos s\,\frac{\mathrm{sh}\,\sigma}{\mathrm{ch}\,\alpha} + \sigma + i\left(\sin s\,\frac{\mathrm{ch}\,\sigma}{\mathrm{ch}\,\alpha} - s\right) \tag{3}$$

(nous posons $\zeta = s + i\sigma$). Pour obtenir la formule asymptotique nous aurons recours à la méthode du col donnée au n° 77. Les points

selles sont les racines de l'équation

$$f'(\zeta_0) = i\left(\frac{\cos\zeta_0}{\operatorname{ch}\alpha} - 1\right) = 0,$$

d'où $\cos\zeta_0 = \operatorname{ch}\alpha$ et

$$\zeta_0 = \pm i\alpha. \tag{4}$$

La ligne de plus grande pente passant par ces points a pour équation

$$\operatorname{Im} f(\zeta) = \sin s\,\frac{\operatorname{ch}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha} - s = 0 \tag{5}$$

(en effet, aux points selles $s = 0$, $\sigma = \pm\alpha$), d'où

$$\operatorname{ch}\sigma = \operatorname{ch}\alpha\,\frac{s}{\sin s}.$$

Elle a la forme indiquée en pointillé sur la fig. 200 et elle est formée de l'axe imaginaire et de deux arcs de courbe tendant asymptotiquement vers les droites $s = \pm\pi$. On peut prendre le chemin d'intégration formé d'arcs de cette courbe de telle façon que l'intégrale (1) ait la même valeur que pour le chemin C_1. Nous désignons ce chemin par $\widetilde{C}_1$ et nous l'indiquons sur la fig. 200 en pointillé gras ; ce chemin d'intégration est formé de la demi-droite $(i\infty, -\alpha i)$ portée par l'axe imaginaire et de la moitié de droite de l'arc inférieur de la ligne de plus grande pente (*).

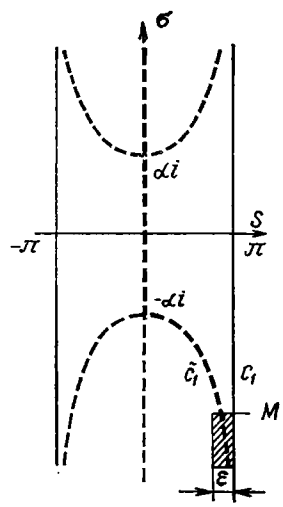

FIG. 200

Puisque, d'après l'équation (5), on a $\operatorname{Im} f(\zeta) = 0$ sur la courbe $\widetilde{C}_1$, sur cette dernière

$$f(\zeta) = -\cos s\,\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha} + \sigma.$$

Sur l'axe des σ, la fonction $f(i\sigma) = \sigma - \frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha}$ atteint un maximum local $\alpha - \operatorname{th}\alpha$ au point $\sigma = \alpha$ et un minimum local $\operatorname{th}\alpha - \alpha$ au point $\sigma = -\alpha$ (ce que l'on voit immédiatement en considérant la dérivée $\frac{df}{d\sigma} = -\left(\frac{\operatorname{ch}\sigma}{\operatorname{ch}\alpha} + 1\right)$.

(*) Pour démontrer que C_1 et $\widetilde{C}_1$ donnent la même valeur à l'intégrale, il suffit de remarquer que C_1 peut être transformé en $\widetilde{C}_1$ au moyen d'une déformation dans un domaine borné et dans la demi-bande $\pi - \varepsilon < s < \pi$, $\sigma < -M$, où ε est aussi petit que l'on veut et M aussi grand que l'on veut (c'est le domaine hachuré de la fig. 200), de plus les intégrales sur les parties de C_1 et $\widetilde{C}_1$ appartenant à cette demi-bande sont aussi petites que l'on veut.

Il est facile de voir que le maximum au point $\zeta_0 = \alpha i$ est l'unique maximum de la fonction $f(\zeta)$ sur la courbe $\widetilde{C}_1$. Puisque $f(\zeta_0) = \alpha - \operatorname{th}\alpha$, $f''(\zeta_0) = \operatorname{th}\alpha$ et que l'angle de la ligne de plus grande pente au point méplat est $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$, d'après la formule (18) du n° 77, nous trouvons

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi} e^{\lambda(\alpha - \operatorname{th}\alpha)} \sqrt{\frac{2\pi}{\operatorname{th}\alpha}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda \operatorname{th}\alpha}}\, e^{\lambda(\alpha - \operatorname{th}\alpha)}.$$

Remplaçant ici $\operatorname{th}\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2 - x^2} = \frac{\mu}{\lambda}$, où $\mu = \sqrt{\lambda^2 - x^2}$ et $\alpha = \operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}$, nous obtenons l'*expression asymptotique* que nous cherchions *de la première fonction de Hankel pour les grandes valeurs de l'ordre*:

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx -i\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\, e^{-\mu + \lambda \operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}} \qquad (6)$$

(il faut supposer ici $x < \lambda$).

De façon analogue, on trouve l'*expression asymptotique de la deuxième fonction de Hankel pour les grandes valeurs de l'ordre*

$$H_\lambda^{(2)}(x) \approx i\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\, e^{-\mu + \lambda \operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}}. \qquad (7)$$

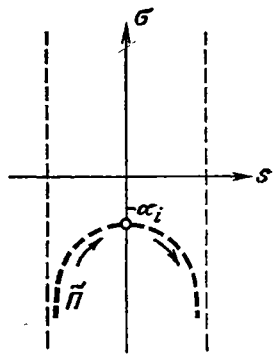

FIG. 201

A l'aide de la formule (5) du n° 96 et des estimations (6) et (7) nous trouvons l'expression asymptotique des fonctions de Bessel pour les grandes valeurs de l'ordre

$$J_\lambda(x) = \frac{H_\lambda^{(1)}(x) + H_\lambda^{(2)}(x)}{2} \approx 0. \qquad (8)$$

Si l'on fait des calculs analogues en partant de l'intégrale de Schläfli au lieu de (2)

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Pi} e^{ix\sin\zeta - i\lambda\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{\Pi} e^{j(\zeta)}\, d\zeta$$

(la formule (10) du n° 95 ; la fonction $f(\zeta)$ a la même expression que plus haut) et si l'on remplace le contour Π de la fig. 198 par le contour $\widetilde{\Pi}$ de la fig. 201, à savoir par la partie de la ligne de plus grande pente de la surface $\tau = \operatorname{Re} f(\zeta)$, alors on obtient à la place de (8) une *autre expression asymptotique pour les grandes valeurs de* λ

$$J_\lambda(x) \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\, e^{\mu - \lambda \operatorname{arth}\frac{\mu}{\lambda}}. \qquad (9)$$

Nous ne nous arrêtons pas sur les détails de ces calculs.

D'après la formule (10) du n° 96 et en se basant sur (6) et (7) nous pouvons encore trouver l'*expression asymptotique de la fonction de Weber pour les grandes valeurs de l'ordre*

$$Y_\lambda(x)=\frac{H_\lambda^{(1)}(x)-H_\lambda^{(2)}(x)}{2i}\approx-\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\,e^{-\mu+\lambda\,\mathrm{arth}\frac{\mu}{\lambda}}. \qquad (10)$$

2) *Expressions asymptotiques pour les grandes valeurs de la variable.* Nous supposons $x>\lambda$ et nous désignons par $\frac{\lambda}{x}=\cos\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ un nombre inférieur à l'unité. La première fonction de Hankel peut être écrite sous la forme

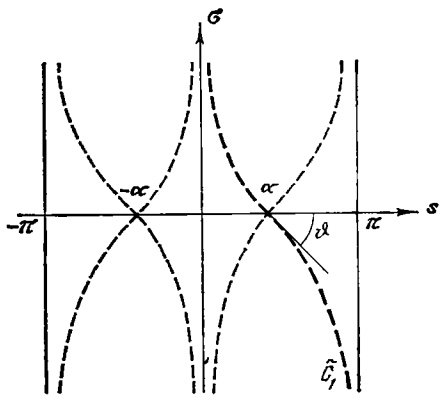

FIG. 202

$$H_\lambda^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{x(i\sin\zeta-i\zeta\cos\alpha)}\times$$

$$\times\,d\zeta=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{xg(\zeta)}\,d\zeta, \qquad (11)$$

où

$$g(\zeta)=i\sin\zeta-i\zeta\cos\alpha=$$

$$=-\cos s\,\mathrm{sh}\,\sigma+\sigma\cos\alpha+$$

$$+i(\sin s\cdot\mathrm{ch}\,\sigma-s\cos\alpha) \qquad (12)$$

ne diffère que par un facteur constant de la fonction $f(\zeta)$ de la formule (3). Les points selles sont les racines de l'équation $g'(\zeta)=i(\cos\zeta_0-\cos\alpha)=0$, d'où $\zeta_0=\pm\alpha$. Les lignes de plus grande pente passant par ces points sont données par les équations

$$\mathrm{Im}\,g(\zeta)=\sin s\cdot\mathrm{ch}\,\sigma-s\cos\alpha=\pm(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha),$$

ou encore

$$\mathrm{ch}\,\sigma=\cos\alpha\frac{s}{\sin s}\pm\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\sin s}.$$

Chacune de ces lignes (fig. 202) est constituée de deux branches qui se coupent aux points selles et tendent asymptotiquement vers l'axe imaginaire et vers les droites $s=\pm\pi$.

Nous choisissons le contour $\widetilde{C}_1$, une des branches de la ligne de plus grande pente passant par le point $\zeta_0=\alpha$

$$\mathrm{ch}\,\sigma=\cos\alpha\frac{s}{\sin s}+\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\sin s},$$

le long duquel l'intégrale (17) a la même valeur que pour C_1. Il n'y a sur $\widetilde{C}_1$ qu'un point stationnaire de la fonction

$$\tau=\mathrm{Re}\,g(\zeta)=-\cos s\,\mathrm{sh}\,\sigma+\sigma\cos\alpha,$$

à savoir le point selle $\zeta_0 = \alpha$, et lorsqu'on approche des deux extrémités de $\widetilde{C}_1$, cette fonction tend vers $-\infty$. Il en découle que $\zeta_0 = \alpha$ est l'unique point de maximum de la fonction $\tau = \operatorname{Re} g(\zeta)$ sur $\widetilde{C}_1$.

Puisque $g(\zeta_0) = i(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$, $g''(\zeta_0) = -i\sin\alpha$ et $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ (*), d'après la formule (18) du n° 77, nous trouvons

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin\alpha}}\, e^{ix(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) - i\frac{\pi}{4}},$$

d'où, en posant $x\cos\alpha = \lambda$, $\sin\alpha = \frac{\nu}{x}$, où $\nu = \sqrt{x^2 - \lambda^2}$ et $\alpha = \arcsin\frac{\nu}{x}$, nous obtenons l'*expression asymptotique de la première fonction de Hankel pour les grandes valeurs de la variable*:

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\, e^{i\left(\nu - \lambda\arcsin\frac{\nu}{x} - \frac{\pi}{4}\right)}. \tag{13}$$

De façon analogue on peut obtenir l'*expression asymptotique de la deuxième fonction de Hankel*

$$H_\lambda^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\, e^{-i\left(\nu - \lambda\arcsin\frac{\nu}{x} - \frac{\pi}{4}\right)}. \tag{14}$$

En outre, si l'on suppose $x \gg \lambda$, de sorte que $\nu = \sqrt{x^2 - \lambda^2} \approx x$, $\alpha = \arcsin\frac{\nu}{x} \approx \frac{\pi}{2}$, alors ces dernières formules se simplifient:

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad H_\lambda^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \tag{15}$$

Entre autres, il découle des formules (15) la proposition donnée sans démonstration au n° 96, d'après laquelle pour tout λ réel les fonctions de Hankel $H_\lambda^{(1)}(z)$ et $H_\lambda^{(2)}(z)$ sont linéairement indépendantes.

De ces mêmes formules, d'après les formules (5) et (10) du n° 96, nous trouvons les *expressions asymptotiques des fonctions cylindriques*

(*) Pour trouver l'angle ϑ, remarquons d'abord que la courbe $\operatorname{Re} g(\zeta) = \text{const}$ qui passe par le point selle $\zeta_0 = \alpha$ a pour équation

$$-\cos s \operatorname{sh}\sigma + \sigma\cos\alpha = 0,$$

dont les termes principaux au voisinage de ζ_0 s'écrivent sous la forme $\sigma(s - \alpha)\sin\alpha + \ldots = 0$ (nous avons remplacé $\cos s = \cos\alpha - \sin\alpha(s - \alpha) + \ldots$ et $\operatorname{sh}\sigma = \sigma + \ldots$). Donc les tangentes à cette courbe au point ζ_0 sont les droites $s = \alpha$ et $\sigma = 0$. Les tangentes à la courbe $\operatorname{Im} g(\zeta) = \text{const}$ en ce même point, d'après la propriété des fonctions harmoniques conjuguées, sont les bissectrices, c'est-à-dire $\vartheta = \pm\frac{\pi}{4}$, il faut donc prendre $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$.

des première et deuxième espèces pour les valeurs $x \gg \lambda$

$$J_\lambda(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$
$$Y_\lambda(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{16}$$

Il est intéressant de noter que pour les valeurs $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ du paramètre ces expressions asymptotiques sont exactes (pour les entiers $\lambda = n$ la première formule avait été obtenue plus haut (n° 77)).

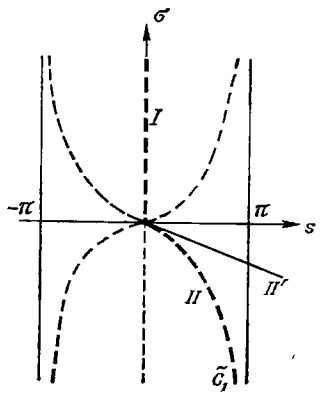

FIG. 203

De façon analogue, nous trouvons les *formules asymptotiques des fonctions de Bessel modifiées pour les valeurs* $x \gg \lambda$:

$$\left.\begin{aligned} I_\lambda(x) &= e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}} J_\lambda(ix) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \\ K_\lambda(x) &= \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\lambda\pi i}{2}} H_\lambda^{(1)}(ix) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Nous ne donnons pas la démonstration de ces formules.

3) *Expressions asymptotiques pour les grandes valeurs de* x *et* λ. Si l'on suppose $x = \lambda$ et si l'on pose

$$g(\zeta) = i \sin\zeta - i\zeta, \tag{18}$$

alors

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_C e^{x(i\sin\zeta - i\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{xg(\zeta)}\, d\zeta, \tag{19}$$

et nous n'avons qu'un seul point selle à l'origine des coordonnées $\zeta_0 = 0$. La ligne de plus grande pente

$$\operatorname{Im} g(\zeta) = \sin s \operatorname{ch}\sigma - s = 0 \tag{20}$$

est formée de trois branches passant par l'origine des coordonnées : l'axe imaginaire $s = 0$ et deux arcs de courbe qui tendent asymptotiquement vers les droites $s = \pm\pi$ (fig. 203). A l'aide des branches de cette courbe nous construisons le contour $\widetilde{C}_1$ (en pointillé gras sur la fig. 203) qui donne à l'intégrale (19) la même valeur que le contour C_1 ; nous appliquons à ce contour la méthode du col.

Ici, contrairement aux cas précédents, au point méplat $g''(\zeta) = -i\sin\zeta$ s'annule et seule $g'''(0) = -i$ est différente de zéro et, par suite, la formule (18) du n° 77 ne peut être appliquée. Une

analyse élémentaire montre que malgré tout le point $\zeta_0 = 0$ est un point de maximum de la fonction $g(\zeta)$ sur $\widetilde{C}_1$ et, de plus, il est unique. Conformément à l'idée de la méthode du col, pour obtenir l'expression asymptotique, nous pouvons remplacer $g(\zeta) \approx \frac{g'''(0)}{3!}\zeta^3 = -\frac{i}{6}\zeta^3$ et la courbe $\widetilde{C}_1$ par sa portion qui se trouve dans un petit voisinage du point selle ou, avec le même degré de précision,

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi}\left\{\int_{\mathrm{I}} e^{-\frac{ix}{6}\zeta^3}\,d\zeta + \int_{\mathrm{II}'} e^{-\frac{ix}{6}\zeta^3}\,d\zeta\right\},$$

où I est le demi-axe imaginaire positif et II′ la tangente à la portion II (cf. fig. 203). L'équation de cette tangente est $\sigma = -\frac{1}{\sqrt{3}}s$ (ce qui s'obtient facilement du développement taylorien du premier membre de (20)) et sur celle-ci $\zeta^3 = (s + i\sigma)^3 = i\sigma(3s^2 - \sigma^2) = 8i\sigma^3$, $d\zeta = e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{ds^2 + d\sigma^2} = -2e^{-i\frac{\pi}{6}}d\sigma$ (on a le signe moins car $d\sigma < 0$).

C'est pourquoi, en posant sur la portion I $\zeta = i\sigma$, nous obtenons :

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi}\left\{i\int_{\infty}^{0} e^{-\frac{x}{6}\sigma^3}\,d\sigma - 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\int_{0}^{-\infty} e^{\frac{4}{3}x\sigma^3}\,d\sigma\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{i\sqrt[3]{\frac{6}{x}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}2\sqrt[3]{\frac{3}{4x}}\right\}\int_0^\infty e^{-\xi^3}\,d\xi.$$

Mais

$$\int_0^\infty e^{-\xi^3}\,d\xi = \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{2}{3}}\,dt = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

et nous trouvons

$$H_\lambda^{(1)}(x) \approx -\frac{1}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{6}{x}}\,(i - e^{-i\frac{\pi}{6}}). \tag{21}$$

V. Fock a donné une autre formule asymptotique pour le cas

$$\sqrt{\lambda^2 - x^2} \approx \lambda^{\frac{2}{3}}, \quad \lambda \gg 1$$

ou, ce qui revient au même, pour les valeurs finies

$$t = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\lambda^2}{x^2} - 1\right).$$

Cette formule a la forme:

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} w(t), \tag{22}$$

où

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{L} e^{t\zeta - \frac{\zeta^3}{3}} d\zeta \tag{23}$$

et L est un contour qui réunit le point $\zeta = \infty$ au point $\zeta = 0$ suivant la demi-droite $\arg \zeta = -\frac{2\pi}{3}$ et le point $\zeta = 0$ au point $\zeta = \infty$ suivant le demi-axe positif $\arg \zeta = 0$. Cette fonction a été étudiée

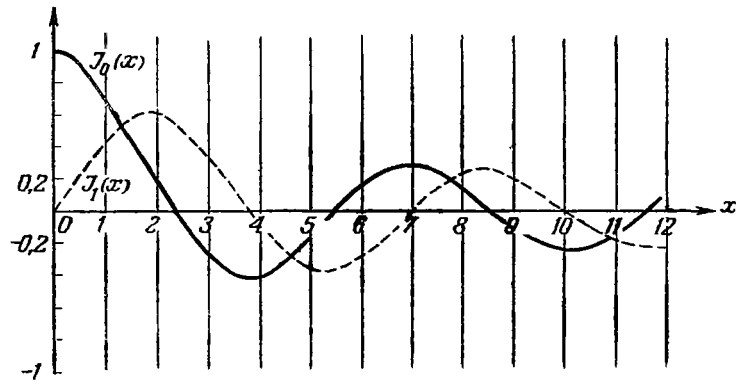

FIG. 204

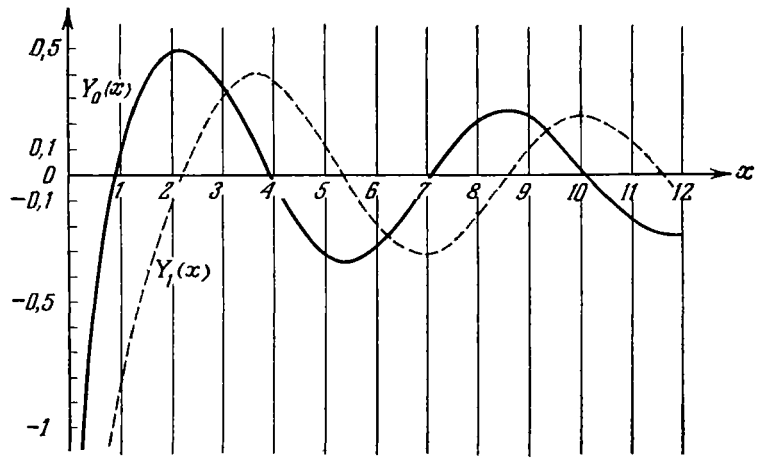

FIG. 205

et des tables ont été constituées. Nous ne donnons pas la démonstration de la formule de Fock (cf. V. Fock [10], pp. 55-60).

98. Graphes des fonctions cylindriques. Distribution des zéros. Nous donnons ici les graphes des fonctions cylindriques les plus employées pour les valeurs positives de la variable. Les courbes continues des fig. 204 et 205 représentent les fonctions $J_0(x)$ et $Y_0(x)$. Pour les petites valeurs de la variable, le caractère de ces

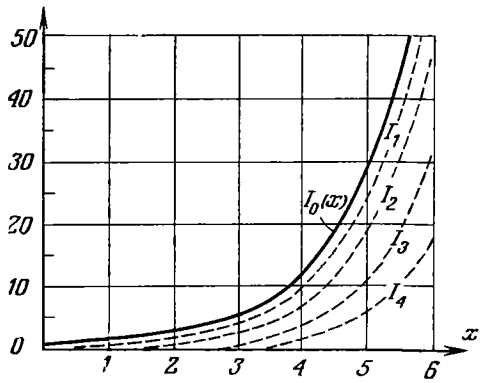

FIG. 206

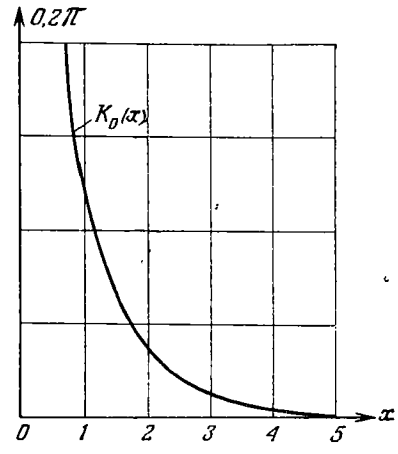

FIG. 207

graphes peut être obtenu par les représentations sous forme de séries de $J_0(x)$ et $Y_0(x)$. Pour les grandes valeurs de x, on peut utiliser les expressions asymptotiques (24) du n° 97 desquelles découlent

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \tag{1}$$

Les courbes en pointillé sur ces mêmes figures représentent les fonctions de Bessel et de Weber du premier ordre. Elles s'obtiennent des graphes de $J_0(x)$ et $Y_0(x)$ au moyen de la dérivation graphique en se basant sur les relations $J_1(x) = -J_0'(x)$, $Y_1(x) = -Y_0'(x)$.

Sur les figures 206 et 207 sont donnés également les graphes des fonctions de Bessel modifiées

$$I_0(x) = J_0(ix) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \qquad K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \tag{2}$$

qui sont souvent utilisés en physique ; sur la première d'entre elles on a représenté en pointillé le graphe de $I_n(x)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Les fonctions $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ sont oscillantes ; leurs fréquences sont approximativement constantes et leurs amplitudes décroissent comme $\frac{1}{\sqrt{x}}$. De plus, la fonction $Y_n(x)$, lorsqu'on s'approche de l'origine des coordonnées, tend vers $-\infty$.

Au contraire, les fonctions $I_0(x)$ et $K_0(x)$ ne sont pas oscillantes : la première croît d'une façon monotone de la valeur 1 à ∞ approximativement avec la vitesse de la fonction exponentielle, tandis que la seconde décroit de $+\infty$ à zéro.

On donne sur la fig. 208 le relief de la fonction $J_0(z)$; on y a tracé les lignes de niveau du module (de 0,2 en 0,2) et de la variable (de 30° en 30°), la section suivant l'axe réel fournit le graphe de $|J_0(x)|$. On donne sur la fig. 209 le relief de la branche de $H_0^{(1)}(z)$ qui a une discontinuité le long de l'axe réel négatif et tend vers zéro lorsque $y \to +\infty$. On y a tracé les lignes de niveau du module (de 0,2 en 0,2) et de la variable (de 15° en 15°). On voit sur la fig. 210 la dépendance de $J_\lambda(x)$ de deux variables réelles x et λ ; les courbes sur la surface donnent les graphes de $J_0(x)$, $J_2(x)$, . . ., $J_{10}(x)$ et de $J_\lambda(2)$, $J_\lambda(4)$, . . ., $J_\lambda(20)$.

Pour les calculs, les zéros des fonctions cylindriques ont une grande importance. Considérons le problème de la distribution des

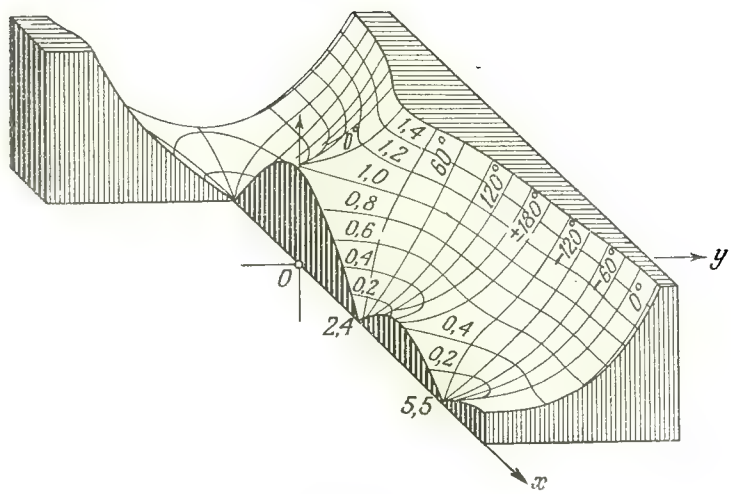

FIG. 208

zéros des fonctions de Bessel. Soit λ un nombre réel, $\lambda > -1$. De la formule (33) du n° 95, que nous avons établie au cours de la démonstration de l'orthogonalité de ces fonctions, pour des zéros arbitrai-

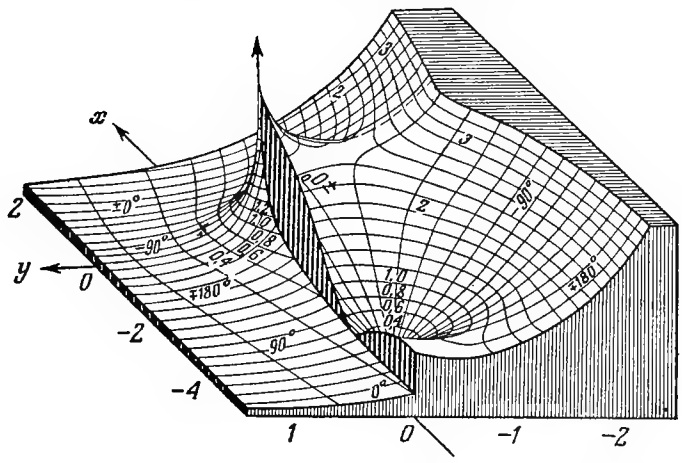

FIG. 209

res $z = \alpha$ et $z = \beta$ de la fonction $J_\lambda(z)$, il découle la relation

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 J_\lambda(\alpha t)\, J_\lambda(\beta t)\, t\, dt = 0. \tag{3}$$

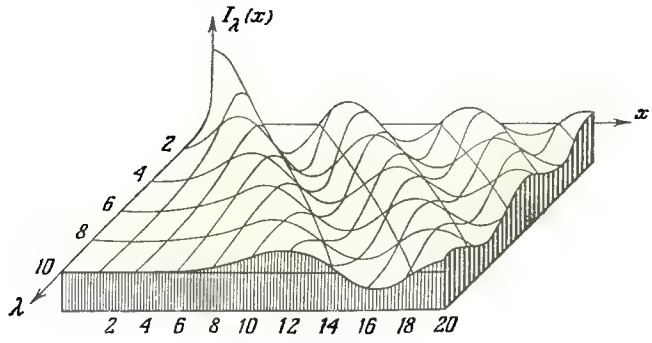

FIG. 210

Etant donné que tous les coefficients du développement

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{4}$$

sont réels, il est évident que

$$J_\lambda(\bar{z}) = \overline{J_\lambda(z)}. \tag{5}$$

Il en découle en particulier que si z est une racine complexe de l'équation $J_\lambda(z) = 0$, alors $\bar{z}$ est aussi une racine de cette équation.

Faisant dans la formule (3) $\alpha = z$, $\beta = \bar{z}$ et tenant compte de la formule (5), d'après laquelle $J_\lambda(z)\, J_\lambda(\bar{z}) = |J_\lambda(z)|^2$, nous avons:

$$(\bar{z}^2 - z^2) \int_0^1 |J_\lambda(tz)|^2\, t\, dt = 0.$$

Mais comme ici l'intégrale ne peut être nulle, on a $\bar{z}^2 - z^2 = 0$, d'où soit $\bar{z} = z$, soit $\bar{z} = -z$. Aisni, pour les $\lambda > -1$ réels, la fonction $J_\lambda(z)$ ne peut avoir que des zéros réels ou purement imaginaires.

De la formule asymptotique, avec $\lambda \geqslant 0$, obtenue au n° 97,

$$J_\lambda(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{6}$$

il découle que $J_\lambda(x)$ a *un ensemble infini de zéros positifs* (en effet, $J_\lambda(x)$ est continue et, comme il découle de (6), elle change une infinité de fois de signe). Mais de la formule

$$J_\lambda(-z) = e^{i\lambda\pi} J_\lambda(z) \tag{7}$$

qui découle directement du développement (4) on voit que les zéros de $J_\lambda(z)$ sont disposés d'une manière symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. Donc, $J_\lambda(z)$ *a aussi un ensemble infini de zéros négatifs.*

Il découle de (6) une formule approchée des zéros de $J_\lambda(x)$:

$$\alpha_k^{(\lambda)} \approx \frac{3\pi}{4} + \lambda\frac{\pi}{2} + k\pi, \tag{8}$$

d'autant plus exacte que $|k|$ est grand. Donnons, comme exemple, les valeurs des plus petits zéros positifs de la fonction $J_0(x)$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha_k^{(0)}$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7415	14,9309	18,0711	21,2126

Remarquons que la formule approchée (8) donne pour $k = 6$ la valeur $\alpha_6^{(0)} = 21{,}206$ (avec une précision de 0,01).

Pour étudier la question des zéros purement imaginaires de $J_\lambda(z)$, posons dans la formule (4) $z = xi$; nous trouvons:

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!\,\Gamma(\lambda + k + 1)}. \tag{9}$$

Soit λ un nombre réel arbitraire; puisque $\lambda + k + 1$ pour tous les k, excepté un nombre fini, prend des valeurs positives, tous les coeffi-

cients de la série (9), excepté un nombre fini, sont positifs. Puisque, de plus, le signe du second membre de la formule (9), pour les grands $|x|$, est défini par le signe des termes du plus haut degré, nous pouvons affirmer que $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} > 0$ pour les $|z|$ suffisamment grands, c'est-à-dire $J_\lambda(z) \neq 0$. Mais sur un intervalle fermé de l'axe imaginaire, la fonction entière $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros, donc pour tout λ réel la fonction $J_\lambda(z)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros purement imaginaires. En particulier, pour $\lambda > -1$ tous les coefficients de la série (9) sont positifs, donc la fonction $J_\lambda(z)$ pour $\lambda > -1$ n'a pas de zéros purement imaginaires.

Etudions certaines particularités de la distribution des zéros des fonctions de Bessel. Pour cela posons d'abord

$$y(x) = \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \tag{10}$$

et remarquons que cette fonction satisfait à l'équation différentielle

$$xy'' + (2\lambda + 1)\, y' + xy = 0, \tag{11}$$

qui s'obtient par la substitution $J_\lambda = x^\lambda y$ dans l'équation des fonctions cylindriques.

Soit α un zéro positif quelconque de la dérivée y', alors l'équation (11) pour $x = \alpha$ prend la forme $y''(\alpha) + y(\alpha) = 0$. Mais $y(\alpha)$ ne peut être égale à zéro, sinon des conditions $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 0$, d'après le théorème d'unicité (*) de la solution du problème initial de l'équation différentielle (11), il découlerait que $y(x) \equiv 0$. C'est pourquoi $y(\alpha)$ et $y''(\alpha)$ ont des signes opposés.

Soient maintenant α et β ($\beta > \alpha$) deux zéros positifs voisins de $y'(x)$, de manière que $y'(x) \neq 0$ sur l'intervalle (α, β). Mais d'après le théorème de Rolle, au moins un zéro de $y''(x)$, plus précisément un nombre impair de tels zéros, appartient à l'intervalle (α, β). Il en découle que $y''(\alpha)$ et $y''(\beta)$ et, par suite, $y(\alpha)$ et $y(\beta)$ ont des signes opposés, c'est-à-dire qu'au moins un zéro de $y(x)$ appartient à l'intervalle (α, β). Mais $y(x)$ ne peut avoir plus d'un zéro sur (α, β), car dans le cas contraire sur cet intervalle il y aurait au moins un zéro de $y'(x)$, ce qui est en contradiction avec nos conditions. Ainsi, on peut affirmer que les zéros positifs de $y(x)$ et de $y'(x)$ se succèdent alternativement. Cela est également vrai pour les zéros négatifs.

Remarquons ensuite que la relation de récurrence (18) du n° 95 peut s'écrire sous la forme

$$y'(x) = -\frac{J_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda}. \tag{12}$$

(*) Le point $x = \alpha$ est un point régulier de l'équation (11).

Donc, les zéros de $y'(x)$ coïncident avec les zéros de $J_{\lambda+1}(x)$; d'autre part, on voit de (10) que les zéros de $y(x)$ coïncident avec ceux de $J_\lambda(x)$. Ainsi, les *zéros des fonctions de Bessel dont les ordres diffèrent d'une unité alternent.* Nous avons à nouveau mis au jour l'analogie entre les fonctions de Bessel et les fonctions trigonométriques : les zéros de $\cos\left(x+\lambda\,\frac{\pi}{2}\right)$ et de $\cos\left[x+(\lambda+1)\frac{\pi}{2}\right]$ se succèdent alternativement, comme il est facile de le voir.

99. Exemples. Applications. 1) Théorème d'addition des fonctions de Bessel. *Pour tout entier n et z_1 et z_2 complexes*

$$J_n(z_1+z_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1)\,J_{n-k}(z_2). \tag{1}$$

La démonstration découle du théorème d'addition des fonctions exponentielles et de la définition de J_n au moyen de la fonction génératrice. Nous avons :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1+z_2)\,w^n = e^{\frac{z_1+z_2}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)} = e^{\frac{z_1}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)} e^{\frac{z_2}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)};$$

développons maintenant en série les fonctions

$$e^{\frac{z_1}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1)\,w^n, \qquad e^{\frac{z_2}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_2)\,w^k$$

et multiplions ces développements en ordonnant le produit suivant les puissances de w. Nous avons :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1+z_2)\,w^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1)\,J_{n-k}(z_2)\right\}w^n,$$

d'où, en vertu de l'unicité du développement en série de Laurent, pour tout $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, nous obtenons la formule (1).

2) Exemples d'équations différentielles dont les solutions s'expriment à l'aide des fonctions cylindriques. Une classe importante d'exemples d'équations différentielles linéaires du second ordre dont les solutions s'expriment à l'aide de fonctions cylindriques est donnée par l'équation

$$x^2y''+axy'+(b+cx^\alpha)\,y=0, \tag{2}$$

où a, b, c et α sont des constantes, de plus c et α sont non nulles (*).

En effet, passons dans l'équation (2) à une nouvelle variable indépendante t et à une nouvelle fonction inconnue u, en posant

$$x=kt^\mu, \qquad y=t^\nu u, \tag{3}$$

où μ, ν et k sont des constantes. Remplaçons

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}, \qquad y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

(*) Si c ou α est nulle, alors l'équation (2) se résout à l'aide de fonctions élémentaires.

et calculons les dérivées dans le second membre de ces formules en utilisant les relations (3). Portons ces expressions dans l'équation (2). Après simplification nous avons une équation de la forme

$$t^2u'' + [2\nu + (a-1)\mu + 1]\,tu' + [c\mu^2k^\alpha t^{\alpha\mu} + (a-1)\mu\nu + b\mu^2 + \nu^2]\,u = 0,$$

où u' et u'' sont les dérivées par rapport à t. Si l'on choisit les constantes μ, ν et k de manière que l'on ait

$$2\nu + (a-1)\mu = 0, \quad \alpha\mu = 2, \quad c\mu^2k^\alpha = 1 \tag{4}$$

(cela est toujours possible si α et c sont non nulles), alors notre équation se met sous la forme

$$t^2u'' + tu' + (t^2 - \lambda^2)\,u = 0, \tag{5}$$

où

$$\lambda^2 = -[(a-1)\mu\nu + b\mu^2 + \nu^2] = \nu^2 - b\mu^2, \tag{6}$$

c'est-à-dire qu'elle coïncide avec l'équation différentielle des fonctions cylindriques d'indice λ.

3) Intégrales contenant des fonctions de Bessel. Appliquant le théorème d'homothétie du n° 80 à la formule (7) du n° 82 de l'image de la fonction cylindrique, nous trouvons

$$J_n(bt) \doteqdot \frac{b^n}{\sqrt{p^2+b^2}\,(\sqrt{p^2+b^2}+p)^n}. \tag{7}$$

D'après la formule de la transformation de Laplace (en y remplaçant p par a pour raison de symétrie), nous avons:

$$\int_0^\infty e^{-at}J_n(bt)\,dt = \frac{b^n}{\sqrt{a^2+b^2}\,(\sqrt{a^2+b^2}+a)^n}. \tag{8}$$

Pour $n=0$ nous obtenons en particulier l'intégrale (*Lipschitz*)

$$\int_0^\infty e^{-at}J_0(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{8'}$$

qui converge pour $\mathrm{Re}\,a \geqslant 0$.

Remplaçant dans (8') a par ai, nous trouvons

$$\int_0^\infty e^{-ait}J_0(bt)\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}, & |a|<|b|, \\ \dfrac{-i}{\sqrt{a^2-b^2}}, & |a|>|b| \end{cases}$$

(on peut vérifier que $\sqrt{\ }$ désigne ici la branche qui prend des valeurs positives pour a et b réels). Pour les a et b réels, en séparant les parties réelles et imaginaires, nous trouvons les intégrales (*Weber*)

$$\int_0^\infty J_0(at)\cos bt\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ 0 \end{cases}, \quad \int_0^\infty J_0(at)\sin bt\,dt = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \end{cases} \tag{9}$$

(la première ligne se rapporte au cas $a > b$, celle de dessous au cas $a < b$).

Soit $a > b$; intégrant la première formule (9) par rapport à b, nous trouvons :

$$\int_0^\infty J_0(at)\frac{\sin bt}{t}\,dt = \int_0^b \frac{db}{\sqrt{a^2-b^2}} = \arcsin\frac{b}{a} \quad (0 \leqslant b < a).$$

L'intégrale du premier membre converge même pour $b=a$ et à la limite, lorsque $b \to a$, nous obtenons pour tout $a > 0$

$$\int_0^\infty J_0(at)\frac{\sin at}{t}\,dt = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

(on peut montrer que le passage à la limite est correct). D'autre part, intégrant cette même formule (9) sur l'intervalle (b_0, b), $a < b_0 < b$, nous trouvons :

$$\int_0^\infty J_0(at)\left\{\frac{\sin bt}{t} - \frac{\sin b_0 t}{t}\right\} dt = 0,$$

d'où, passant encore une fois à la limite lorsque $b_0 \to a$ (on peut aussi montrer que le passage à la limite est correct) et tenant compte de (10), nous trouvons

$$\int_0^\infty J_0(at)\frac{\sin bt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \quad (b \geqslant a).$$

Ainsi, réunissant les résultats obtenus, nous trouvons

$$\int_0^\infty J_0(at)\frac{\sin bt}{t}\,dt = \begin{cases} \arcsin\dfrac{b}{a}, \\ \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{11}$$

où la première ligne se rapporte au cas $0 \leqslant b \leqslant a$ et la seconde au cas $b \geqslant a$.

Nous avions aussi la formule

$$\int_0^\infty e^{-p\tau}\tau^{n/2}J_n(2\sqrt{\tau})\,d\tau = \frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}} \tag{12}$$

(cf. (3) du n° 82 et la formule de Laplace pour la transformation) ; y faisant $\tau = \dfrac{a^2t^2}{4}$ et $p = \dfrac{4b^2}{a^2}$, nous obtenons encore une intégrale (*Weber*)

$$\int_0^\infty J_n(at)\,e^{-b^2t^2}\,t^{n+1}\,dt = \frac{a^n}{(2b^2)^{n+1}}e^{-\frac{a^2}{4b^2}}. \tag{13}$$

4) Intégrales de Sonine. De la représentation de $J_m(x)$ sous forme de série, nous trouvons :

$$J_m(x\sin t)\sin^{m+1}t\cos^{2n+1}t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{m+2k}}{2^{m+2k}k!\,\Gamma(m+k+1)}\sin^{2m+2k+1}t\cos^{2n+1}t.$$

Intégrant cette relation terme à terme par rapport à t de 0 à $\frac{\pi}{2}$ (cela est possible pour $m > -1$, $n > -1$) et tenant compte de la formule (5) du n° 90, nous avons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x \sin t) \sin^{m+1} t \cos^{2n+1} t \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{m+2k}}{2^{m+2k} k! \, \Gamma(m+k+1)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m+k+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+k+2)} =$$

$$= \Gamma(n+1) \frac{2^n}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \, \Gamma(m+n+k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+n+2k+1} =$$

$$= \Gamma(n+1) \frac{2^n}{x^{n+1}} J_{m+n+1}(x),$$

ou

$$J_{m+n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{2^n \Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x \sin t) \sin^{m+1} t \cos^{2n+1} t \, dt \qquad (14)$$

$m, n > -1$). (Cette intégrale a été obtenue par *N. Sonine.*)

D'une manière analogue on calcule la seconde intégrale de Sonine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x \sin t) J_n(y \cos t) \sin^{m+1} t \cos^{n+1} t \, dt =$$

$$= \frac{x^m y^n J_{n+m+1}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{m+n+1}{2}}} \quad (m, n > -1). \qquad (15)$$

La formule suivante appartient également à *Sonine*

$$\int_0^{\infty} J_{m'}(at) \frac{J_n\left(b\sqrt{t^2-x^2}\right)}{(t^2+x^2)^{n/2}} t^{m+1} \, dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^m}{b^n} \left(\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{x}\right)^{n-m-1} J_{n-m-1}\left(x\sqrt{b^2-a^2}\right); & 0 < a < b, \\ 0; & a > b > 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Pour établir cette formule, remarquons que, d'après le lemme de Jordan, pour $\lambda > -1$ on peut remplacer dans l'intégrale de Sonine-Schläfli (9) du n°95 le contour d'intégration C^* par la droite $\operatorname{Im} \zeta = c > 0$. Nous trouvons une nouvelle représentation intégrale de la fonction de Bessel (*Sonine*)

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta - \frac{z^2}{4\zeta}} \zeta^{-\lambda-1} \, d\zeta. \qquad (17)$$

En portant dans le premier membre de la formule (16) $J_n\left(b\sqrt{t^2+x^2}\right)$, représentée par la formule (17), nous trouvons que ce premier membre est égal à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty J_m(at)\left(\frac{b}{2}\right)^n t^{m+1}\left\{\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta-\frac{b^2(t^2+x^2)}{4\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty J_m(at)\,t^{m+1}\left\{\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b}{2}\left(\omega-\frac{t^2+x^2}{\omega}\right)}\frac{d\omega}{\omega^{n+1}}\right\}dt$$

(nous avons fait le changement de variable $\frac{2\zeta}{b}=\omega$ et nous avons tenu compte de ce que pour $b>0$ ce changement ne modifie pas le chemin d'intégration). Intervertissant ici l'ordre d'intégration et tenant compte de l'intégrale de Weber (13), nous trouvons :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\omega^{-n-1}e^{\frac{b}{2}\left(\omega-\frac{x^2}{\omega}\right)}d\omega\int_0^\infty e^{-\frac{bt^2}{2\omega}}J_m(at)\,t^{m+1}\,dt=$$

$$=\frac{a^m}{2\pi i b^{m+1}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b^2-a^2}{2b}\omega-\frac{bx^2}{2\omega}}\omega^{m-n}\,d\omega. \qquad (18)$$

Pour $a>b$ cette intégrale est nulle ; en effet, dans ce cas, le coefficient de ω dans l'exposant de e est négatif et, d'après le lemme de Jordan, on peut obtenir l'intégrale comme la limite de l'intégrale sur le segment $(c-id,\ c+id)$ complété par la demi-circonférence de droite, mais à l'intérieur de ce contour la fonction à intégrer est régulière. La seconde partie de la formule (16) est démontrée.

Pour $a<b$, d'après la même formule (17) de Sonine, nous trouvons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b^2-a^2}{2b}\omega-\frac{bx}{2\omega}}\omega^{m-n}\,d\omega=$$

$$=\left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^{n-m-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta-\frac{b^2-a^2}{4\zeta}x^2}\zeta^{m-n}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{b^{n-m-1}}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{x}\right)^{n-m-1}J_{n-m-1}\left(x\sqrt{b^2-a^2}\right)$$

(nous avons fait le changement de variable $\omega=\frac{2b}{b^2-a^2}\zeta$ et appliqué la formule (17) pour $\lambda=n-m-1$, $z=x\sqrt{b^2-a^2}$). Portant la valeur que nous venons de trouver de l'intégrale dans la formule (18), nous obtenons ainsi la première partie de la formule (16) de Sonine.

5) Intégrale de la théorie des ondes électromagnétiques. Etablissons la formule

$$J_0\left(a\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\eta(t-\tau)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}\,e^{\tau\sqrt{p^2+a^2}} \qquad (19)$$

que nous avons déjà utilisée au n°87 pour la résolution du problème de propagation des ondes dans de longues lignes de transport de l'énergie électrique. Nous partons de l'intégrale (8) de Sonine du n°95; y faisant $n = 0$ et $z = a\sqrt{t^2 - \tau^2}$, nous avons:

$$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1} e^{\frac{a\sqrt{t^2-\tau^2}}{2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Faisons ici le changement de variable

$$\omega = \sqrt{\frac{t+\tau}{t-\tau}}\,\zeta;$$

la circonférence $|\omega| = 1$ se transforme en la circonférence $|\zeta| = \left|\sqrt{\frac{t-\tau}{t+\tau}}\right|$ et, comme la fonction à intégrer n'a qu'un point singulier $\zeta = 0$, on peut remplacer cette circonférence par la circonférence $|\zeta| = 1$. Nous trouvons:

$$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} e^{\frac{at}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + \frac{a\tau}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{20}$$

Utilisant cette formule, nous trouvons la transformée de Laplace du premier membre de (19); supposant $\tau > 0$ et, comme toujours, $\operatorname{Re} p > 0$, nous avons:

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \left\{\int_\tau^\infty e^{-t\left[p - \frac{a}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]} dt\right\} e^{\frac{a\tau}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{21}$$

(nous avons changé l'ordre d'intégration). Dans l'intégrale entre accolades la partie réelle du coefficient de t dans l'exposant est égale à

$$\operatorname{Re}\left[p - \frac{a}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right] = \operatorname{Re}(p - ai\sin\varphi) = \operatorname{Re} p > 0$$

(nous posons $\zeta = e^{i\varphi}$ et nous supposons a un nombre réel); c'est pourquoi l'intégrale converge et elle se calcule facilement:

$$\int_\tau^\infty e^{-t\left[p - \frac{a}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]} dt = \frac{e^{-\tau\left[p - \frac{a}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]}}{p - \frac{a}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)}.$$

Portant cette valeur dans l'intégrale (21), nous trouvons:

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})\,d\tau = -\frac{e^{-\zeta p}}{a\pi i}\int_{|\zeta|=1} e^{a\tau\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^2 - \frac{2p}{a}\zeta - 1}.$$

La fonction à intégrer a deux pôles: $\zeta_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + a^2}}{a}$, dont l'un se trouve à l'intérieur du cercle $|\zeta| < 1$ et l'autre à son extérieur, car $\zeta_1\zeta_2 = -1$. Avec

la condition $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{p^2+a^2} > 0$ la racine $\zeta_1 = \dfrac{p-\sqrt{p^2+a^2}}{a}$ se trouve dans le cercle, et, d'après le théorème des résidus, la dernière intégrale est égale à

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} J_0\left(a\sqrt{t^2-\tau^2}\right) dt = -\frac{e^{-\tau p}}{a\pi i} 2\pi i \frac{e^{a\tau\zeta_1}}{2\zeta_1 - 2\frac{p}{a}} = \frac{e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}}{\sqrt{p^2+a^2}},$$

ce qui coïncide avec la formule (19).

De façon analogue, nous pouvons trouver un résultat plus général : pour tout n entier non négatif

$$\eta(t-\tau)(t-\tau)^n \frac{J_n\left(\sqrt{t^2-\tau^2}\right)}{\left(t^2-\tau^2\right)^{\frac{n}{2}}} \doteq \frac{e^{-\tau\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{22}$$

6) Problème de Bernoulli sur les oscillations d'une chaîne suspendue. En 1732, *Daniel Bernoulli* a posé et résolu le problème des oscillations d'une chaîne pesante suspendue. Soit un fil AMB homogène et pesant, de longueur l, suspendu verticalement au point B et qui, sous l'action de la force de pesanteur, accomplit de petites oscillations autour de sa position d'équilibre. Si l'on désigne par t le temps, par x la longueur du fil du point A au point variable M et par $u = u(x,t)$ l'écart du point M à la verticale (fig. 211), alors l'équation des petites oscillations est de la forme

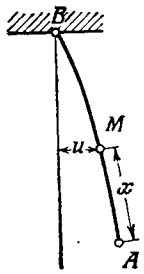

FIG. 211

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{23}$$

où g est l'accélération de la force de pesanteur. Avec Bernoulli nous allons résoudre cette équation par la méthode de la séparation des variables. Pour cela, trouvons d'abord une solution particulière qui a la forme du produit de deux fonctions dont l'une ne dépend que de la variable x et l'autre que de la variable t :

$$u = X(x)\,T(t).$$

La portant dans (23) et effectuant de simples transformations, nous avons :

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = g\frac{xX''(x)+X'(x)}{X(x)}.$$

Puisque le premier membre n'est fonction que de t et le second membre que de x, l'égalité n'est possible que dans le cas où les deux membres sont égaux à une même constante que nous notons $-\omega^2$ (*). Dans ces conditions, la dernière équation se décompose en deux équations :

$$T''(t)+\omega^2 T(t) = 0\,;\quad xX''(x)+X'(x)+\frac{\omega^2}{g}X(x) = 0. \tag{24}$$

La solution de la première équation est :

$$T(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

(*) Cette constante doit être négative, car dans le cas contraire, comme on le voit, par exemple, de la première équation (24), la solution n'est pas oscillante, ce qui est en contradiction avec les considérations physiques.

où A et φ sont des constantes, et la deuxième équation a la forme de l'équation (2) du n° 99 avec $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{\omega^2}{g}$, $\alpha = 1$. D'après les formules (4), nous trouvons $\mu = 2$, $\nu = 0$, $k = \frac{g}{4\omega^2}$ et, par conséquent, le changement de variable (3), qui dans notre cas prend la forme (*) $x = \frac{g}{4\omega^2} t^2$ ou $t = 2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}$, ramène l'équation à l'équation différentielle des fonctions cylindriques d'indice $\lambda = 0$, comme on le voit de la relation (6). Ainsi, la solution générale de la seconde équation (24) a la forme :

$$X(x) = BJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right) + CY_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right),$$

où B et C sont des constantes. D'après des considérations physiques, il est clair que, lorsque $x \to 0$, la solution doit être bornée, donc $C = 0$; on peut prendre la constante B égale à l'unité, vu que dans l'expression de T entre déjà un facteur arbitraire A. Ainsi, nous trouvons une solution particulière de l'équation (23) sous la forme

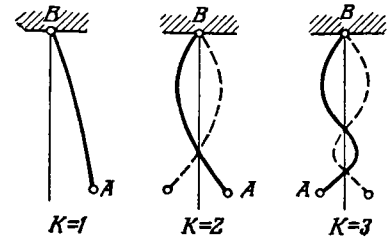

FIG. 212

$$u = AJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)\sin(\omega t + \varphi). \tag{25}$$

La quantité ω ne peut avoir ici une valeur arbitraire car nous trouvons de la condition d'après laquelle le fil est suspendu au point B que $u(l, t) = 0$ pour tous les t. Cela n'est possible que dans le cas où

$$J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\right) = 0, \tag{26}$$

d'où $\omega = \omega_k = \frac{\alpha_k}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$, où α_k sont les zéros de la fonction de Bessel d'ordre zéro.

L'équation (25) montre que tous les points du fil accomplissent des oscillations harmoniques de même fréquence $\omega_k = \frac{\alpha_k}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$ et d'amplitude qui varie d'un point à l'autre d'après la loi $AJ_0\left(2\omega_k\sqrt{\frac{x}{g}}\right) = AJ_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$ (**). Les fréquences des oscillations et la forme du fil oscillant peuvent être différentes en fonction du zéro considéré α_k de la fonction $J_0(x)$; on a représenté sur la figure 212 les lois de variation des amplitudes des points du fil pour $k = 1$, 2, 3. D'ordinaire l'oscillation d'un fil est la superposition des oscillations (25) d'amplitudes et de phases initiales différentes

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin(\omega_k t + \varphi_k). \tag{27}$$

Pour déterminer les coefficiencs A_k et φ_k, il faut se donner l'écart initial et la vitesse initiale des points du fil, c'est-à-dire $u(x, 0) = f(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)$.

(*) Le changement de fonction inconnue est inutile, car $\nu = 0$.

(**) Pour $x = 0$ la fonction $J_0(x) = 1$, donc la constante A est l'amplitude de l'oscillation de l'extrémité libre du fil.

On a alors les conditions

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin\varphi_k,$$

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\omega_k J_0\left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cos\varphi_k,$$

qui, en posant $\sqrt{\frac{x}{l}}=\tau$ et $f(l\tau^2)=F(\tau)$, $g(l\tau^2)=G(\tau)$, peuvent être écrites sous la forme de développements de Fourier généralisés

$$F(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\varphi_k J_0(\alpha_k\tau), \qquad G(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\omega_k\cos\varphi_k J_0(\alpha_k\tau). \tag{28}$$

En partant de ces deux développements, on peut calculer, d'après les formules (38) du nº 95, tous les coefficients A_k et φ_k.

Dans un article publié en 1732 dans les « Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae », D. Bernoulli résout la seconde équation (24) à l'aide d'une série, trouve la condition (26) et remarque que le fil possède une infinité de modes d'oscillation.

7) Problème d'Euler des membranes circulaires vibrantes. La déformation $u = u(x, y, t)$, c'est-à-dire l'écart à l'état d'équilibre de la membrane (*) qui accomplit de petites vibrations sous l'action de la force de tension, satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{29}$$

où $a^2=\frac{T}{\sigma}$, T étant la tension et σ la densité superficielle. Dans un travail publié en 1764, Euler a considéré le problème des vibrations d'une membrane circulaire. Il est parti de l'équation

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{30}$$

qui correspond à l'équation (29) en coordonnées polaires. Pour trouver des solutions particulières de l'équation (30), Euler pose $u = R(r)\sin(\omega t + \gamma)\times$ $\times \sin(\lambda\varphi + \delta)$, où ω, λ, γ et δ sont des constantes et, après substitution dans (30), il obtient

$$r^2R''+rR'+\left(\frac{\omega^2}{a^2}\,r^2-\lambda^2\right)R=0. \tag{31}$$

Après être passé de r à la nouvelle variable $\rho=\frac{r\omega}{a}$, cette dernière équation prend la forme ordinaire de l'équation différentielle des fonctions cylindriques

$$\rho^2R''+\rho R'+(\rho^2-\lambda^2)R=0. \tag{32}$$

Il découle des considérations physiques que la période de la fonction en φ doit être égale à 2π, par conséquent, λ doit être un nombre entier. Pour ces valeurs de λ, Euler a donné la solution de l'équation (31) sous la forme d'une

(*) On appelle membrane une couche fine de matière parfaitement flexible et peu extensible, par exemple la membrane d'un tambour.

série (*). Ainsi, Euler a trouvé une solution particulière de (31) sous la forme

$$u = AJ_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)\sin(\omega t+\gamma)\sin(n\varphi+\delta). \tag{33}$$

Si la membrane est fixée en tous points de son contour extérieur, alors pour $r = r_0$, où r_0 est le rayon de la membrane, on doit avoir $J_n\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) = 0$, d'où $\omega = \omega_k^{(n)} = \frac{a}{r_0}\alpha_k^{(n)}$, où $\alpha_k^{(n)}$ est le k-ième zéro de la fonction $J_n(x)$. Euler remarque aussi qu'il existe un ensemble infini de vibrations possibles de la membrane.

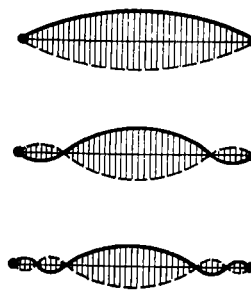

FIG. 213

Pour $n = 0$, la fonction u ne dépend pas de φ:

$$u = A_k J_0\left(\alpha_k\frac{r}{r_0}\right)\sin(\omega_k t+\gamma_k), \tag{34}$$

c'est-à-dire que tous les points de la membrane qui sont équidistants du centre vibrent de la même manière. Les points de la membrane accomplissent des vibrations harmoniques de même fréquence $\omega_k = \frac{a\alpha_k}{r_0}$ et d'amplitude $A_k J_0\left(\alpha_k\frac{r}{r_0}\right)$ dépendant de la distance de ce point au centre. On a représenté sur la fig. 213 les lois de variation de l'amplitude des vibrations de différents points de la membrane pour $k = 1, 2, 3$.

La forme la plus générale de vibrations de la membrane s'obtient en additionnant toutes les vibrations (33) pour les différents n et k

$$u = \sum_{n=0,\ k=1}^{\infty} A_{nk}J_n\left(\alpha_k^{(n)}\frac{r}{r_0}\right)\sin(\omega_k^{(n)}t+\gamma_{nk})\sin(n\varphi+\delta_{nk}). \tag{35}$$

Si la position initiale et l'écart de la membrane sont donnés, les coefficients A_{nk}, γ_{nk}, δ_{nk} peuvent être déterminés en ayant recours à l'orthogonalité des systèmes de fonctions trigonométriques et cylindriques.

8) Source cylindrique instantanée de chaleur. Un flux plan de chaleur dans lequel la répartition de la température u dans tous les plans (Π) perpendiculaires à une direction fixe est la même est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{36}$$

où t est le temps, a un coefficient constant et x, y les coordonnées cartésiennes dans un des plans Π. On vérifie en dérivant que la fonction

$$u = \frac{A}{t}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}, \tag{37}$$

où A, ξ et η sont des constantes, satisfait à l'équation (36). Il est clair que lorsque $t \to 0$ en point arbitraire $z = x + iy$ distinct de $\zeta = \xi + i\eta$, la fonction $u \to 0$ et au point ζ cette fonction $\to \infty$. On peut donc dire que, du point de vue physique, (37) signifie la température au point z due à l'action d'une source ponctuelle instantanée de chaleur placée à l'instant $t = 0$ au point ζ.

(*) Par la suite, Euler a également considéré le cas de λ non entier.

Calculons la température totale au point z due à l'action de sources ponctuelles instantanées de chaleur, pour $t = 0$ réparties uniformément sur la circonférence $|\zeta| = \rho$. Nous supposons que l'effet des sources placées sur un élément d'arc $\rho d\vartheta$ de cette circonférence est égal à l'effet d'une seule source ponctuelle. Alors la température due à l'action de ces sources est donnée par la formule (37) (*) :

$$du = \frac{A d\theta}{t} e^{-\frac{|z-\zeta|^2}{4a^2t}} = \frac{A d\theta}{t} e^{-\frac{r^2+\rho^2-2\rho r\cos\vartheta}{4a^2t}},$$

où nous prenons $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = \rho e^{i(\vartheta+\varphi)}$ (fig. 214). Intégrant cette expression par rapport à ϑ de $-\pi$ à π, nous trouvons la température totale que nous voulions calculer

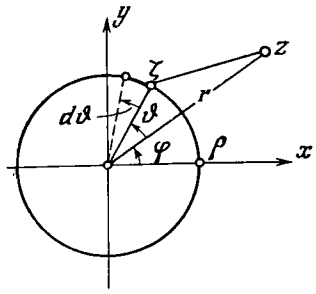

FIG. 214

$$u = \frac{A}{t} e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{\rho r}{2a^2t}\cos\vartheta}\, d\vartheta.$$

La fonction cos ϑ peut être ici remplacée par sin ϑ car ce changement se ramène à remplacer la variable ϑ par $\vartheta - \frac{\pi}{2}$; on peut encore prendre $-\pi$, π à la place des limites d'intégration $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, ce qui ne modifie pas la valeur de l'intégrale. Tenant compte de la représentation intégrale (11) de la fonction de Bessel $J_0(z)$ (no 95), nous trouvons l'expression de u sous la forme

$$u = \frac{2\pi A}{t} e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}} I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right). \tag{38}$$

Pour tirer au clair le sens physique de la constante A, calculons la quantité de chaleur totale nécessaire pour obtenir notre répartition de la température dans le plan des z. Si l'on désigne par c la chaleur spécifique et par σ la densité superficielle de la matière, alors la quantité de chaleur par l'élément d'aire $r\,dr\,d\varphi$ est $dQ = c\sigma u\, r\, dr\, d\varphi$ et pour tout le plan elle est

$$Q = c\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} ur\, dr = \frac{2\pi A c\sigma}{t} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2t}} 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right) r\, dr.$$

Tenant compte de l'intégrale de Weber (13) de ce numéro (où n, a et b^2 sont respectivement dans notre cas 0, $\frac{\rho i}{2a^2t}$ et $\frac{1}{4a^2t}$), nous trouvons :

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right) r\, dr = 2a^2 t e^{\frac{\rho^2}{4a^2t}}.$$

(*) Nous écrivons du et $A d\vartheta$ à la place de u et A pour souligner que nos quantités se rapportent à l'élément d'arc $\rho d\vartheta$.

Par conséquent, $Q = 8\pi^2 Ac\sigma a^2$ et l'expression de u prend la forme

$$u = \frac{Q}{4\pi a^2 c\sigma t} e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2 t}} I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2 t}\right). \tag{39}$$

En passant d'un champ thermique plan à un champ plan dans l'espace, on peut estimer que la formule (39) donne l'expression de la température due à l'action des sources instantanées de chaleur à l'instant $t = 0$ uniformément réparties sur un cylindre (*source cylindrique de chaleur*). En outre, Q désigne la quantité de chaleur totale emmagasinée dans une bande d'épaisseur unité et perpendiculaire à l'axe du cylindre.

9) Problème de la conduction thermique dans un cylindre circulaire. Supposons que la surface d'un cylindre circulaire de rayon ρ soit à une température égale à $u_0 \cos \omega t$. Trouvons la répartition de la température à condition que la température initiale dans le cylindre soit nulle.

Vu que le problème a une symétrie axiale, il est naturel de passer aux coordonnées cylindriques r, φ, z. Or, comme u ne dépend pas de z et φ, l'équation de la chaleur est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{40}$$

les conditions initiales et aux limites sont $u|_{t=0} = 0$, $u|_{r=\rho} = u_0 \cos \omega t$. Nous allons résoudre ce problème par la méthode opérationnelle. En passant à la transformée de Laplace par rapport à la variable t, nous obtenons l'équation opérationnelle

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{p}{a^2}U = 0,$$

qu'il faut résoudre avec la condition

$$U|_{r=\rho} = \frac{pu_0}{p^2+\omega^2}.$$

La solution générale de l'équation opérationnelle, d'après les formules (32) du n° 95 et (20) du n° 96, est :

$$U = AJ_0\left(\frac{\sqrt{p}}{a} ir\right) + BY_0\left(\frac{\sqrt{p}}{a} ir\right)$$

$\left(\text{avec } \lambda = 0,\ \alpha = \frac{\sqrt{p}}{a} i\right)$, de plus vu que U doit être borné, lorsque $r \to 0$, on a $B = 0$ et

$$U = AI_0\left(\frac{\sqrt{p}}{a} r\right).$$

Tenant compte de la condition aux limites, nous trouvons $AI_0\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\rho\right) = \frac{pu_0}{p^2+\omega^2}$ et, par conséquent, la solution opérationnelle a la forme :

$$U = u_0 \frac{I_0\left(r\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{I_0\left(\rho\frac{\sqrt{p}}{a}\right)} \frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{41}$$

La fonction $U(p)$ a un ensemble infini de pôles dont deux sont purement imaginaires : $p = \pm i\omega$, et les autres négatifs : $p_k = -\left(\frac{a\alpha_k}{\rho}\right)^2$, α_k étant les zéros de $J_0(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Conformément au premier théorème de développement du n° 82, l'original est la somme des résidus de la fonction $U(p)\,e^{pt}$ par rapport à tous ses pôles, c'est-à-dire

$$u(r, t) = u_0 \left\{ \operatorname{Re} \frac{I_0\left(r \frac{\sqrt{\omega}}{a} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}{I_0\left(\rho \frac{\sqrt{\omega}}{a} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)} e^{i\omega t} + 2a^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{r}{\rho}\alpha_k\right)}{J'(\alpha_k)} \frac{\alpha_k^3 e^{-\left(\frac{a\alpha_k}{\rho}\right)^2}}{a^4\alpha_k^4 + \rho^4\omega^2} \right\},$$

où le premier terme correspond aux pôles $p = \pm i\omega$ et la somme aux pôles $p_k = -\left(\frac{a\alpha_k}{\rho}\right)^2$. Si, d'après la formule (34) du n° 96, on remplace

$$I_0(e^{i\frac{\pi}{4}}x) = I_0(x\sqrt{-i}) = \operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x$$

et si l'on pose $\frac{\sqrt{\omega}}{a} = \lambda$, $\frac{\alpha_k}{\rho} = \beta_k$ pour simplifier l'écriture, alors la dernière formule s'écrit sous la forme définitive suivante :

$$u(r, t) = u_0 \left\{ \frac{\operatorname{ber}\lambda r \operatorname{ber}\lambda\rho + \operatorname{bei}\lambda r \operatorname{bei}\lambda\rho}{\operatorname{ber}^2\lambda\rho + \operatorname{bei}^2\lambda\rho} \cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{ber}\lambda r \operatorname{bei}\lambda\rho - \operatorname{bei}\lambda r \operatorname{ber}\lambda\rho}{\operatorname{ber}^2\lambda\rho + \operatorname{bei}^2\lambda\rho} \sin\omega t + \frac{2a^4}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2\beta_k t} \frac{J_0(r\beta_k)}{J_0'(\rho\beta_k)} \frac{\beta_k^3}{a^4\beta_k^4 + \omega^2} \right\}. \tag{42}$$

§ 4. FONCTIONS ELLIPTIQUES

Nous donnons dans ce paragraphe les propriétés des intégrales et des fonctions elliptiques. Nous avons déjà rencontré (n°39) une intégrale elliptique et sa fonction inverse sn dans le problème de la représentation conforme d'un rectangle sur un demi-plan. On rencontre des fonctions elliptiques dans de nombreux problèmes de la dynamique des corps solides, de l'aérodynamique, de l'électrotechnique, de la théorie de l'élasticité.

Les intégrales elliptiques avaient déjà été étudiées par Legendre à la fin du XVIII^e siècle ; la théorie des fonctions elliptiques pour l'essentiel a été créée au XIX^e siècle grâce aux efforts de grands mathématiciens (Abel, Jacobi, Liouville, Weierstrass).

Nous commençons par donner l'exposé des propriétés générales des fonctions méromorphes périodiques dont l'ensemble contient en particulier la classe des fonctions elliptiques.

100. Fonctions périodiques. On dit qu'une fonction $f(z)$ est *périodique* si pour toutes les valeurs z appartenant au domaine de définition elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(z + T) = f(z), \tag{1}$$

où $T \neq 0$ est une constante, appelée *période* de la fonction (*).

Une fonction périodique a un ensemble infini de périodes. On a en effet le théorème suivant :

Théorème 1. *Si* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ $(k \geqslant 1)$ *sont des périodes d'une fonction* $f(z)$, *alors toute combinaison linéaire à coefficients entiers (négatifs, nuls, positifs)*

$$T = n_1 T_1 + n_2 T_2 + \ldots + n_k T_k$$

est aussi une période de cette fonction.

En effet, pour les n_ν non négatifs, la proposition est évidente, car l'addition répétée de la période à la variable ne change pas la valeur de la fonction. Pour la démontrer dans le cas des n_ν négatifs, il suffit de montrer qu'avec la période T_ν la fonction $f(z)$ a $-T_\nu$ pour période. En effet, pour tout z, en vertu de l'équation (1),

$$f(z - T_\nu) = f[(z - T_\nu) + T_\nu] = f(z),$$

et cela signifie justement que $-T_\nu$ est une période de $f(z)$.

Dans tout ce qui va suivre nous supposons que la fonction $f(z)$ est *uniforme* et méromorphe : nous mettons en évidence la condition d'uniformité pour souligner que la théorie n'est pas vraie pour les fonctions analytiques multiformes. Afin que les énoncés soient plus clairs, nous représentons par des points du plan des z les périodes de la fonction $f(z)$. Passons à l'étude de la structure de l'ensemble des périodes. Démontrons d'abord le lemme.

Lemme. *L'ensemble des périodes d'une fonction méromorphe* $f(z) \not\equiv$ const *ne peut contenir aucune suite convergeant vers un point à distance finie du plan.*

En effet, supposons qu'il existe une suite de périodes T_ν qui converge vers un point T à distance finie et soit z_0 un point régulier arbitraire de la fonction $f(z)$. D'après le théorème 1, la suite $\widetilde{T}_\nu = T_{\nu+1} - T_\nu$ qui converge vers zéro est encore une suite de périodes de $f(z)$. Ainsi, pour tout $\nu = 1, 2, \ldots$

$$f(z_0 + \widetilde{T}_\nu) = f(z_0).$$

Mais la suite de points $z_\nu = z_0 + \widetilde{T}_\nu$ converge vers z_0 et $f(z)$ prend une même valeur aux points de cette suite ; d'après le théorème d'unicité, il en découle que $f(z) \equiv$ const, et cela est en contradiction avec les conditions du théorème.

La caractéristique complète de l'ensemble des périodes est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2 (Abel). *Une fonction méromorphe* $f(z)$ *peut avoir au plus deux périodes linéairement indépendentes. Autrement dit, il existe deux périodes* τ *et* τ' *telles que toute période* T *de la fonction* $f(z)$

(*) Le domaine de définition d'une fonction périodique doit donc, avec tout point z, contenir nécessairement le point $z + T$.

soit de la forme:

$$T = n\tau + n'\tau', \tag{2}$$

où n et n' sont des nombres entiers.

Partageons la démonstration en deux parties.

1) Supposons qu'au moins une période T^0 de la fonction $f(z)$ se trouve sur une droite L passant par l'origine; montrons que dans ce cas l'ensemble de toutes les périodes de $f(z)$ appartenant à L est de la forme

$$T = n\tau, \tag{3}$$

où $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et τ est un nombre complexe. En effet, d'après le lemme, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de périodes de $f(z)$ sur le segment OT^0 de la droite L (dans le cas contraire, il existerait sur L une suite de périodes qui convergerait vers un point à distance finie). Donc il existe sur OT^0 la plus petite période en module de $f(z)$. Désignons cette période par τ et montrons que toute période de $f(z)$ appartenant à L est de la forme (3). En supposant le contraire admettons qu'il existe sur L une période $\widetilde{T}$ qui se trouve entre deux points quelconques $n\tau$ et $(n+1)\tau$. Alors $\widetilde{T}$ peut être mise sous la forme $\widetilde{T} = (n + \vartheta)\tau$, où $0 < \vartheta < 1$, et, d'après le théorème 1, $\widetilde{\tau} = \vartheta\tau$ sert aussi de période pour $f(z)$. Mais cette période doit appartenir au segment $O\tau$ qui, d'après la construction, ne possède pas de périodes de $f(z)$. Cette contradiction démontre justement la proposition.

2) Supposons que, en plus des périodes (3), $f(z)$ possède encore d'autres périodes n'appartenant pas, par conséquent, à la droite L. D'après le lemme, il existe un plus grand cercle de centre au point $z = 0$ qui ne contient pas de telles périodes (les périodes appartenant à L ne sont pas prises en considération). Mais, d'après ce même lemme, un nombre fini de périodes appartiennent à la circonférence de ce cercle et, par conséquent, il existe une période la plus voisine de la droite L, lorsqu'on se déplace dans le sens positif à partir du sens positif de L; nous désignons cette période par τ' (fig. 215). Montrons que toute période de $f(z)$ a la forme (2). Pour cela, en supposant le contraire, admettons qu'il existe une période

$$\widetilde{T} = (n + \vartheta)\tau + (n' + \vartheta')\tau',$$

où n et n' sont des nombres entiers quelconques et $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, $0 \leqslant \vartheta' \leqslant 1$, de plus ϑ et ϑ' ne sont pas tous les deux entiers (soit 0, soit 1). Alors d'après le théorème 1

$$\widetilde{\tau} = \vartheta\tau + \vartheta'\tau'$$

est une période de $f(z)$. Mais cette période se trouve dans le parallélogramme de sommets O, τ, τ', $\tau + \tau'$ et ne coïncide avec aucun de

ces sommets. D'après notre construction, elle ne peut appartenir à la portion hachurée du parallélogramme de la fig. 215, c'est-à-dire à l'intérieur du triangle $O\tau\tau'$. Par conséquent, elle appartient à l'autre portion, mais alors le point $\widetilde{\tau}' = \tau + \tau' - \widetilde{\tau}$, qui est aussi une période de $f(z)$, appartient au triangle $O\tau\tau'$ et ne coïncide avec aucun de ses sommets, ce qui est en contradiction avec notre construction, car dans ce triangle il n'y a pas de périodes de $f(z)$. Le théorème est démontré.

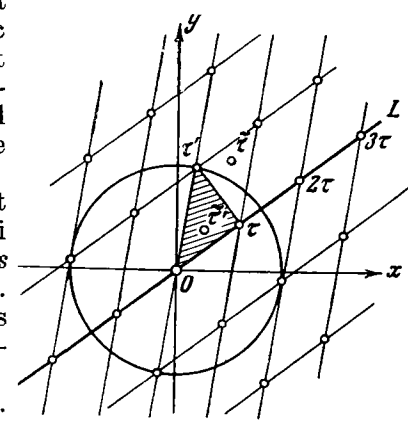

FIG. 215

Les nombres τ et τ' qui figurent dans le théorème démontré (ainsi que $-\tau$ et $-\tau'$) sont appelés *périodes fondamentales* de la fonction $f(z)$. Il découle de ce théorème que toutes les fonctions méromorphes se divisent en trois classes :

1) *Fonctions non périodiques.* Pour ces fonctions les deux périodes fondamentales sont nulles : $\tau = \tau' = 0$.

2) *Fonctions simplement périodiques.* Pour ces fonctions, une des périodes fondamentales, par exemple $\tau' = 0$, est nulle et l'autre est non nulle. D'après le théorème 2 toutes les périodes d'une fonction simplement périodique constituent un multiple entier de la période fondamentale τ. Des exemples en sont donnés par les fonctions élémentaires e^z (la période fondamentale étant $\tau = \pm 2\pi i$), $\sin z$, $\cos z$ (la période fondamentale étant $\tau = \pm 2\pi$), $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ (la période fondamentale étant $\tau = \pm\pi$) et autres.

3) *Fonctions doublement périodiques.* Pour ces fonctions les deux périodes fondamentales τ et τ' sont non nulles. D'après le théorème 2, le rapport $\frac{\tau}{\tau'}$ ne peut être réel, et toutes les périodes de la fonction sont de la forme :

$$T = n\tau + n'\tau' \quad (n,\ n' = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Les fonctions méromorphes doublement périodiques sont appelées *fonctions elliptiques.*

Les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques vont être données dans ce paragraphe. Nous donnons pour le moment plusieurs propositions se rapportant à une fonction (simplement ou doublement) périodique quelconque.

Désignons par τ la période fondamentale de la fonction $f(z)$ et menons par tous les points $n\tau$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), appartenant

à la droite L, des droites parallèles à une direction quelconque ne coïncidant pas avec la direction L. Ainsi, le plan est partagé en bandes de largeur égale que l'on appelle *bandes des périodes*. Il est clair que toutes les valeurs que $f(z)$ prend dans une bande quelconque des périodes se répètent périodiquement dans les bandes voisines. Ainsi, il suffit d'étudier une fonction périodique dans l'une quelconque de ces bandes.

Désignons par G le domaine doublement connexe obtenu à partir d'un plan auxiliaire ζ en retranchant les deux points $\zeta = 0$ et $\zeta = \infty$, et considérons dans ce domaine la fonction multiforme

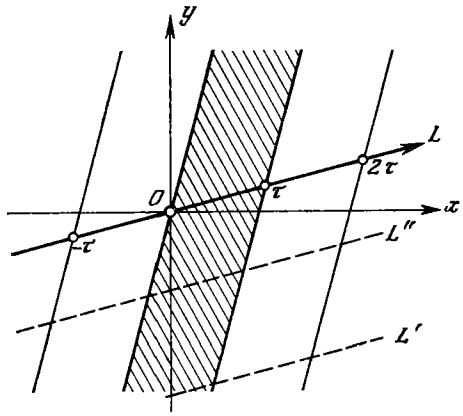

FIG. 216

$$z = \frac{\tau}{2\pi i} \operatorname{Ln} \zeta. \qquad (4)$$

Les valeurs de la fonction (4) qu'elle prend en un point quelconque ζ se distinguent les unes des autres par des termes qui sont des multiples entiers de τ, et c'est pourquoi la fonction composée

$$f\left(\frac{\tau}{2\pi i} \operatorname{Ln} \zeta\right) = \varphi(\zeta) \qquad (5)$$

est *uniforme* dans le domaine G. En chaque point ζ, pour lequel les points correspondants z sont des points réguliers de $f(z)$, cette fonction est évidemment analytique, et aux points correspondant aux pôles de $f(z)$, elle a aussi des pôles (*). Portant dans (5) la fonction inverse de (4)

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\tau} z} = e^{i\omega z}, \qquad (6)$$

où $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ est la «fréquence» de la fonction f, nous en déduisons la représentation de la fonction $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \varphi(e^{i\omega z}). \qquad (7)$$

Cette représentation nous permet d'obtenir plusieurs théorèmes sur les fonctions périodiques.

Théorème 3. *Dans toute bande limitée par les droites L', L'' parallèles à la droite des périodes L* (fig. 216) *et ne contenant pas*

(*) Pour le démontrer il suffit de considérer une branche quelconque de la fonction (4), qui est uniforme dans un voisinage de ce point, et d'appliquer le théorème d'analyticité des fonctions composées.

de points singuliers de $f(z)$, cette fonction est représentée par une série de Fourier

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega z}. \tag{8}$$

En effet, aux droites L' et L'' du plan des z, sur lesquelles on a respectivement

$$z = z' + t\tau, \qquad z = z'' + t\tau$$

(z' et z'' sont points fixes de L' et L'', t un paramètre réel variant de $-\infty$ à ∞), correspondent dans le plan des ζ, d'après (6), des circonférences concentriques

$$\zeta = e^{iz'\omega} e^{2\pi i t}, \qquad \zeta = e^{iz''\omega} e^{2\pi i t}$$

de centres au point $\zeta = 0$ et de rayons $r' = |e^{iz'\omega}|$, $r'' = |e^{iz''\omega}|$. Dans la couronne comprise entre ces circonférences, la fonction $\varphi(\zeta)$ est analytique, donc elle peut être représentée par une série de Laurent

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k.$$

Y portant $\zeta = e^{i\omega z}$ et tenant compte de la formule (7), nous en déduisons le développement (8) que nous voulions établir.

En particulier il en découle le théorème suivant:

T h é o r è m e 4. *Une fonction entière périodique $f(z)$ est représentable par une série de Fourier* (8) *qui converge pour toutes les valeurs de z.*

Notons ensuite les théorèmes simples suivants:

T h é o r è m e 5. *Si une fonction entière périodique est bornée dans la bande des périodes, elle est alors constante.*

Ce théorème découle immédiatement du théorème de Cauchy-Liouville car du fait que la fonction est bornée dans la bande des périodes il découle qu'elle est bornée dans tout le plan.

T h é o r è m e 6. *Si une fonction entière périodique $f(z)$, lorsque z tend vers les extrémités de la bande des périodes, tend vers des limites finies ou infinies* (*), *elle est alors un polynôme trigonométrique*

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega z}. \tag{9}$$

En effet, dans nos conditions, les points $\zeta = 0$ et $\zeta = \infty$ sont tout au plus des pôles de la fonction $\varphi(\zeta)$ et, par conséquent, le développement (8) ne peut contenir qu'un nombre fini de termes non nuls.

(*) D'après le théorème 5, ces limites ne peuvent être toutes les deux finies si $f(z) \neq$ const.

Une proposition encore plus générale est vraie.

Théorème 7. *Si une fonction méromorphe périodique $f(z)$ tend vers des limites finies ou infinies, lorsque z tend vers les extrémités de la bande des périodes, elle est alors le rapport de deux polynômes trigonométriques.*

101. Propriétés générales des fonctions elliptiques. Soit $f(z)$ une fonction elliptique quelconque, c'est-à-dire une fonction méromorphe doublement périodique de périodes fondamentales τ et τ'. L'ensemble de toutes les périodes de $f(z)$ est de la forme :

$$T = n\tau + n'\tau' \quad (n,\ n' = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Nous convenons de dire que deux points quelconques z_1 et z_2 sont *congruents* s'ils diffèrent l'un de l'autre par une période $z_1 - z_2 = T$, et nous écrivons cette relation sous la forme

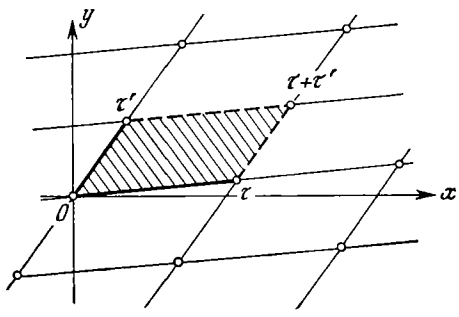

FIG. 217

$$z_1 \equiv z_2 \pmod{\tau, \tau'} \tag{2}$$

(ce qui se lit « z_1 est équivalent à z_2 par rapport aux modules τ et τ' »). L'ensemble M_1 et l'ensemble M_2 formé de tous les points congruents aux points de M_1 sont également dits *congruents*.

Le rapport $\frac{\tau'}{\tau}$ ne peut être réel (cf. n° 100) et, par conséquent, les points O, τ, $\tau + \tau'$ et τ' forment un parallélogramme non dégénéré (fig. 217). Nous appelons *parallélogramme des périodes* ce parallélogramme, ainsi que tous les parallélogrammes qui lui sont congruents. Pour fixer les idées, nous supposons que les sommets O, τ, $\tau + \tau'$, τ' sont disposés dans l'ordre du parcours positif de la frontière du parallélogramme. Il est clair que pour cela il suffit de supposer que

$$\operatorname{Im} \frac{\tau'}{\tau} > 0.$$

En outre, nous convenons que les côtés $O\tau$, $O\tau'$ du parallélogramme, excepté les sommets τ et τ', appartiennent à ce parallélogramme, que la partie restante de la frontière ne lui appartient pas, et nous convenons la même chose pour tous les parallélogrammes congruents. Alors les parallélogrammes des périodes ne contiennent aucun couple de points congruents et pour chaque point z du plan on trouve dans tout parallélogramme un point qui lui est congruent.

Citons les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques.

Théorème 1. *La somme, la différence, le produit et le rapport de deux fonctions elliptiques de mêmes périodes τ et τ' et en général*

toute combinaison rationnelle $R(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *de telles fonctions sont aussi des fonctions elliptiques de périodes* τ *et* τ'. *Il en est de même pour la dérivée d'une fonction elliptique.*

En effet, aussi bien la propriété des fonctions d'être méromorphes que la périodicité sont conservées par les opérations considérées.

Théorème 2. (Liouville). *Si une fonction doublement périodique est entière, elle est alors constante.*

En effet, notre fonction doit être bornée dans le parallélogramme des périodes, mais alors elle est aussi bornée dans tout le plan et, par conséquent, elle est constante.

Ainsi, au moins un pôle de $f(z)$ doit appartenir au parallélogramme des périodes (complété comme il a été dit plus haut). Du fait que $f(z)$ est une fonction méromorphe, le nombre total des pôles appartenant à un parallélogramme des périodes doit être fini ; ce nombre (de plus chaque pôle est compté autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité) est appelé *ordre* de la fonction elliptique.

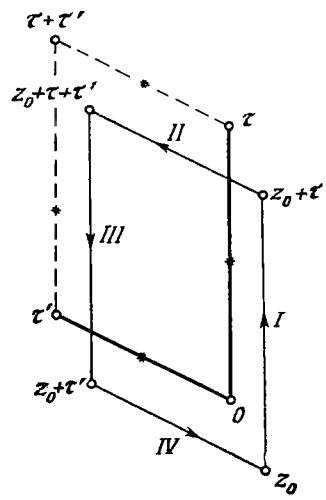

FIG. 218

Théorème 3 (Liouville). *La somme des résidus d'une fonction elliptique* $f(z)$ *par rapport à tous les pôles qui appartiennent à un parallélogramme des périodes est nulle.*

Pour démontrer ce théorème il suffit de voir que l'intégrale prise le long de tout contour fermé C qui contient tous les pôles appartenant à un parallélogramme des périodes, et seulement ces pôles, est nulle. S'il n'y a pas de pôles sur la frontière du parallélogramme, on peut alors prendre pour C cette frontière. Dans le cas contraire, on peut prendre pour C un contour qui s'obtient de la frontière du parallélogramme par une translation du sommet 0 jusqu'au point z_0, comme cela est indiqué sur la fig. 218 (sur cette figure les pôles sont indiqués par des astérisques ; rappelons que les côtés en pointillé n'appartiennent pas au parallélogramme). Il vient :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}, \qquad (3)$$

mais dans la première et la troisième intégrale les éléments d'intégration $f(z)\,dz$, qui correspondent à des points congruents, ne se distinguent que par le signe, car les valeurs de la fonction $f(z)$ aux points congruents sont égales et dz ne se distinguent que par le signe,

donc la somme de la première et de la troisième intégrale est nulle. On peut dire la même chose pour la somme de la deuxième et de la quatrième intégrale. Le théorème est démontré.

Comme corollaire, notons qu'*il n'existe pas de fonctions elliptiques du premier ordre.* En effet, par définition, cette fonction doit avoir un pôle du premier ordre dans un parallélogramme des périodes et, par conséquent, l'intégrale (3) ne peut être nulle. Il découle aussi du théorème 2 qu'*il n'existe pas de fonctions elliptiques d'ordre nul.*

Théorème 4 (Liouville). *Une fonction elliptique prend dans son parallélogramme des périodes chaque valeur complexe a un nombre de fois* (*) *égal à l'ordre de la fonction elliptique.*

Pour $a = \infty$, le théorème découle immédiatement de la définition de l'ordre d'une fonction elliptique. Pour $a \neq \infty$, rappelons-nous que, d'après le principe de l'argument (n° 23), la différence entre le nombre des a-points et le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ dans le parallélogramme des périodes est égale à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}, \tag{4}$$

où C est le contour introduit dans le théorème précédent (il suffit de supposer encore que le contour ne passe pas par les a-points de la fonction $f(z)$). D'après le théorème 1, la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ est une fonction elliptique ayant les mêmes périodes τ et τ' que la fonction $f(z)$, donc, d'après le théorème 3, l'intégrale (4) est nulle. Ce qui démontre le théorème.

Théorème 5. *La somme de tous les points z du parallélogramme des périodes en lesquels f (z) prend toute valeur fixe a est congruente à la somme de tous les pôles qui appartiennent au parallélogramme des périodes.*

Pour $a = \infty$, le théorème est évident. Pour $a \neq \infty$, la différence entre la somme de tous les a-points et la somme de tous les pôles qui appartiennent au parallélogramme des périodes est égale (n° 23) à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z\,\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}, \tag{5}$$

où C est le contour du théorème 4. Représentons

$$\int_C z\,\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a} = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$$

(fig. 218) et convainquons-nous de ce que la somme de la première et de la troisième intégrale de même que la somme de la deuxième

(*) Chaque point z en lequel $f(z) = a$ est compté autant de fois que son ordre de multiplicité l'indique.

et de la quatrième intégrale sont égales à certaines périodes de $f(z)$, ce qui précisément démontre le théorème. En effet, soient z et ζ les points variables sur les segments de droite I et III ; on peut alors prendre $\zeta = z + \tau'$, et puisque τ' est une période de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ et que les sens d'intégration sur les segments de droite I et III sont opposés, il vient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_I z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}+\frac{1}{2\pi i}\int_{III}\zeta\frac{f'(\zeta)\,d\zeta}{f(\zeta)-a}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_I (z-\zeta)\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}=-\frac{\tau'}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{f(z_0+\tau)-a}{f(z_0)-a}=\tau' n',$$

où n' est un nombre entier (τ est la période de $f(z)$, par conséquent, la fraction dont on prend le logarithme est égale à l'unité et son logarithme est supposé égal à $-2n'\pi i$). D'une façon analogue, nous obtenons que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{II}+\frac{1}{2\pi i}\int_{IV}=n\tau,$$

où n est également un nombre entier. Ainsi, l'intégrale (5) est égale à $n\tau + n'\tau' = T$, et le théorème est démontré.

Théorème 6. *Il existe entre deux fonctions elliptiques $f(z)$ et $g(z)$ quelconques de mêmes périodes τ et τ' une relation algébrique de la forme*

$$P[f(z),\ g(z)] = 0, \tag{6}$$

où $P(Z, W)$ est un polynôme en Z et W à coefficients constants.

En effet, désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tous les points du parallélogramme des périodes en lesquels l'une des fonctions $f(z)$ et $g(z)$ ou bien toutes les deux ont des pôles. Soit p_k l'ordre maximum des pôles de ces fonctions au point a_k et $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$. D'autre part, soit $Q(Z, W)$ un polynôme de degré n par rapport à ses variables Z et W. Si on y remplace $Z = f(z)$ et $W = g(w)$, alors, d'après le théorème 1, nous obtenons une certaine fonction elliptique $F(z)$ ayant les mêmes périodes τ et τ' que les fonctions données. Montrons que l'on peut choisir le polynôme Q de sorte que cette fonction se réduise identiquement à une constante C ; alors le théorème est démontré car, pour le polynôme P dans la formule (6), on peut choisir le polynôme $Q - C$.

La fonction $F(z)$ ne peut avoir des pôles qu'aux points a_k (ou aux points qui leur sont congruents), et pour qu'elle soit constante d'après le théorème 2, il suffit que ses parties principales par rapport à tous les points a_k soient nulles. Mais pour la fonction $F(z)$ le point a_k est un pôle d'ordre non supérieur à np_k, donc la condition d'après laquelle les parties principales de $F(z)$ sont nulles en tous

les points a_k se ramène au plus à $n(p_1 + p_2 + \ldots + p_m) = np$ équations linéaires et homogènes par rapport aux coefficients du polynôme Q. Ce polynôme a $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients (nous ne tenons pas compte du terme constant), donc, prenant $n + 3 > 2p$, nous en déduisons que le nombre des coefficients est supérieur à celui des équations. Alors les équations ont au moins un système de solutions non nulles et le polynôme Q avec les coefficients appartenant à ce système est celui qu'on cherchait. Le théorème est démontré.

Puisque la dérivée $f'(z)$ est une fonction elliptique qui a les mêmes périodes que $f(z)$, le théorème 6 entraîne

Théorème 7. *Toute fonction elliptique $f(z)$ satisfait à une équation différentielle algébrique de la forme*

$$P[f(z), f'(z)] = 0, \tag{7}$$

où $P(Z, W)$ est un polynôme en Z et W.

Comme exemple, appliquons les théorèmes démontrés à la fonction elliptique du deuxième ordre qui a deux pôles simples dans un parallélogramme des périodes (nous étudierons les fonctions elliptiques à pôle unique du second ordre au n° 103).

Les fonctions du second ordre jouent un rôle particulier dans la théorie des fonctions elliptiques car, comme il s'avère, toute fonction elliptique peut être exprimée d'une façon rationnelle par une fonction elliptique du second ordre et par sa dérivée (nous ne donnons pas la démonstration). Notons a_1 et a_2 les pôles de la fonction elliptique du second ordre $f(z)$; sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer que $a_1 + a_2 = 0$, car par une translation du plan des z (en remplaçant la variable z par la variable $z + c$) on peut toujours faire de manière que l'origine des coordonnées coïncide avec le milieu du segment de droite a_1a_2. Pour parallélogramme des périodes, nous prenons le parallélogramme de centre au point $z = 0$. Les points a_1 et a_2 ne peuvent pas se trouver sur la frontière de ce parallélogramme car, s'il en était ainsi, ils devraient se trouver sur les côtés opposés, ce qui est impossible (le parallélogramme ne contient qu'un seul côté de chaque couple de côtés opposés). D'après le théorème 4, dans ce parallélogramme des périodes, la fonction $f(z)$ prend deux fois toute valeur, notamment aux points z_1 et z_2, dont la somme, d'après le théorème 5, est congruente à la somme des pôles, c'est-à-dire est nulle :

$$z_1 + z_2 \equiv 0 \pmod{\tau, \tau'}.$$

Mais puisque la somme de deux points appartenant au parallélogramme des périodes ne peut être congruente à zéro et être distincte de zéro, alors $z_1 + z_2 = 0$. En d'autres termes, on a la relation $f(-z) = f(z)$ pour tout z, c'est-à-dire que $f(z)$ est une fonction paire.

Il en découle que la dérivée de notre fonction est impaire: $f'(-z) = -f'(z)$ et puisque $f'(z)$ est régulière partout dans le parallélogramme des périodes, excepté aux points a_1 et a_2, en lesquels elle a des pôles du second ordre, elle est donc une fonction elliptique du quatrième ordre. Du fait que $f'(z)$ est impaire et continue au point $z = 0$ il découle qu'elle y prend la valeur zéro. Puis, nous avons:

$$f'\left(\frac{\tau}{2}\right) = -f'\left(-\frac{\tau}{2}\right) = -f'\left(-\frac{\tau}{2}+\tau\right) = -f'\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

d'où l'on voit que $z = \frac{\tau}{2}$ est aussi un zéro de $f'(z)$. D'une façon analogue, nous trouvons encore deux zéros de $f'(z)$: $z = \frac{\tau'}{2}$ et $\frac{\tau+\tau'}{2}$. Ainsi, nous connaissons les quatre zéros appartenant à ce parallélogramme des périodes.

D'après le théorème 7, il existe entre $f(z)$ et $f'(z)$ une relation algébrique

$$P[f(z), f'(z)] = 0. \tag{7}$$

Posant $f(z) = Z$, $f'(z) = W$, nous pouvons émettre les propositions suivantes: a) à chaque valeur de Z l'équation (7) fait correspondre deux valeurs de W; b) ces valeurs ne diffèrent que par le signe; c) à chaque W correspondent quatre valeurs de Z; d) les fonctions Z et W deviennent infinies simultanément.

En effet, pour vérifier a) et b) remarquons que puisque $Z = f(z)$ est une fonction paire du second ordre, à chaque Z correspondent deux valeurs de z qui ne diffèrent que par leur signe, et comme $W = f'(z)$ est une fonction impaire, les valeurs correspondantes de W ne diffèrent également que par leur signe. La proposition c) se vérifie de la même manière que a) et la proposition d) est vraie puisque les pôles de $f(z)$ et $f'(z)$ coïncident.

Il découle de a) et c) que le polynôme du premier membre de (7) a la forme:

$$P(Z, W) = A_0(Z)\, W^2 + A_1(Z)\, W + A_2(Z),$$

où $A_k(z)$ est un polynôme dont le degré n'est pas supérieur à 4 et on peut conclure de b) que $A_1(Z) \equiv 0$ et enfin de d) que $A_0(Z) = \text{const}$ (dans le cas contraire, de l'équation $W^2 = -\frac{A_2}{A_0}$, à laquelle se ramène (7), il découlerait que, aux points z en lesquels $A_0(Z)$ s'annule, on aurait $W = \infty$).

Ainsi, l'équation (7) se ramène à la forme $W^2 = cA_2(Z)$, où c est une constante et A_2 un polynôme du quatrième degré. Puisque

les zéros de ce dernier coïncident avec les zéros de W que nous connaissons, nous trouvons donc une équation différentielle de la forme

$$[f'(z)]^2 = c\,[f(z)-f(0)]\left[f(z)-f\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left[f(z)-f\left(\frac{\tau'}{2}\right)\right]\left[f(z)-f\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right)\right]. \quad (8)$$

Le résultat obtenu peut encore s'exprimer comme suit : la *fonction* $Z=f(z)$ *est la fonction inverse de l'intégrale* :

$$z=\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{\sqrt{c\,(w-w_1)\,(w-w_2)\,(w-w_3)\,(w-w_4)}}, \quad (9)$$

où c et w_0 sont des constantes et

$$w_1=f(0)\,;\ w_2=f\left(\frac{\tau}{2}\right),\ w_3=f\left(\frac{\tau'}{2}\right),\ w_4=f\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right). \quad (10)$$

L'intégrale (9) porte le nom d'*intégrale elliptique.* Nous avons déjà rencontré (n° 39) le cas particulier

$$z=\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)\,(1-k^2w^2)}} \quad (11)$$

d'une telle intégrale lorsque nous avons transformé d'une manière conforme le demi-plan supérieur sur un rectangle. Nous avons noté la fonction inverse de cette intégrale

$$w=\operatorname{sn} z \quad (12)$$

et l'avons appelée *sinus elliptique.* C'est une des fonctions elliptiques de Jacobi dont nous entreprenons maintenant l'étude.

102. Intégrales elliptiques et fonctions de Jacobi. On appelle en général *intégrale elliptique* une intégrale de la forme

$$\int R\,[w,\sqrt{P(w)}]\,dw, \quad (1)$$

où R est une fonction rationnelle de ses variables et $P(w)$ un polynôme du troisième ou du quatrième degré. Dans des cas particuliers, cette intégrale peut s'exprimer au moyen de fonctions élémentaires, par exemple, l'intégrale

$$\int\frac{w\,dw}{\sqrt{w^4+1}}=\frac{1}{2}\ln\left(w^2+\sqrt{w^4+1}\right)+C.$$

Dans ce dernier cas, on l'appelle *pseudo-elliptique.*

Mais, en général, l'intégrale (1) ne s'exprime pas par les fonctions élémentaires. On peut montrer (*) qu'à l'aide de substitutions

(*) Cf., par exemple, *Fikhtengoltz*, t. 2, pp. 103-105.

et transformations élémentaires, une intégrale elliptique se ramène à l'une des *formes canoniques* suivantes:

$$\int \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \quad \int \sqrt{\frac{1-k^2w^2}{1-w^2}}\, dw,$$
$$\int \frac{dw}{(1+lw^2)\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \tag{2}$$

où k et l sont des constantes. Les intégrales (2) sont appelées intégrales elliptiques *sous forme de Legendre* respectivement de première, deuxième et troisième espèce. Le nombre k est appelé *module* de l'intégrale.

Le changement de variable

$$w = \sin \varphi \tag{3}$$

ramène les intégrales (2) à la forme trigonométrique

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$
$$\int \frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

La variable φ est appelée *amplitude* de l'intégrale elliptique. Les notations suivantes sont adoptées pour les intégrales données sous la forme (4):

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$
$$\Pi(k, l, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{5}$$

On rencontre surtout des intégrales d'amplitude $\varphi = \frac{\pi}{2}$; elles sont dites intégrales elliptiques *complètes* et des notations particulières sont introduites pour les deux premières:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k), \quad E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k). \tag{6}$$

On introduit souvent encore une variable α à partir de la relation

$$\sin \alpha = k, \tag{7}$$

qui est appelée *angle modulaire*. On a établi des tables pour leséintégrales elliptiques de première et de deuxième espèce, considerées

comme fonctions de l'amplitude φ et de l'angle modulaire α. Les valeurs à cinq chiffres calculées de degré en degré pour φ et de cinq degrés en cinq degrés pour α sont données dans la Table de fonctions de Jahnke et Emde [14] (S. 62-73) qui renseigne également sur les tables plus détaillées et les tables des intégrales elliptiques complètes comme fonctions de α de degré en degré (S. 86) et comme fonctions de k^2 de 0,01 en 0,01, de 0 jusqu'à 1 (S. 79, 80).

On donne également sur la fig. 219 le graphe du module, au-dessus du plan des $k^2 = \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, de la branche de la fonction $K = K(\lambda)$ qui est égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $\lambda = 0$ et a une discontinuité sur la demi-droite $(1, \infty)$ de l'axe des λ_1. On voit sur la figure que la fonction devient infinie pour $\lambda = 1$, où elle a un point de branchement. On a tracé sur le graphe du module les lignes équimodules

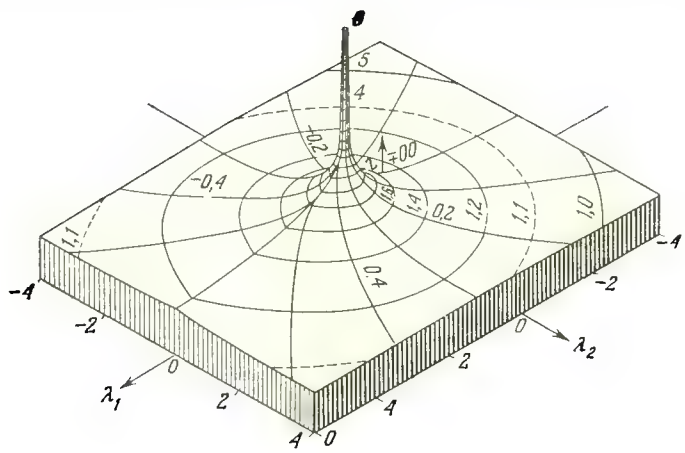

FIG. 219

(de 0,2 en 0,2) et équiarguments (de 0,01 en 0,01 de l'angle droit); la flèche verticale indique la position de l'origine des coordonnées.

Voyons avec un peu plus de détail les propriétés de l'intégrale elliptique de première espèce sous la forme (2), c'est-à-dire considérée comme fonction de la variable complexe $w = \sin\varphi$:

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}. \tag{8}$$

Nous avons déjà vu (n° 39) que la fonction inverse de cette intégrale, c'est-à-dire la fonction de Jacobi ou le *sinus elliptique*

$$w = \operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z, k), \tag{9}$$

est une fonction méromorphe doublement périodique, c'est-à-dire une fonction elliptique de périodes fondamentales

$$4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 4K,\ 2i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = 2iK', \qquad (10)$$

où $K = F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)$ et $K' = F\left(\frac{\pi}{2},\ k'\right)$ sont des intégrales elliptiques complètes qui correspondent au module k et au *module complémentaire*

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \cos\alpha \qquad (11)$$

(pour s'en convaincre, il suffit de faire le changement de variable $t = \sin\varphi$ dans la première intégrale et alors elle devient $F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)$; après le changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}$ la deuxième intégrale devient $\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}}$). Nous avons aussi trouvé les valeurs suivantes de sn z dans le parallélogramme des périodes:

y \ x	0	K	$2K$	$3K$
0	0	1	0	-1
K'	∞	$1/k$	∞	$-1/k$

(12)

et nous avons vu qu'elle est une fonction impaire:

$$\text{sn}\,(-z) = -\text{sn}\,z. \qquad (13)$$

Nous donnons sur la fig. 220 le graphe du module de la fonction sn z pour $k = 0{,}8$. On voit que les pôles de cette fonction coïncident avec les points $z = 2nK + (2n' + 1)K'i$ et les zéros avec les points $z = 2nK + 2n'K'$, où n et n' sont des nombres entiers arbitraires (ce qui correspond entièrement à ce que nous avons dit au numéro 39).

Du fait que la fonction (9) est doublement périodique, il découle que la fonction inverse $z = F(w, k)$, c'est-à-dire l'intégrale elliptique de première espèce, considérée comme fonction de w, est une fonction à une infinité de déterminations. On obtient une de ses déterminations quelconques en ajoutant la période $T = 4nK +$

$+ 2in'K'$ à l'une d'entre elles:

$$\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \int_{L_0}^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} + \\ + 4nK + 2in'K'. \quad (14)$$

Ici, L est un chemin quelconque qui réunit les points 0 et w, tandis que L_0 un chemin fixe, disons un segment de droite (comparer à la propriété analogue de Ln w donnée au numéro 8). On a représenté sur la fig. 221 le graphe du module d'une des branches de

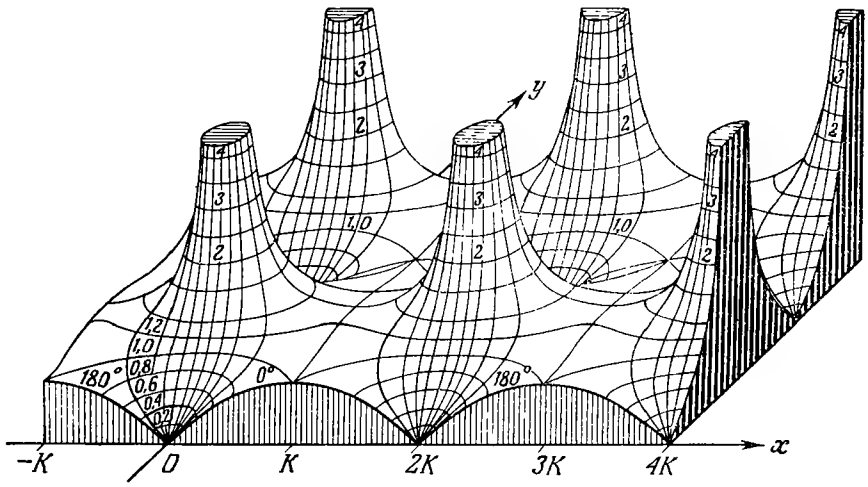

FIG. 220

l'intégrale elliptique $F(w, k)$, pour $k = 0{,}8$. On y voit clairement les points de branchement qui se trouvent au-dessus des points $w = \pm 1$ et $w = \pm \frac{1}{k}$ du plan des w.

Si l'on introduit comme précédemment la variable φ (l'amplitude) de sorte que $w = \sin \varphi$, alors l'intégrale (8) se transforme en l'intégrale

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}; \quad (15)$$

on a une notation particulière pour la fonction inverse, l'amplitude de l'intégrale elliptique z,

$$\varphi = \operatorname{am} z. \quad (16)$$

Le sinus elliptique de Jacobi peut alors être représenté sous la forme

$$w = \operatorname{sn} z = \sin(\operatorname{am} z), \quad (17)$$

et on l'appelle *sinus amplitudinis*. Cette dénomination et cette notation ont été introduites par Jacobi ; actuellement, la notation sn est

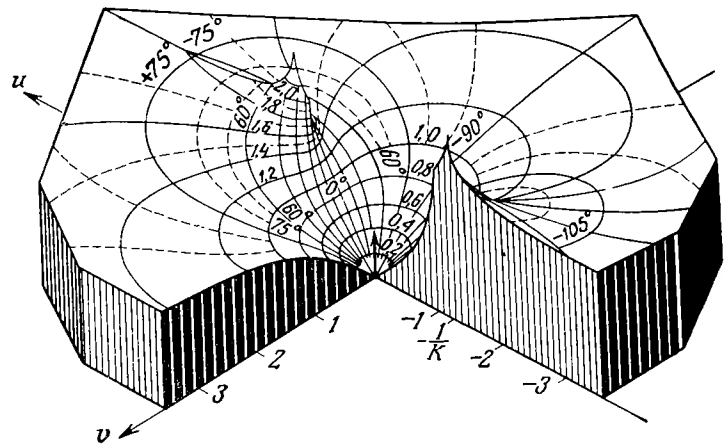

FIG. 221

la plus employée. Jacobi a également considéré les fonctions *cosinus amplitudinis* et *delta amplitudinis*

$$\cos(\operatorname{am} z) = \sqrt{1-w^2} = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z},$$

$$\Delta(\operatorname{am} z) = \sqrt{1-k^2w^2} = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z}, \qquad (18)$$

actuellement, les notations suivantes de ces fonctions

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}, \quad \operatorname{dn} z = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z} \qquad (19)$$

sont les plus usitées (lire : c, n, z et d, n, z). Sur la fig. 222, nous donnons les graphes de sn, cn et dn pour les valeurs réelles de la variable $z = x$ et pour des petits k positifs. Remarquons que pour $k = 0$, il découle de la formule (8) que $z = \arcsin w$, donc, $\operatorname{sn}(z, 0) = \sin z$; alors les formules (19) donnent $\operatorname{cn}(z, 0) = \cos z$, $\operatorname{dn}(z, 0) = 1$.

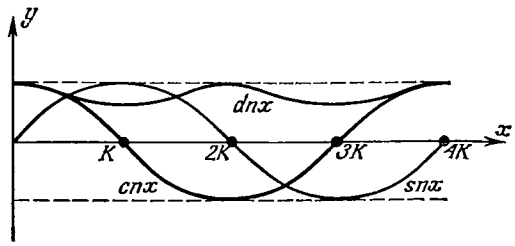

FIG. 222

On peut démontrer que les fonctions cn z et dn z, ainsi que sn z, sont des fonctions elliptiques du second ordre et que leurs périodes fondamentales sont respectivement $4K$, $2K + 2K'i$ (pour cn) et $2K$, $4K'i$ (pour dn). Nous ne donnons ici que les formules de dérivation et les théorèmes d'addition des fonctions elliptiques de Jacobi qui mettent en relief l'analogie entre ces fonctions et les fonctions trigonométriques ordinaires.

Pour établir la première formule de dérivation, nous partons de la relation (8) de laquelle nous obtenons:

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}$$

ou, en faisant $w = \operatorname{sn} z$,

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z. \tag{20}$$

Pour obtenier d'autres formules, dérivons les relations

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1, \tag{21}$$

qui découlent directement des égalités (19); nous avons alors:

$$\frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d \operatorname{dn} z}{dz} = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z. \tag{22}$$

Remarquons que pour $k = 0$, la formule (20) et la première formule (22) deviennent les formules connues de dérivation de $\sin z$ et $\cos z$. Remarquons encore que des formules (22), en y exprimant sn et dn par cn et, respectivement, sn et cn par dn à l'aide des formules (21), nous obtenons les équations différentielles suivantes pour $w = \operatorname{cn} z$ et $w = \operatorname{dn} z$:

$$\frac{dw}{dz} = -\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)}, \quad \frac{dw}{dz} = -\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)}, \tag{23}$$

où $k' = \sqrt{1-k^2}$ est le module complémentaire. Tenant compte de ce que cn 0 = dn 0 = 1 (ce qui découle de (19) et de l'égalité sn 0 = 0) et de ce que cn z et dn z sont des fonctions paires, nous voyons, en s'aidant des formules (23), que ces fonctions sont les inverses respectivement des intégrales

$$z = \int_1^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)}}; \tag{24}$$

$$z = \int_1^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)}}.$$

Pour établir les théorèmes d'addition, nous utilisons la méthode dont l'idée remonte à Euler et qui a servi de première impulsion

à l'étude des intégrales elliptiques. Avec Euler, considérons l'équation différentielle

$$\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}+\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}}=0.$$

Trouvant indépendamment ses deux intégrales et les comparant, nous obtenons la relation que nous cherchions et qui exprime le théorème d'addition. La première de ces intégrales s'obtient immédiatement

$$\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}+\int_0^w \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}}=C. \qquad (25)$$

Pour obtenir la deuxième intégrale, remplaçons notre équation différentielle par le système

$$\frac{dw}{du}=\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)},$$
$$\frac{d\omega}{du}=-\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}, \qquad (26)$$

où u est une variable auxiliaire. Dérivant ces équations, nous trouvons :

$$\frac{d^2w}{du^2}=w(2k^2w^2-1-k^2), \quad \frac{d^2\omega}{du^2}=\omega(2k^2\omega^2-1-k^2),$$

d'où

$$\omega\frac{d^2w}{du^2}-w\frac{d^2\omega}{du^2}=\frac{d}{du}\left(\omega\frac{dw}{du}-w\frac{d\omega}{du}\right)=2k^2w\omega(w^2-\omega^2).$$

D'autre part, des formules (26) nous trouvons :

$$\omega^2\left(\frac{dw}{du}\right)^2-w^2\left(\frac{d\omega}{du}\right)^2=(\omega^2-w^2)(1-k^2w^2\omega^2),$$

et, divisant cette équation par la précédente, nous obtenons :

$$\frac{\frac{d}{du}\left(\omega\frac{dw}{du}-w\frac{d\omega}{du}\right)}{\omega\frac{dw}{du}-w\frac{d\omega}{du}}=\frac{2k^2w\omega\left(\omega\frac{dw}{du}+w\frac{d\omega}{du}\right)}{k^2w^2\omega^2-1},$$

ou encore

$$\frac{d}{du}\ln\left(\omega\frac{dw}{du}-w\frac{d\omega}{du}\right)=\frac{d}{du}\ln(k^2w^2\omega^2-1).$$

D'où $\omega\frac{dw}{du}-w\frac{d\omega}{du}=C'(1-k^2w^2\omega^2)$ et, tenant compte de la formule (26), nous trouvons pour la seconde intégrale

$$\frac{w\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}+\omega\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}{1-k^2w^2\omega^2}=C_1. \qquad (27)$$

Posant

$$\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = z, \quad \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}} = \zeta,$$

d'où $w = \operatorname{sn} z$, $\omega = \operatorname{sn} \zeta$ et, portant ces dernières expressions dans les formules (25) et (27), nous trouvons les intégrales de notre équation différentielle sous la forme

$$z + \zeta = C, \quad \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta + \operatorname{sn} \zeta \operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta} = C_1. \tag{28}$$

Puisque ces intégrales, d'après le théorème d'unicité de la solution d'une équation différentielle, doivent découler l'une de l'autre, C_1 doit être une fonction de C, à savoir, $C_1 = \varphi(C) = \varphi(z + \zeta)$. Portons cette relation dans la deuxième équation (28) et pour déterminer la forme de la fonction φ faisons encore $\zeta = 0$. Nous trouvons $\varphi(z) = \operatorname{sn} z$, donc, sous sa forme définitive, le théorème d'addition s'écrit comme suit :

$$\operatorname{sn}(z+\zeta) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta + \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta}. \tag{29}$$

Pour $k = 0$, cette formule doit coïncider avec le théorème d'addition des sinus.

Des formules analogues sont vraies également pous les autres fonctions de Jacobi ; ainsi

$$\operatorname{cn}(z+\zeta) = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} \zeta - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} \zeta \operatorname{dn} z \operatorname{dn} \zeta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta}, \tag{30}$$

$$\operatorname{dn}(z+\zeta) = \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{dn} \zeta - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} z \operatorname{cn} \zeta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \zeta}. \tag{31}$$

On obtient de ces formules d'addition fondamentales d'autres, analogues aux formules connues de la trigonométrie. On peut les trouver par exemple dans l'Aide-mémoire de A. Jouravski [13], pp. 76-77.

Pour terminer, remarquons que puisque les fonctions de Jacobi ne dépendent que d'un paramètre (complexe) k, leurs périodes ne peuvent être choisies arbitrairement. Il s'avère que seul le rapport

$$\varkappa = \frac{K'}{K} \tag{32}$$

peut être donné arbitrairement ou, ce qui revient au même, la quantité

$$q = e^{-\pi\varkappa} = e^{-\pi \frac{K'}{K}}. \tag{33}$$

Alors, les quantités K et k peuvent être définies par les formules (*)

$$K=\frac{\pi}{2}\left\{1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{\nu^2}\right\},\quad k=4\left\{\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty}q^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}}{1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{\nu^2}}\right\}^2. \tag{34}$$

Donnons le graphe de la relation entre q et k^2 sur l'intervalle (0, 1) (fig. 223). On a représenté par des lignes continues les graphes de

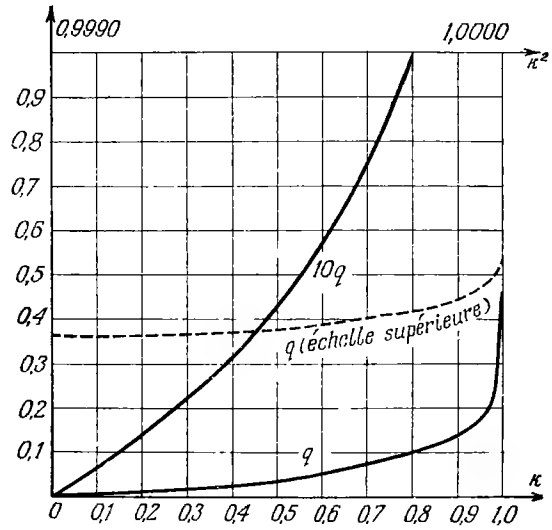

FIG. 223

q et $10q$ et en pointillé le graphe de q sur l'intervalle (0,999, 1); pour ce dernier graphe, les valeurs de k^2 sont indiquées sur l'échelle supérieure.

Dans la Table de fonctions de Jahnke et Emde, on trouve des tables à cinq chiffres pour le logarithme à base 10 de q en fonction de l'angle modulaire α pour les α variant de 0 à 90° de 5′ en 5′ (S. 50-52). En se servant de ces tables on peut trouver k pour q donné et alors, d'après les tables des intégrales elliptiques complètes, on trouve K. Ainsi, on peut négliger les formules (34).

(*) Les séries (34) convergent car, d'après la condition (1) du n° 101, $\operatorname{Im}\frac{\tau'}{\tau}=$ $=\operatorname{Im}\frac{iK'}{2K}=\operatorname{Re}\frac{K'}{K}>0$, donc $|q|<1$. Voir l'établissement des formules (34), par exemple, dans le livre de N. Akhiezer [11], pp. 94-95.

103. Fonctions de Weierstrass. Fonctions thêta. 1) Fonctions de Weierstrass $\wp$ et $\wp'$. Les fonctions de Jacobi sont des fonctions elliptiques du second ordre qui ont deux pôles simples dans chaque parallélogramme des périodes. Weierstrass a construit des fonctions elliptiques du second ordre qui ont, dans tout parallélogramme des périodes, un pôle multiple. Contrairement aux fonctions de Jacobi, ces fonctions dépendent de deux paramètres complexes et les périodes τ, τ' peuvent être données arbitrairement sous la condition générale

$$\operatorname{Im}\frac{\tau'}{\tau} > 0. \tag{1}$$

Les propriétés des fonctions de Weierstrass sont analogues aux propriétés des fonctions de Jacobi. Remarquons que dans les considérations théoriques, les fonctions de Weierstrass sont presque toujours plus commodes, cependant, dans les problèmes pratiques, on rencontre plus souvent les fonctions de Jacobi.

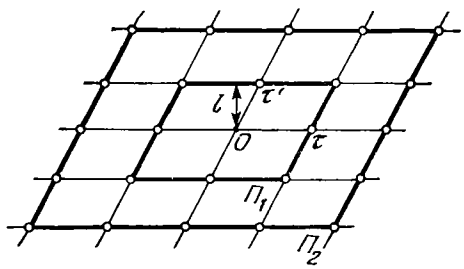

FIG. 224

Démontrons une proposition auxiliaire.

Lemme. *Quels que soient les nombres complexes* τ *et* τ' *qui vérifient la condition* (1), *la série*

$$\sum_{n,\,n'=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(n\tau+n'\tau')^3}, \tag{2}$$

dans laquelle la sommation se fait par rapport à toutes les valeurs entières de n *et* n', *excepté* $n = n' = 0$, *converge absolument.*

Les points $T = n\tau + n'\tau'$ coïncident avec les sommets du réseau des parallélogrammes. Considérons d'abord le parallélogramme Π_1 qui contient 8 points T (fig. 224). Désignons par l la plus courte distance du point $z = 0$ aux points de Π_1; remarquons que pour chacun de ces 8 points $\left|\frac{1}{T^3}\right| \leqslant \frac{1}{l^3}$, de sorte que la somme relative à ceux-ci satisfait à l'inégalité

$$\sum_{\Pi_1}{}' \frac{1}{|T|^3} \leqslant \frac{8}{l^3}.$$

De même, $8 \cdot 2 = 16$ points T se trouvent sur le parallélogramme Π_2 (fig. 224), dont chacun est éloigné de l'origine des coordonnées d'au

moins $2l$, et la somme relative à ceux-ci satisfait à l'inégalité

$$\sum_{\Pi_2} \frac{1}{|T|^3} \leqslant \frac{8}{2^2 l^3}.$$

D'une façon générale, pour le parallélogramme Π_n qui contient $8n$ points distants de l'origine des coordonnées d'au moins nl, nous avons :

$$\sum_{\Pi_n} \frac{1}{|T|^3} \leqslant \frac{8}{n^2 l^3}.$$

Ainsi, la série (2) est majorée par la série convergente $\frac{8}{l^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et, par conséquent, elle converge absolument. Le lemme est démontré.

Il découle du lemme que la série

$$f(z) = \sum_{n,n'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\tau - n'\tau')^3} = \sum \frac{1}{(z-T)^3} \tag{3}$$

converge absolument et uniformément dans tout cercle $|z| \leqslant R$ si l'on omet un nombre fini de termes possédant des pôles dans ce cercle (ici, on admet les valeurs $n = n' = 0$). En effet, ne considérant que les termes pour lesquels $|T| > 2R$, nous avons $\left|\frac{z}{T}\right| < \frac{1}{2}$ et

$$\left|\frac{1}{(z-T)^3}\right| \leqslant \frac{1}{\left(1 - \left|\frac{z}{T}\right|\right)^3} \cdot \frac{1}{|T|^3} < \frac{8}{|T|^3},$$

d'où, d'après le lemme, la proposition est établie.

Représentant, pour z dans le cercle $|z| < R$, $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \sum_{|T| \leqslant R} \frac{1}{(z-T)^3} + \sum_{|T| > R} \frac{1}{(z-T)^3},$$

nous voyons que la première somme est une fonction rationnelle qui a en chaque point T un pôle du troisième ordre de partie principale $\frac{1}{(z-T)^3}$ et la seconde, d'après ce qui vient d'être démontré, est une fonction analytique dans le cercle $|z| \leqslant |R|$. Ainsi, on peut dire que $f(z)$ est une fonction méromorphe.

Ensuite, il est clair que $f(z)$ a τ et τ' pour périodes fondamentales. En effet, par exemple,

$$f(z+\tau) = \sum \frac{1}{[z-(T-\tau)]^3} = f(z),$$

car $T - \tau$ est encore une période et décrit tout l'ensemble des périodes en même temps que T. Donc, τ et, de même, τ' sont des périodes

de $f(z)$. Mais si $\widetilde{T}$ est une période arbitraire de $f(z)$, alors du fait que T est un pôle de $f(z)$ on peut conclure que $T + \widetilde{T} = T'$ est encore un pôle. D'où $\widetilde{T} = T' - T$, c'est-à-dire que $\widetilde{T}$ est une combinaison à coefficients entiers de τ et τ', donc τ et τ' sont des périodes fondamentales de $f(z)$.

Ainsi, $f(z)$ est une fonction elliptique du troisième ordre de périodes τ et τ' données. En outre, elle est impaire ; en effet,

$$f(-z) = \sum \frac{1}{(-z-T)^3} = -\sum \frac{1}{[z-(-T)]^3} = -f(z),$$

car $-T$ parcourt tout l'ensemble des périodes en même temps que T.

Partant de $f(z)$, à l'aide d'une intégration on peut construire une fonction elliptique paire du deuxième ordre : si z_0 et z sont des points distincts des périodes, alors, en intégrant terme à terme la série (3) le long d'un arc de courbe réunissant z_0 à z et ne contenant pas de périodes, nous obtenons :

$$\varphi(z) = C + \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = C - \frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{(z_0-T)^2}\right].$$

Séparant dans la somme le terme correspondant à $T=0$, nous écrivons cette dernière formule sous la forme

$$\varphi(z) + \frac{1}{2z^2} = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\sum{}'\left[\frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{(z_0-T)^2}\right]. \qquad (4)$$

Le second membre est régulier au point $z=0$, donc, on peut choisir la constante C de manière que la valeur de ce second membre pour $z=0$ soit nulle :

$$C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\sum{}'\left[\frac{1}{T^2} - \frac{1}{(z_0-T)^2}\right] = 0. \qquad (5)$$

Retranchant (5) de (4), nous trouvons :

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z^2} + \sum{}'\left[\frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2}\right]\right\}.$$

La fonction méromorphe entre accolades est appelée *fonction de Weierstrass* et on la désigne par $\wp(z)$ (on lit « p de z ») :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}'\left[\frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2}\right]. \qquad (6)$$

La série (6) converge absolument, car le module de son terme général pour les $|T|$ suffisamment grands satisfait à l'inégalité

$$\left|\frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2}\right| = \left|\frac{(2T-z)z}{T^2(z-T)^2}\right| = \frac{2}{|T|^3}\,\frac{1-\frac{|z|}{2|T|}}{\left(1-\frac{z}{|T|}\right)^2}\,|z| < \frac{A|z|}{|T|^3},$$

où A est une constante. Tenant compte de ceci, nous démontrons que $\wp(z)$ est une fonction paire

$$\wp(-z)=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left\{\frac{1}{[z-(-T)]^2}-\frac{1}{(-T)^2}\right\}=\wp(z), \qquad (7)$$

car si on remplace T par $-T$, il ne se produit que permutation des termes de la série.

La dérivée de la fonction de Weierstrass

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}-2\sum{}'\frac{1}{(z-T)^3}=-2\sum\frac{1}{(z-T)^3}=-2f(z)$$

ne diffère de $f(z)$ que par un facteur et, par conséquent, elle est doublement périodique de périodes τ et τ'. Ainsi,

$$\wp'(z+\tau)-\wp'(z)=0, \quad \wp'(z+\tau')-\wp'(z)=0,$$

et, en intégrant, nous obtenons :

$$\wp(z+\tau)-\wp(z)=C, \quad \wp(z+\tau')-\wp(z)=C_1.$$

Posant ici $z=-\frac{\tau}{2}$ et $z=-\frac{\tau'}{2}$ et tenant compte de ce que $\wp(z)$ est paire, nous trouvons $C=C_1=0$, d'où il découle que $\wp(z)$ est une fonction elliptique de périodes τ et τ'. Il est clair qu'elle est une fonction du deuxième ordre et qu'elle a dans chaque parallélogramme des périodes au point T un pôle double de partie principale $\frac{1}{(z-T)^2}$.

La dérivée $\wp'(z)$ est une fonction elliptique impaire du troisième ordre. Tout comme au n° 101, nous trouvons ses trois zéros aux points $z=\frac{\tau}{2}$, $\frac{\tau'}{2}$, $\frac{\tau+\tau'}{2}$ (la somme des zéros satisfait à $\tau+\tau'\equiv$ $\equiv 0 \pmod{\tau, \tau'}$, comme il se doit d'après le théorème 5 du n° 101). Donc, ces points sont des points doubles pour $\wp(z)$ de sorte que les valeurs

$$\wp\left(\frac{\tau}{2}\right)=e_1, \ \wp\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right)=e_2, \ \wp\left(\frac{\tau'}{2}\right)=e_3 \qquad (8)$$

(de même que la valeur ∞) sont prises par la fonction $\wp$ en des points qui coïncident. $\wp(z)$ prend les autres valeurs en deux points distincts car, dans le cas contraire, nous aurions encore un zéro de $\wp'(z)$ dans un parallélogramme des périodes, ce qui est impossible. Nous donnons, sur la fig. 225, le graphe du module de la fonction $\wp(z)$.

Pour établir l'équation différentielle à laquelle, d'après le théorème 7 du n° 101, $\wp(z)$ satisfait, trouvons le développement de cette fonction en série de Laurent au voisinage du point $z=0$.

Pour tout $T \neq 0$, nous avons:

$$\frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{1}{T^2}\left[\left(1-\frac{z}{T}\right)^{-2} - 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{T^{n+2}} z^n,$$

donc, tenant compte de l'expression (6) et de ce que $\wp(z)$ est

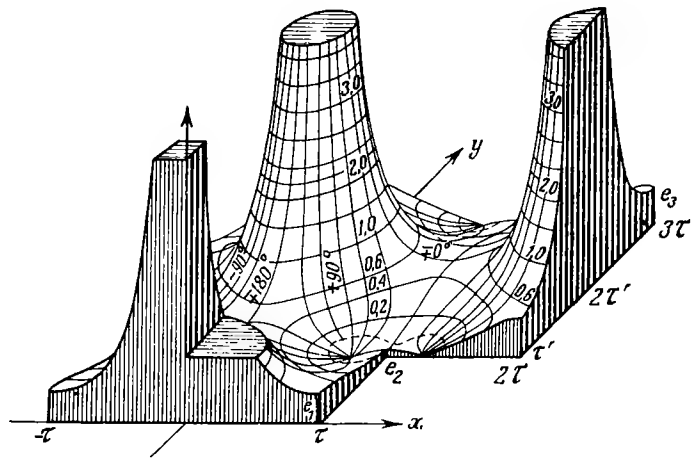

FIG. 225

paire, notre développement ne contient que des puissances paires de z et nous obtenons:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3z^2 \sum{}' \frac{1}{T^4} + 5z^4 \sum{}' \frac{1}{T^6} + \cdots$$

Introduisant les notations adoptées

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{T^4}, \quad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{T^6}, \tag{9}$$

nous obtenons le développement que nous cherchions sous la forme

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \cdots \tag{10}$$

Dérivant la série (10), nous trouvons le développement

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10} z + \frac{g_3}{7} z^3 + \cdots \tag{11}$$

Partant des développements (10) et (11), nous trouvons l'équation différentielle que nous cherchions en formant une combinaison rationnelle de $\wp$ et de $\wp'$ qui n'a pas de pôles dans un parallélogramme des périodes et qui, par conséquent, est constante (théorè-

me 2 du n° 101). Nous avons:

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6}\left\{1 - \frac{g_2}{10}z^4 - \frac{g_3}{7}z^6 + \ldots\right\},$$

$$[\wp(z)]^3 = \frac{1}{z^6}\left\{1 + \frac{3g_2}{20}z^4 + \frac{3g_3}{28}z^6 + \ldots\right\},$$

donc, la combinaison que nous cherchions est

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + g_2\wp(z) = -g_3 + c_2z^2 + c_3z^4 + \ldots \quad (12)$$

En effet, le premier membre de (12) est une fonction elliptique de périodes τ et τ' (théorème 1 du n° 101); son unique pôle dans un parallélogramme des périodes aurait pu être le point $z = 0$, mais, comme le montre le second membre de (12), cette fonction est régulière en ce point. Donc, cette fonction est constante et elle est égale à sa valeur pour $z = 0$, c'est-à-dire à $-g_3$. Ainsi, nous obtenons l'équation différentielle que nous cherchions

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3. \quad (13)$$

Plus haut, nous avons trouvé les zéros de $\wp'(z)$ et introduit des notations pour les valeurs de $\wp(z)$ en ces points (cf. (8)). Tenant compte de ceci, l'égalité (13) peut s'écrire sous la forme

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z) - e_1][\wp(z) - e_2][\wp(z) - e_3]. \quad (14)$$

La comparaison des formules (13) et (14), à l'aide des propriétés, bien connues en algèbre, des racines des équations, donne les relations

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \quad (15)$$

Posant $\wp(z) = w$, nous écrivons l'équation (13) sous la forme

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}},$$

d'où nous concluons que $\wp(z)$ est la fonction inverse de l'intégrale

$$z - z_0 = \int_{w_0}^{w} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}} \quad (w_0 = \wp(z_0)).$$

Faisant tendre ici z_0 vers 0, d'où w_0 tend vers ∞, nous obtenons l'*intégrale elliptique sous forme de Weierstrass*

$$z = \int_{\infty}^{w} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}}, \quad (16)$$

dont l'inverse est la fonction $\wp(z)$.

Pour terminer, donnons sans démonstration le théorème d'addition pour la fonction $\wp(z)$:

$$\wp(z+\zeta)+\wp(z)+\wp(\zeta)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(\zeta)}{\wp(z)-\wp(\zeta)}\right\}^3. \qquad (17)$$

On établit, par exemple, cette formule dans le livre de N. Akhiezer [11], pp. 60-63.

2) Fonctions ζ et σ de Weierstrass. Parmi les fonctions périodiques, l'analogue de $\wp(z)$ est la fonction $\frac{1}{\sin^2 z}$ qui admet également en ses périodes $T=n\pi$ des pôles doubles de parties principales $\frac{1}{(z-T)^2}$. Par analogie avec la fonction

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}-\int_0^z\left(\frac{1}{\sin^2 z}-\frac{1}{z^2}\right)dz\,; \qquad (\operatorname{ctg} z)'=-\frac{1}{\sin^2 z}\,,$$

Weierstrass a introduit la fonction $\zeta(z)$ (la «*fonction dzéta*») par la relation

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\int_0^z\left(\wp(z)-\frac{1}{z^2}\right)dz\,; \qquad \zeta'(z)=-\wp(z). \qquad (18)$$

Remplaçant $\wp(z)$ par sa décomposition (6) en éléments simples et intégrant, nous obtenons:

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum{}'\left(\frac{1}{z-T}+\frac{1}{T}+\frac{z}{T^2}\right). \qquad (19)$$

La fonction dzéta est impaire. En effet,

$$[\zeta(z)+\zeta(-z)]'=\zeta'(z)-\zeta'(-z)=\wp(-z)-\wp(z)=0$$

pour tous les z, donc, $\zeta(z)+\zeta(-z)=C$. Faisant tendre z vers zéro, nous trouvons des formules (18) que $C=0$ et $\zeta(-z)=-\zeta(z)$.

La fonction $\zeta(z)$ admet des pôles simples aux périodes T et ne peut donc être elliptique (n° 101). Cependant, lorsque la variable varie d'une quantité égale à la période, cette fonction ne varie que d'un terme constant; en effet, par exemple,

$$\{\zeta(z+\tau)-\zeta(z)\}'=\wp(z)-\wp(z+\tau)=0$$

pour tout z, et on a une relation analogue pour τ', donc:

$$\zeta(z+\tau)-\zeta(z)=\delta, \quad \zeta(z+\tau')-\zeta(z)=\delta'. \qquad (20)$$

Il existe une relation simple entre les quantités τ, τ' et δ, δ'. Pour la trouver, intégrons $\zeta(z)$ suivant le contour du parallélogramme de sommets $\pm\frac{\tau}{2}$, $\pm\frac{\tau'}{2}$. Puisque cette fonction admet à l'intérieur du parallélogramme l'unique pôle $z=0$ de résidu 1,

cette intégrale est donc égale à $2\pi i$. D'autre part, en réunissant les intégrales relatives aux côtés opposés du parallélogramme et en tenant compte des relations (20), nous trouvons que cette intégrale est égale à $\delta\tau' - \delta'\tau$. Ainsi,

$$\delta\tau' - \delta'\tau = 2\pi i. \tag{21}$$

Cette relation a été obtenue par *Legendre*.

Par analogie avec la fonction

$$\sin z = ze^{\int_0^z \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}\right) dz} \quad ; \quad (\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z$$

introduisons la fonction $\sigma(z)$, la « *fonction sigma* » de Weierstrass :

$$\sigma(z) = ze^{\int_0^z \left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) dz} \quad ; \quad \{\ln \sigma(z)\}' = \zeta(z). \tag{22}$$

Portant dans (22) la décomposition (19) de $\zeta(z)$, intégrant terme à terme et se débarrassant des logarithmes, nous trouvons la représentantation de $\sigma(z)$ sous la forme d'un produit infini

$$\sigma(z) = ze^{\sum' \ln\left(1 - \frac{z}{T}\right) + \frac{z}{T} + \frac{z^2}{2T^2}} = z\Pi'\left(1 - \frac{z}{T}\right) e^{\frac{z}{T} + \frac{z^2}{2T^2}}. \tag{23}$$

On voit de cette représentation que $\sigma(z)$ est une fonction entière à zéros simples aux points $z = T$. Elle est impaire car (22), tenant compte de ce que $\zeta(z)$ est impaire, entraîne

$$\sigma(-z) = -ze^{\int_0^{-z} \left\{\zeta(u) - \frac{1}{u}\right\} du} = -ze^{\int_0^z \left\{\zeta(v) - \frac{1}{v}\right\} dv} = -\sigma(z)$$

(nous avons fait le changement de variable $u = -v$). Des relations (22) et (20) nous trouvons :

$$\frac{\sigma'(z+\tau)}{\sigma(z+\tau)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \delta;$$

intégrant et se débarrassant des logarithmes, nous avons :

$$\sigma(z+\tau) = \sigma(z)\, e^{\delta z + \nu}.$$

Faisant ici $z = -\frac{\tau}{2}$ et tenant compte de ce que $\sigma(z)$ est impaire, nous obtenons $-1 = e^{-\delta\frac{\tau}{2} + \nu}$, d'où $e^{\nu} = -e^{\delta\frac{\tau}{2}}$ et

$$\sigma(z+\tau) = -\sigma(z)\, e^{\delta\left(z + \frac{\tau}{2}\right)}. \tag{24}$$

Ainsi, lorsqu'on fait varier la variable d'une quantité égale à la période τ, le facteur exponentiel $-e^{\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)}$ apparaît dans la fonction $\sigma(z)$ (la même chose est vraie pour τ').

En plus de la fonction $\sigma(z)$, on introduit encore trois *fonctions sigma* :

$$\sigma_1(z) = -\frac{e^{\delta z}}{\sigma\left(\frac{\tau}{2}\right)}\sigma\left(z-\frac{\tau}{2}\right); \quad \sigma_2(z) = -\frac{e^{\delta' z}}{\sigma\left(\frac{\tau'}{2}\right)}\sigma\left(z-\frac{\tau'}{2}\right);$$

$$\sigma_3(z) = -\frac{e^{\delta'' z}}{\sigma\left(\frac{\tau'}{2}\right)}\sigma\left(z-\frac{\tau''}{2}\right), \tag{25}$$

où $\tau'' = \tau + \tau'$ et δ'' est la constante δ des formules (20) et (24) qui correspond à cette période (le signe moins est introduit afin que l'on ait $\sigma_k(0) = 1$, la numération est traditionnelle).

Pour terminer, démontrons le théorème suivant :

T h é o r è m e. *Toute fonction elliptique $f(z)$ d'ordre n, de zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et de pôles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ dans un parallélogramme des périodes (chacun étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité l'indique), peut être exprimée par la fonction σ*

$$f(z) = C\frac{\sigma(z-\widetilde{\alpha}_1)\,\sigma(z-\alpha_2)\ldots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\,\sigma(z-\beta_2)\ldots\sigma(z-\beta_n)}, \tag{26}$$

où C est une constante et

$$\widetilde{\alpha}_1 = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) - (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n). \tag{27}$$

En effet, puisque, en vertu du théorème 5 du n° 101,

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) \equiv 0 \pmod{\tau, \tau'},$$

nous avons $\widetilde{\alpha}_1 \equiv \alpha_1 \pmod{\tau, \tau'}$. Considérons maintenant la fonction

$$g(z) = \frac{\sigma(z-\widetilde{\alpha}_1)\,\sigma(z-\alpha_2)\ldots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\,\sigma(z-\beta_2)\ldots\sigma(z-\beta_n)};$$

elle admet les périodes τ et τ', car, d'après la formule (24), tenant compte de ce que σ est impaire, nous obtenons, par exemple :

$$g(z+\tau) = e^{\delta(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n-\widetilde{\alpha}_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n)}g(z) = g(z).$$

En outre, le rapport $\frac{f(z)}{g(z)}$ dans un parallélogramme des périodes n'a pas de pôles, car chaque pôle du numérateur est un pôle de même ordre de multiplicité pour le dénominateur et chaque zéro du dénominateur est un zéro de même ordre de multiplicité pour le numérateur (nous tenons compte de ce que $\widetilde{\alpha}_1 \equiv \alpha_1 \pmod{\tau, \tau'}$). Ainsi, d'après le théorème 2 du n° 101, ce rapport est constant et nous obtenons la formule (26) que nous voulions établir.

La formule (26) est analogue à la représentation d'une fonction rationnelle sous forme de rapport de deux polynômes décomposés en produits de facteurs linéaires. De la même manière, on démontre

le théorème analogue au théorème de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples : *si dans le parallélogramme fondamental* $f(z)$ *admet les pôles* $z = \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *de parties principales*

$$g_k(z) = \frac{c_{k1}}{z-\beta_k} + \frac{c_{k2}}{(z-\beta_k)^2} + \ldots + \frac{c_{kn_k}}{(z-\beta_k)^{n_k}}, \tag{28}$$

alors

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^{m} \left\{ c_{k1}\zeta(z-\beta_k) - c_{k2}\zeta'(z-\beta_k) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n_k-1} \frac{c_{kn_k}}{(n_k-1)!} \zeta^{(n_k-1)}(z-\beta_k) \right\}. \tag{29}$$

3) Fonctions thêta de Jacobi. Pour les calculs numériques des fonctions elliptiques, il est commode d'utiliser leurs expressions qui sont données par des séries qui convergent rapidement, or, tous les développements que nous avons considérés jusqu'à présent convergent très lentement. Cette lacune est comblée par les fonctions thêta de Jacobi qui sont représentées par des séries qui convergent rapidement et à l'aide desquelles on peut exprimer toutes les fonctions elliptiques.

Reportons-nous à la formule (24) et remarquons qu'il est facile de trouver une fonction entière telle qu'un facteur identique à celui de $\sigma(z)$ apparaît lorsque la variable varie d'une quantité égale à la période, à savoir

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{2\tau}(\delta z^2 - 2\pi i z)}. \tag{30}$$

En effet, nous avons

$$\varphi(z+\tau) = -e^{\frac{1}{2\tau}(\delta z^2 - 2\pi i z)} e^{\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)} = -\varphi(z)\, e^{\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)}.$$

Posons $\psi(z) = \dfrac{\sigma(z)}{\varphi(z)}$; il est clair que c'est une fonction entière car φ et σ sont des fonctions entières et $\varphi(z) \neq 0$.

En vertu de (24) et d'une relation analogue pour la période τ', nous avons donc :

$$\psi(z+\tau) = \psi(z),$$
$$\psi(z+\tau') = -\psi(z)\, e^{\frac{\delta'\tau - \delta\tau'}{\tau}\left(z+\frac{\tau'}{2}\right) + \pi i \frac{\tau'}{\tau}} = -\psi(z)\, e^{-\frac{2\pi i z}{\tau}} \tag{31}$$

(nous avons tenu compte de la relation (21) de Legendre). La première formule (31) exprime la périodicité de $\psi(z)$.

D'après le théorème 4 du n° 100, la fonction entière périodique $\psi(z)$ peut être représentée par sa série de Fourier dans tout le plan des z

$$\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega z}, \tag{32}$$

où $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. Pour déterminer ses coefficients, nous avons recours à la deuxième relation (31) et au théorème d'unicité des développements en série de Fourier qui, dans notre cas, découle du théorème correspondant pour les séries de Laurent. Remplaçant dans (32) z par $z + \tau'$, nous obtenons:

$$\psi(z+\tau') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k q^{2k} e^{ik\omega z}, \quad q = e^{\frac{i\omega\tau'}{2}} = e^{i\pi\frac{\tau'}{\tau}}, \tag{33}$$

d'où, en tenant compte de la relation (31), nous trouvons

$$\psi(z) = -e^{-i\omega z}\psi(z+\tau') = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k q^{2k} e^{i(k+1)\omega z}.$$

Comparant ce développement au développement (32), d'après le théorème d'unicité, nous avons:

$$c_{k+1} = -c_k q^{2k} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Notant pour plus de commodité le coefficient $c_0 = Cq^{\frac{1}{4}}$, où C est une constante, nous avons successivement:

$$c_1 = -Cq^{\frac{1}{4}}, \quad c_2 = Cq^{\frac{9}{4}} = Cq^{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}, \quad c_3 = -Cq^{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2},$$

et en général

$$c_k = (-1)^k Cq^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{34}$$

(on vérifie par récurrence que la formule (33) est vraie). Portant ces dernières relations dans le développement (32), nous obtenons:

$$\psi(z) = Ce^{\frac{i\omega z}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega z}. \tag{35}$$

La fonction $\psi(z)$ diffère fort peu d'une des *fonctions thêta de Jacobi*, soit par définition

$$\vartheta_1(z) = \frac{i}{C} e^{-i\pi z}\psi(\tau z) = i\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i z}. \tag{36}$$

Tenant compte de ce que $\sigma(z) = \psi(z)\varphi(z)$ et des formules (36) et (30), nous trouvons l'expression de la fonction sigma de Weierstrass en fonction de ϑ_1:

$$\sigma(z) = -iCe^{\frac{\delta z^2}{2\tau}}\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\right).$$

Pour déterminer la constante C qui participe dans cette formule, dérivons cette formule par rapport à z au point $z = 0$ et, tenant

compte de ce que, d'après (23), $\sigma'(0)=1$, nous obtenons $1=-iC\frac{\vartheta_1'(0)}{\tau}$, d'où

$$\sigma(z)=\frac{\tau e^{\frac{\delta z^2}{2\tau}}}{\vartheta_1'(0)}\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\right). \tag{37}$$

Tenant compte des propriétés connues de $\sigma(z)$, nous pouvons maintenant affirmer que $\vartheta_1(z)$ est une fonction entière impaire, périodique (*) de période 2 et de zéros simples aux points $z=n+n'\frac{\tau'}{\tau}$.

Puisque par hypothèse $\operatorname{Im}\frac{\tau'}{\tau}>0$, nous trouvons de (33) $|q|=e^{-\pi\operatorname{Im}\frac{\tau'}{\tau}}<1$, donc, la série (36) pour $\vartheta_1(z)$ converge rapidement grâce à la présence du facteur $q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}$. D'autre part, puisque σ s'exprime en fonction de ϑ_1 et, comme nous le savons, toute fonction elliptique en fonction de σ, toute fonction elliptique s'exprime par ϑ_1. Ainsi, la fonction thêta comble réellement cette lacune dont il a été question au début de 3).

Outre $\vartheta_1(z)$, on introduit encore trois *fonctions thêta de Jacobi*:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_2(z)&=\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2k-1)\pi iz},\\
\vartheta_3(z)&=q^{\frac{1}{4}}e^{\pi iz}\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}e^{2k\pi iz},\\
\vartheta_4(z)&=\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}e^{2k\pi iz}.
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Elles sont toutes des fonctions entières paires; $\vartheta_2(z)$ admet la période 2 et $\vartheta_3(z)$ et $\vartheta_4(z)$ la période 1. Les fonctions σ_k de Weierstrass s'expriment en fonction de ces dernières par des formules qui ne diffèrent de la formule (37) que par le fait que l'on a remplacé σ du premier membre par σ_k, puis ϑ_1 et ϑ_1' dans le second membre par les fonctions ϑ_{k+1} et ϑ_{k+1}'.

Comme on l'a démontré plus haut, toute fonction elliptique s'exprime par la fonction thêta. Donnons sans démonstration de

(*) Il est facile de voir de (36) que $\vartheta_1(z)$ admet la période 2; on voit aussi que $\vartheta_1(z+1)=-\vartheta_1(z)$.

telles expressions pour les fonctions elliptiques de Jacobi :

$$\operatorname{sn} z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{z}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2k}\right)}; \quad \operatorname{cn} z = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{z}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2k}\right)}; \quad \operatorname{dn} z = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3\left(\frac{z}{2k}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2k}\right)}. \tag{39}$$

Ici, la constante q qui participe dans la définition de la fonction thêta doit être choisie non pas sous la forme $e^{i\pi \frac{\tau'}{\tau}}$ mais sous la forme $e^{-\pi \frac{k'}{k}}$, ce qui coïncide avec la formule (33) du n° 102. Les quantités K et k de la théorie des fonctions de Jacobi s'expriment aussi par les fonctions thêta comme suit

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0); \quad k = \left\{\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right\}^2 \tag{40}$$

(elles coïncident avec les formules (34) du n° 102). On trouve l'établissement des formules (39) et (40), par exemple, dans le livre de N. Akhiezer [11], pp. 92-95.

104. Exemples. Applications. 1) Le calcul de la longueur d'arc de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ conduit aux intégrales elliptiques. En effet, la longueur d'arc de courbe qui correspond à la variation de l'abscisse de 0 à x est égale à :

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a \int_0^{\frac{x}{a}} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt, \tag{1}$$

où $t = \frac{x}{a}$ et $k' = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. C'est une intégrale elliptique de seconde espèce sous forme de Legendre (cf. (2) du n° 102). La longueur totale de l'ellipse s'exprime par l'intégrale elliptique complète

$$l = 4a \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt = 4a\, E(k). \tag{2}$$

C'est de cette circonstance que vient l'appellation d'intégrales elliptiques et de leurs inverses, les fonctions elliptiques.

2) Les coordonnées elliptiques sont également attachées aux fonctions elliptiques. Pour les introduire, considérons l'équation

$$\frac{x^2}{\rho - a^2} + \frac{y^2}{\rho - b^2} + \frac{z^2}{\rho - c^2} - 1 = 0; \tag{3}$$

elle est du troisième degré et a pour x, y et z fixes trois racines réelles λ, μ et ν qui vérifient les inégalités

$$\lambda > a^2 > \mu > b^2 > \nu > c^2.$$

Ces racines sont les *coordonnées elliptiques* du point (x, y, z). Le système de coordonnées (λ, μ, ν) est orthogonal, car les surfaces $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ et $\nu = \text{const}$ sont respectivement un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes homofocaux, c'est-à-dire des surfaces orthogonales (fig. 226).

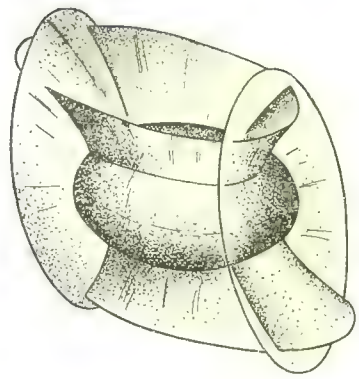

FIG. 226

Il n'est pas difficile d'établir les formules qui expriment les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées elliptiques (*)

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda-a^2)(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(\lambda-b^2)(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z^2 &= \frac{(\lambda-c^2)(\mu-c^2)(\nu-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Remarquons encore que, comme cela est démontré dans les cours d'analyse vectorielle, l'équation de Laplace en coordonnées elliptiques a la forme:

$$\frac{\mu-\nu}{\Pi_\mu\Pi_\nu}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\Pi_\lambda\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)+\frac{\nu-\lambda}{\Pi_\nu\Pi_\lambda}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\Pi_\mu\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+\frac{\lambda-\mu}{\Pi_\lambda\Pi_\mu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Pi_\nu\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)=0, \quad (5)$$

où

$$\Pi_\rho = \sqrt{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)}, \quad (6)$$

et Π_λ, ... s'obtiennent respectivement en remplaçant ρ par λ, ...

A la place des coordonnées elliptiques λ, μ, ν, on introduit encore d'autres coordonnées α, β, γ reliées aux coordonnées elliptiques à l'aide de la fonction $\wp$ de Weierstrass. On le fait le plus facilement en introduisant à la place de ρ la variable σ d'après la formule

$$\rho = \wp(\sigma) + A, \quad (7)$$

où A est une constante. Désignons par e_1, e_2 et e_3 les racines du polynôme que l'on obtient si on remplace ρ par (7) dans l'expression de Π_ρ^2; alors

$$\Pi_\rho^2 = (\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2) = \{\wp(\sigma)-e_1\}\{\wp(\sigma)-e_2\}\{\wp(\sigma)-e_3\}.$$

(*) Pour cela, il suffit de réduire le premier membre de (3) au même dénominateur et, remarquant que le numérateur est un polynôme du troisième degré en ρ où le coefficient de ρ^3 est -1, le décomposer en facteurs linéaires

$$\frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=-\frac{(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)}.$$

Pour obtenir (4), il faut multiplier les deux membres respectivement par $(\rho-a^2)$, $(\rho-b^2)$, $(\rho-c^2)$ et poser $\rho = a^2, b^2, c^2$.

On voit que pour $\rho = a^2$, b^2, c^2 on a respectivement $\wp(\sigma) = e_1$, e_2, e_3. En portant dans (7), nous trouvons : $a^2 = e_1 + A$, $b^2 = e_2 + A$, $c^2 = e_3 + A$, d'où par addition nous avons

$$A = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Les nouvelles coordonnées α, β, γ sont définies comme les valeurs de σ que l'on obtient quand on fait $\rho = \lambda$, μ, ν dans (7) :

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \wp(\alpha) + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \\ \mu &= \wp(\beta) + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \\ \nu &= \wp(\gamma) + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

D'où nous obtenons :

$$\lambda - a^2 = \wp(\alpha) + A - a^2 = \wp(\alpha) - e_1,$$

et des expressions analogues pour les autres différences. Portant dans (4), nous trouvons les formules de passage des coordonnées (α, β, γ) aux coordonnées cartésiennes :

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{\{\wp(\alpha) - e_1\}\{\wp(\beta) - e_1\}\{\wp(\gamma) - e_1\}}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \\ y^2 &= \frac{\{\wp(\alpha) - e_2\}\{\wp(\beta) - e_2\}\{\wp(\gamma) - e_2\}}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 &= \frac{\{\wp(\alpha) - e_3\}\{\wp(\beta) - e_3\}\{\wp(\gamma) - e_3\}}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Il est intéressant de remarquer que, d'après la formule (14) du n° 103, les seconds membres des expressions (9) sont les carrés de fonctions uniformes, donc, x, y et z sont des fonctions analytiques uniformes des coordonnées α, β, γ.

Puis, de (8) et de l'équation différentielle (13) du n° 103 pour la fonction $\wp$ nous trouvons :

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{\Pi_\lambda}, \qquad \frac{d\beta}{d\mu} = \frac{1}{\Pi_\mu}, \qquad \frac{d\gamma}{d\nu} = \frac{1}{\Pi_\nu},$$

donc, par exemple, $\Pi_\lambda \dfrac{\partial}{\partial\lambda} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}$ et l'équation de Laplace par rapport aux nouvelles coordonnées (si l'on remplace les différences $(\mu - \nu)$ . . . selon les formules (8)) prend la forme :

$$\{\wp(\gamma) - \wp(\beta)\}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \{\wp(\alpha) - \wp(\gamma)\}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \{\wp(\beta) - \wp(\alpha)\}\frac{\partial^2 u}{\partial\gamma^2} = 0. \tag{10}$$

3) Par définition, le coefficient d'induction mutuelle de deux courants circulaires est

$$M = \int_C \int_{C'} \frac{\cos(PT, P'T')}{PP'}\, dl\, dl' = aa' \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi' - \varphi)}{r}\, d\varphi\, d\varphi',$$

où le sens des notations est clair d'après la fig. 227. Désignons par Q la projection du point P' sur le plan inférieur (non indiquée sur la fig. 227); alors,

$$r = \sqrt{P'Q^2 + PQ^2} = \sqrt{b^2 + a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\varphi' - \varphi)}.$$

Introduisons à la place de φ' la nouvelle variable $\tau = \varphi' - \varphi + \pi$; alors, remplaçant encore, d'après une propriété bien connue des intégrales de fonctions périodiques, les limites d'intégration par rapport à τ, qui sont égales à $\pi - \varphi$ et à $3\pi - \varphi$, par 0 et 2π, nous obtenons:

$$M = aa' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\tau - \pi)}{r}\, d\tau = -4aa'\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos\tau\, d\tau}{\sqrt{a^2 + a'^2 + b^2 + 2aa'\cos\tau}}$$

ou encore, par le changement de variable $\tau = 2t$,

$$M = -8\pi aa' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2 t - 1)\, dt}{\sqrt{(a+a')^2 - b^2 - 4aa'\sin^2 t}}.$$

Si l'on pose

$$k = \frac{2\sqrt{aa'}}{\sqrt{(a+a')^2 + b^2}},$$

nous obtenons alors:

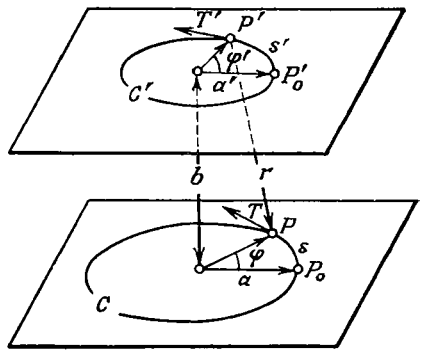

FIG. 227

$$M = 4\pi\sqrt{(a+a')^2 + b^2}\left\{-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\, dt + \frac{1+k'^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}}\right\} =$$

$$= 4\pi\sqrt{(a+a')^2 + b^2}\left\{\frac{1+k'^2}{2}K - E\right\}. \qquad (11)$$

4) Représentation conforme du demi-plan supérieur sur un rectangle donné. Nous avons étudié (no 39) la transformation du demi-plan supérieur $\operatorname{Im} w > 0$ sur un rectangle du plan des z dont les côtés sont déterminés par le choix du paramètre k de la fonction elliptique de Jacobi. Ici, nous supposons que le rectangle de côtés a et b est arbitraire mais disposé de manière que ses sommets coïncident avec les points $\pm\frac{a}{2}$ et $\pm\frac{a}{2} + ib$. La transformation que nous cherchons est donnée par la fonction

$$z = C\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \qquad (12)$$

en outre, pour déterminer les paramètres k et C, nous avons deux équations (cf. (1) et (2) du n° 39) :

$$\left.\begin{aligned} a &= 2C\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2CK(k), \\ b &= C\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = CK(k'). \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

De ces équations nous trouvons d'abord :

$$\frac{2b}{a} = \frac{K(k')}{K(k)} = \varkappa\,; \qquad q = e^{-\pi\varkappa} = e^{-\frac{2\pi b}{a}},$$

puis, connaissant q nous trouvons k^2 d'après la fig. 223 ou dans les Tables de Jahnke et Emde ou encore d'après la seconde formule (34) du n° 102. Connaissant k, nous trouvons K dans les tables des intégrales elliptiques complètes

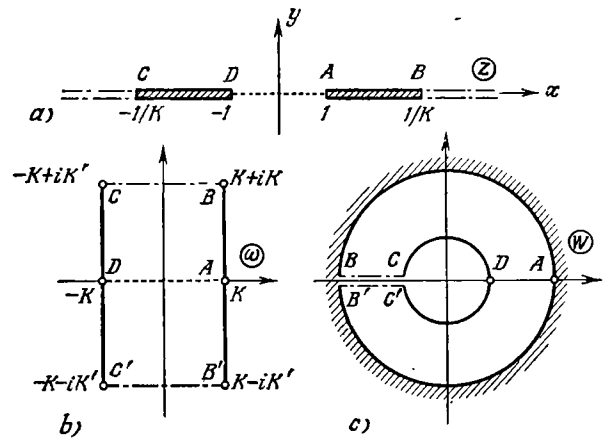

FIG. 228

ou directement d'après q à l'aide de la première formule (34). Enfin, connaissant K et a nous déterminons C d'après la première formule (13).

Comme exemple, considérons la transformation du demi-plan supérieur sur le carré de côtés $a = b = 1$. Nous avons $\varkappa = 2$, donc, $q = e^{-2\pi} \approx 0{,}00187$, $\log q = \bar{3}{,}27184$; $\alpha = 9°53'$ (cf. [14] S. 50), $K = 1{,}5825$ (cf. [14] S. 86). Ainsi, $C = \frac{a}{2K} = 0{,}3159$, $k^2 = \sin^2\alpha = 0{,}2945$ et la transformation que nous cherchons est

$$z = 0{,}3159\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-0{,}2945w^2)}}. \qquad (14)$$

5) Représentation conforme du plan muni de entes sur une couronne circulaire (fig. 228). Considé-

rons d'abord la transformation

$$z = \operatorname{sn}(\omega; k) \tag{15}$$

du demi-plan supérieur des z sur le rectangle de sommets $\pm K$, $\pm K + iK'$. Prolongeant la transformation (15) à travers le segment AD, nous obtenons la transformation du plan des z coupé suivant les demi-droites $|z| > 1$, $y = 0$, sur un rectangle deux fois plus grand du plan des $\omega = \xi + i\eta$. La fonction $w = e^{\frac{\pi}{K'}\omega}$ transforme ce rectangle sur la couronne circulaire $e^{-\pi\frac{K}{K'}} < |w| < e^{\pi\frac{K}{K'}}$, de plus, les points $\xi \pm iK'$ coïncident. Mais ceci signifie que la fonction composée

$$w = e^{\frac{\pi}{K'}\omega} = e^{\frac{\pi}{K'}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}} \tag{16}$$

réalise la représentation conforme que nous cherchons. Le segment de droite AB a pour image la circonférence extérieure de la couronne et celui de gauche CD la circonférence intérieure.

6) Représentation conforme du demi-plan supérieur sur le domaine de la fig. 229. Supposons que les points $z = 0$, 1, ∞ aient respectivement pour images les points $w = 0$, D, ∞ ; alors la fonction qui réalise la représentation conforme que nous cherchons s'écrit sous la forme de l'intégrale de Schwarz-Christoffel (n° 37) :

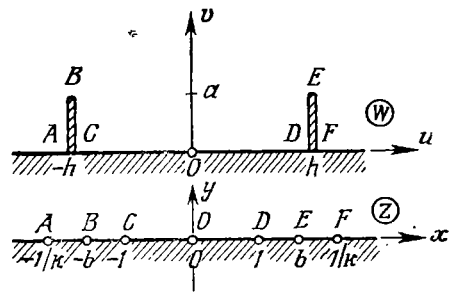

FIG. 229

$$w = C_1 \int_0^z \frac{z^2 - b^2}{\sqrt{(z^2-1)\left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right)}}\, dz,$$

où $C_1 > 0$, $b > 1$ et $\frac{1}{k} > 1$ sont des constantes à déterminer. Après de simples transformations, cette intégrale s'écrit sous la forme d'une combinaison des intégrales elliptiques de première et deuxième espèces :

$$w = C\left\{(k^2b^2 - 1)\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz\right\}, \tag{17}$$

où C est une constante positive. Pour déterminer les constantes, nous tenons compte de la correspondance des points $z = 1$, $w = h$; $z = \frac{1}{k}$, $w = h$ et $z = b$, $w = h + ia$. De la correspondance du premier couple de points, nous obtenons :

$$h = C\{(k^2b^2 - 1)K + E\}, \tag{18}$$

où K et E sont les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèces qui correspondent au module k (cf. n° 102). De la correspondance du deuxième couple de points, tenant compte de la relation (18), nous obtenons :

$$0 = (k^2b^2 - 1)K' + E_1 = k^2b^2K' - E', \tag{19}$$

où $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$ (cf. n°102) et

$$E_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{t^2-1}}\, dt = K' - E' \tag{20}$$

avec $E' = E(k')$ (pour vérifier cette dernière égalité, il suffit de faire le changement de variable $t = \frac{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}{k}$ dans l'intégrale). Enfin, la correspondance du troisième couple de points, en tenant compte de (18) et après avoir ramené les intégrales elliptiques aux intégrales dont les limites sont inférieures à l'unité (on y arrive à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}$ dans l'intégrale de première espèce et le changement de variable indiqué dans les parenthèses précédentes pour l'intégrale de deuxième espèce), donne :

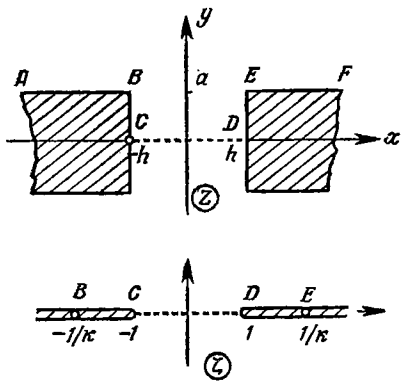

FIG. 230

$$a = C\{(k^2b^2 - 1)\, F(\alpha', k') + K' - F(\alpha'', k') + F(\alpha'', k')\}, \tag{21}$$

où $\sin \alpha' = \frac{1}{bk'}\sqrt{b^2-1}$, $\sin \alpha'' = \frac{1}{k^2}\sqrt{1-k^2b^2}$. On peut donner les valeurs approchées des inconnues k, b et C à l'aide des formules (18), (19) et (21).

7) Champ électrostatique de deux pôles rectangulaires (fig. 230). Transformons d'une manière conforme le demi-plan supérieur des ζ sur la moitié supérieure du champ avec la correspondance des points indiquée sur la fig. 230. L'intégrale de Schwarz-Christoffel est de la forme :

$$z = C\int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{1-k^2\zeta^2}{1-\zeta^2}}\, d\zeta, \tag{22}$$

c est-à-dire que c'est une intégrale elliptique de deuxième espèce. De la correspondance des points $z = 1$, $w = h$ et $z = \frac{1}{k}$, $w = h + ia$, comme dans l'exemple précédent, nous trouvons :

$$h = CE(k), \qquad a = C\{K(k') - E(k')\}. \tag{23}$$

D'où, en divisant l'une des équations par l'autre, nous obtenons une relation qui permet de déterminer le module k, puis, ayant déterminé k de (23), nous trouvons C.

D'après le principe de symétrie, la fonction qui donne l'inversion de l'intégrale (22) réalise la représentation de tout le domaine du champ sur le plan des ζ coupé suivant les demi-droites $|\zeta| > 1$, $\operatorname{Im}\zeta = 0$. La fonction

$$\zeta = -\sin\frac{i\pi w}{2V} = \frac{1}{i}\operatorname{sh}\frac{\pi w}{2V} \tag{24}$$

réalise la représentation de la bande $-V < \operatorname{Im} w < V$ sur le plan des ζ coupé suivant les demi-droites $|\zeta| > 1$, $\operatorname{Im}\zeta = 0$, de plus, la frontière inférieure de la bande correspond à la coupure de gauche et la frontière supérieure à celle de droite.

Donc, les formules (22) et (24) donnent la représentation paramétrique du potentiel complexe du champ que l'on obtient si le potentiel du pôle de gauche est $-V$ et celui du pôle de droite V. Le vecteur intensité du champ est:

$$\overline{E} = -i\frac{dw}{dz} = -i\frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = \frac{2V}{\pi C}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\zeta^2}}. \tag{25}$$

8) Champ électrostatique d'une charge ponctuelle qui se trouve à l'intérieur d'un rectangle. Supposons que la charge de grandeur q coïncide avec le point $\zeta = \xi + i\eta$ intérieur au rectangle $0 \leqslant x \leqslant \frac{\tau}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\tau'}{2}$, à parois conductrices (fig. 231). Le potentiel du champ U est une fonction harmonique partout à l'intérieur du rectangle, excepté au point ζ, en lequel elle a une singularité de la forme $2q \ln \frac{1}{|z-\zeta|}$, et nulle sur les parois du rectangle. L'influence des parois peut être remplacée par un système de charges $\pm q$ qui s'obtient par des symétries du support de q par rapport aux parois du rectangle donné (fig. 231), ce qui est équivalent à prolonger la fonction U dans tout le plan des z.

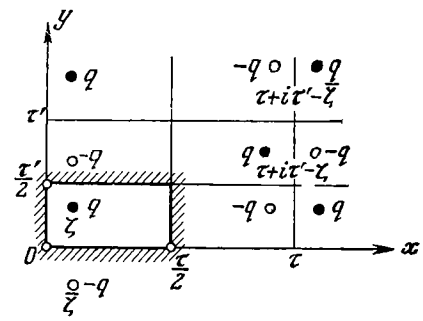

FIG. 231

Après ce prolongement, on voit que la fonction U est doublement périodique de périodes τ et τ', de plus, aux points ζ, $\tau + i\tau' - \zeta$ et à ceux qui leur sont congruents, elle a des singularités de la forme $2q \ln \frac{1}{|z-\zeta|}$ et aux points $\overline{\zeta}$, $\tau + i\tau' - \overline{\zeta}$ des singularités de la forme $2q \ln |z - \zeta|$. Soit $V(z)$ la fonction conjuguée de $U(z)$, alors

$$w = f(z) = e^{\frac{1}{2q}(U+iV)}. \tag{26}$$

est une fonction elliptique de périodes fondamentales τ et $i\tau'$ et de pôles et zéros simples, congruents respectivement à ζ, $-\zeta$ et $\overline{\zeta}$, $-\overline{\zeta}$. D'après le théorème du n° 101, la fonction $f(z)$ peut être représentée à l'aide de la fonction σ de Weierstrass:

$$f(z) = \frac{\sigma(z+\overline{\zeta})\,\sigma(z-\overline{\zeta})}{\sigma(z+\zeta)\,\sigma(z-\zeta)} \tag{27}$$

(ici, $C = 1$ en vertu du choix du facteur précédant $U + iV$ dans la formule (26)). Le potentiel du champ que nous cherchions est:

$$U(z) = 2q \operatorname{Re} \ln \frac{\sigma(z+\overline{\zeta})\,\sigma(z-\overline{\zeta})}{\sigma(z+\zeta)\,\sigma(z-\zeta)}. \tag{28}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Smirnov, Cours de mathématiques supérieures, t. III, 2e partie, Editions Mir, 1972.
[2] R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, vol. 1, Interscience Publ., New York 1953.
[3] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
[4] Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
[5] E. T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge 1952.
[6] D. Jackson, Fourier series and orthogonal polynomials, 3rd ed., Carus Mathematical Monographs, Oberlin (Ohio) 1948.
[7] G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge 1944.
[8] Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, 2. изд., ОНТИ, 1935.
[9] A. Gray and G. B. Mathews, A treatise on Bessel functions and their applications to physics, 2nd ed., MacMillan, London 1922.
[10] В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. АН СССР, 1946.
[11] Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
[12] Ю. С. Сикорский, Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
[13] А. М. Журавский, Справочник по эллиптическим функциям, Изд. АН СССР, 1941.
[14] E. Jahnke and F. Emde, Tafeln höherer Funktionen, Nachdruck d. 5. Aufl., B.G. Teubner, Leipzig 1960.
[15] A. Kratzer und W. Franz, Transzendente Funktionen, 2. Aufl., Lpz. 1963.

Index

Addition des nombres complexes 11
Angle
  modulaire 691
  au point à l'infini 133
Arc
  de courbe analytique 163
  — de Liapounov 115
Argument
  d'une dérivée 10
  d'un nombre comp exe 13
Arrondissement
  des angles inférieurs à π 193
  — supérieurs à π 195
Axe
  imaginaire 12
  réel 12

Champ électrostatique 253
  au voisinage des bords d'un condensateur plan 268
Champ magnétique
  de courants électriques 256
  dans une machine électrique 270
Champ thermique 250
Champ vectoriel 237-242
  à circulation 240
  indivergentiel (solénoïdal) 239
  irrotationnel (potentiel) 270
  plan 237
  stationnaire 237
Coefficient
  d'amplification 465
  de filtration 410
  de propagation de l'onde 565
Composantes du déplacement 276
Condensateur de Rogowski 270
Condition(s)
  de Cauchy-Riemann 16, 21
  — en coordonnées polaires 23
  — généralisées 23
  de Hölder 110, 290
  d'isentropie 337
  d'orthogonalité 108
  de Stodola 463
  de Tchaplyguine 266
Connexité 16
Constante
  cyclique 52, 203
  d'Euler 588
Continuité
  d'une fonction 20
  propriétés 20, 21
  uniforme 20
Contrainte(s) 275
  normales 276
  représentation complexe 281
  tangentielles 276
Convergence uniforme 58
  d'une suite de fonctions 58
Convolution des fonctions 511

Corps isotrope 277
Cosinus
  amplitudinus 695
  intégral 420
Courbe
  une fois continûment différentiable par morceau 16
  isotherme 251
  simple 51
Critère
  de Hurwitz 459
  de Nyquist-Mikhaïlov 465
  de stabilité 464

Déformation 276
  composantes 276
  d'un contour 362
Dérivée(s)
  lorgarithmique 87
  d'ordres supérieurs 62
Développement asymptotique 473, 474, 778
  du produit 474
  règle de la dérivation terme à terme 475
  — de l'intégration terme à terme 457
  de la somme 474
Développement de Taylor des fonctions élémentaires 67
Dictionnaires d'images 533-536
Divergence 238
Division
  des nombres complexes 11
  des séries entières 422
Domaine 16
  borné 17
  étoilé 362
  fermé 16
  multiplement connexe 17
  simplement connexe 17
Doublet (dipôle) 244
  ponctuel 244

Ecoulement
  adiabatique 337
  autour d'un profil 266
  — des profils Joukovski 267
  — d'un segment de droite 271
  sans circulation 258
  d'un gaz autour d'un corps 336
Effet de la charge creuse 342
Eléments simples 428
Ensemble
  de détermination 17
  ouvert 16
  de variation d'une fonction 17
Equation(s)
  de continuité 336
  différentielles du type mixte 328
  aux dérivées partielles 317
  — —, système de Carleman 317

Equation (s)
de l'hodographe 341
hypergéométrique 629
de Laplace 201
d'onde 630
opérationnelle 537
Expression asymptotique
de la deuxième fonction de Hankel 655
de la fonction de Bessel 488
— gamma d'Euler 484
— de Weber 656
des polynômes de Legendre 490, 623
de la première fonction de Hankel 655
Extraction de racine des nombres complexes 12

Flux d'un champ vectoriel 238
Fonction(s)
analytique 22, 96
— complète 96
—, théorème d'unicité 72
de Bessel 632 (voir également Fonctions cylindriques)
bêta d'Euler 583, 594 et suivantes
— —, prolongement analytique 595
biharmonique 278
composée 18
continue 20
—, propriétés 20
des contraintes 278
de courant 239, 336
de courant thermique 250
cylindriques 421, 632, 633—644, 646, 647
—, fonction génératrice 638
—, formules asymptotiques 488, 653, 656
—, relations de récurrence 639
—, représentation sous forme de série 637
—, —intégrale 633
dérivée 20
—, interprétation géométrique 109
différentiable 21
doublement périodiques 681
dzéta de Weierstrass 706
échelon unité 496
elliptiques 681, 684
— de Jacobi 185, 692, 696, 709
—, ordre 685
—, propriétés 684
— sigma de Weierstrass 706
— thêta de Jacobi 709
— de Weierstrass 702
entière 82
d'erreur 419
exponentielle 23, 31
— générale 42
— intégrale 476
de forces 254
frontière 114
gamma 455, 480, 584
—, deuxième équation fonctionnelle 589
— d'Euler 480, 584, 587
—, formule asymptotique 484, 594
—, propriétés 588—594
—, représentation intégrale 456, 594
—, troisième équation fonctionnelle 599
génératrice 489, 618, 638
de Green 223
de Hankel 644, 646
harmoniques 201—215
—, problème mixte 315
—, prolongement analytique 215
—, propriétés 206-215
homographique 128
hyperboliques 39

Fonction (s)
impulsion 529
— d'ordre zéro 530
— du premier ordre 532
inverse 18
de Joukovski 24, 28
de Legendre 625
— associées 628
— de deuxième espèce 627
— de première espèce 626
linéaire 18
logarithmique 31
méromorphe 83, 427
multiforme d'une variable complexe 17
de Neumann 648
d'ordre fini 439
orthogonale 601
— par rapport à un poids 605
périodiques 678
—, bandes des périodes 68
potentiel 241, 336
puissance générale 41
rationnelle 83, 427
régulière 22
sigma de Weierstrass 706
simplement périodique 681
spectrale 573
sphériques 627
de Tchébicheff-Hermite 630
thêta de Jacobi 709
trigonométrique 36
uniforme d'une variable complexe 17
uniformément continue 20
d'une variable complexe 17
— —, branches 24
de Weber 648
de Weierstrass 700, 702, 707
Forces
massiques 275
surfaciques 275
Forme trigonométrique d'un nombre complexe 13
Formule(s)
de Bernoulli-Euler 249
de Cauchy 54, 297
de Cauchy-Hadamard 70
de Cisotti 229
d'Euler 32, 599
de Fock 660
de Fourier-Bessel 579
généralisées de Fourier 603
d'inversion
— de Fourier 372
— de Hankel 579
— de Laplace 501
— de Mellin 577
de Joukovski 263
de Keldych-Sédov 306, 311
de Kolossov 281, 282
de Lagrange 404
de Legendre 599
d'Ostrogradski 283
de Palatini 229
de Riemann-Green 240
de Sokhotski 295
de Sonine 668
de Stirling 484
de Tchaplyguine 250

Impédance 545
caractéristique d'une ligne 566
Indice de croissance 496
Inégalité(s)
de Bouniakovsky 601
de Cauchy 63, 76

Intégrale
de Bernoulli 337
de Bessel 422
elliptique 185, 596, 690
—, amplitude 691
— complète 596
—, module 691
d'erreur 476
d'Euler 44, 446, 449, 452
de la fonction d'une variable complexe 42
—, propriétés 42, 44
de Fresnel 449
impropre 60
de Laplace 444
de Legendre 448
de Lipschitz 667
de Poisson 221, 226, 447
pseudo-elliptique 690
—, angle modulaire 691
— complète 691
de Raabe 598
de Schläfli 637
de Schwarz 224
— pour une bande 228
— pour le demi-plan 226
de Schwarz-Christoffel 181, 227
de Sonine 636, 668
de Sonine-Schläfli 636
du type Cauchy 289
Intensité
d'une source 243
d'un tourbillon 243
Inversion 15
d'une intégrale de contour 582

Lemme
de Jordan 442
de Schwarz 57
Ligne(s)
de courant 239, 241
de niveau 212, 362
de plus grande pente 486
Limite d'une fonction 19
Loi de Hooke 277

Méthode
du col 472
de Darboux 490
des fonctions génératrices 489
des fragments 412
de Heaviside 494
de Janzen-Rayleigh 338
opérationnelle 495
— de calcul des circuits électriques 544
—, propriétés 505-513
—, relations limites 521
— de résolution des équations différentielles 553
—, théorèmes de développement 516
des réseaux 233
de Tchaplyguine 340
des transformations intégrales 491
de la transformation successive 415
de Vychnégradski 467
de Vychnégradski-Nyquist 467
Module
complémentaire 693
d'une dérivée 109
d'une intégrale elliptique 691
d'un nombre complexe 13
Mouvement d'un fluide sous l'action de la force de pesanteur 573

Multipôle 249
Nombres complexes 10
sous forme exponentielle 33
interprétation géométrique 12

Onde
longue 404, 405
période 404
de petite amplitude 403
solitaire 406
Opérations sur les nombres complexes 11, 12
Ordre
de connexion 17
d'une fonction entière 439
de multiplicité d'un point 17
d'un pôle 79
d'un zéro 72
Original 496
propriétés 505-510
relations limites 52
«singulier» 523

Parallélogramme des périodes 684
Période(s)
d'une fonction 679
fondamentale d'une fonction 681
de l'intégrale 52
de l'onde 405
Plan
fermé 90
ouvert 90
Point(s)
algébrique 98
de branchement 28, 97
critiques du courant 249
exceptionnels 471
frontière 16
de fuite du courant 265
à l'infini 89
intérieur 73
méplats 485
multiple 17, 208
de plus grande déformation 362, 371
de ramification 28, 97
— du courant 265
selles 485
simple 17, 207
singulier 78, 97
— de branchement algébrique 98
— — transcendant 97
— de caractère multiforme 97
— — uniforme 97
— éliminable 78, 79, 211
— essentiel 78, 212
— isolé 78, 97
— — à l'infini 90
transcendant 98
Pôle 78
Polynôme(s)
de Jacobi 610
de Legendre 420, 609
—, formules asymptotiques 623
—, — de récurrence 621
—, représentations intégrales 621-622
orthogonaux 600-632
de Tchébicheff 414, 610
—, propriété extrémale 629
de Tchébicheff-Hermite 610
de Tchébicheff-Laguerre 610
Portance d'une aile d'avion 250

Potentiel 201
d'un champ 241
— engendré par un disque plan 580
complexe d'un champ 238, 241
de simple couche 245
Primitive 47
Principe
de la correspondance des frontières 116, 120
généralisé de l'extrémum 213
de Lindelöf 362
du maximum 55
de Montel 366
du prolongement analytique 163
— — pour une fonction harmonique 215
— continu 93
de solidification 253
variationnel 362
Problème(s)
de Bernoulli 672
d'Euler 674
de Dirichlet 216
— pour un demi-plan 225
—, formule de la solution 223
— généralisé 217
— — pour un cercle 221
aux limites de l'écoulement 257-264
— d'Hilbert-Privalov 299
— mixte 262
— de Riemann-Hilbert 312
— de la théorie de l'élasticité 282
de Neumann 230
non stationnaires 553
de Schwarz 224
de Tricomi 328
Produit
de nombres complexes 11
infini 435 et suivantes
— absolument convergent 436
—, convergence 437
—, — absolue 436
—, convergent vers zéro 436
—, propriétés 436 et suivantes
—, valeur 435
Profils Joukovski 151
Projection stéréographique 89
Prolongement analytique 92, 94, 163
d'une fonction harmonique 215
immédiat 92, 94
principe du prolongement continu 93
Puissance d'un nombre complexe 12

Rayon de convergence 70
— d'une série entière 70
Régime permanent 521
Répartition de la température dans un canal 272
Représentation complexe du déplacement 281
Résidu des fonctions 83
logarithmique 86
au pôle 585
Rotationnel d'un champ 240

Série(s)
du binôme 490
de Bürmann-Lagrange 425
entières 65, 68
— généralisées 98
—, inversion 427
—, rayon de convergence 70
—, théorème d'unicité 72
de fonctions 58
— uniformément convergente 58
de Fourier 424

Serie(s)
de Fourier-Bessel 644
généralisées de Fourier 600
hypergéométrique 630
de Laurent 73, 418
—, partie principale 76
—, partie régulière 76
de Maclaurin 66
de Taylor 66, 418
—, coefficients 418
—, convergence uniforme 66
trigonométriques 425
Sinus
amplitudinus 695
elliptique 690, 692
intégral 420
Somme des nombres complexes 11
Source de champ 238
Soustraction des nombres complexes 11
inteprétation géométrique 13
Superposition des transformations 18
Surface de Riemann 100
de l'arc sinus 101
à m feuillets 100
d'une fonction inverse de la fonction de Joukovski 101
d'une fonction logarithmique 101
de la racine 100
Symétrie par rapport à la circonférence 15
Système(s)
à asservissement simple 465
de fonctions orthogonaux 601
— —, normé 601
— —, par rapport à un poids 605
— —, unicité 605
linéairement indépendant 604
linéaires elliptiques 322
opérationnel d'équations 541
régulier de contours 429

Tension opérationnelle 544
Théorème
d'Abel 69, 679
d'addition des fonctions de Bessel 666
de Bernoulli 402
de Cauchy 45, 429
— pour des domaines multiplement connexes 54
— généralisé 48, 326
de Cauchy-Liouville 64
— généralisé 114
de la correspondance des frontières 114
de développement 516-521
d'Efros 513
fondamental de l'algèbre 458
de Gakhov 302, 305
de Hurwitz 459
de Joukovski 263
de Keldych-Sédov 307
de Kellogg 116
de Mittag-Leffler 431
— réciproque 432
de Morera 64
de la moyenne des fonctions analytiques 54
d'orthogonalisation 604
des résidus 85
de Riemann 112
de Riemann-Schwarz 159
de Rouché 321, 457
de Schwarz-Christoffel 176
de Sokhotski 81, 294
d'unicité des développements en série 71

Théorème
d'unicité des fonctions analytiques 72
de Weierstrass 439, 440
Théorie du potentiel 201
Tourbillon d'un champ 240, 243
Tourbillon-source 243
Transformation(s) 18
de Fourier 571, 572
de Hankel 578
homographiques 128
—, exemples 137-140
—, propriétés 133
intégrale 491
de Laplace 491, 505
— bilatérale 575
—, propriétés 505-513
linéaires du plan 105
— orthogonales du plan 108
de Mellin 491, 575
partie linéaire principale 105
quasi conforme 324
univalente (biunivoque) 18
Transformation conforme 104, 108
d'une bande sur le cercle unité 140
— munie d'une coupure sur une bande 145, 146
— — — horizontale 186
— de laquelle on a retranché une lunule sur une bande 154
caractère circulaire 108
d'un cercle sur l'intérieur d'une étoile à cinq branches 192
— sur un plan duquel on a retranché les rayons 123
— duquel on a retranché une lunule sur le cercle 152
— — — un segment de rayon sur le cercle unité 143
du cercle unité sur l'extérieur d'une «étoile» 123
— — sur lui-même 138
Transformation conforme
d'une couronne circulaire excentrique sur une couronne concentrique 148
du demi-plan duquel on a retranché un segment sur le demi-plan 142
— — — — circulaire sur le demi-plan 151
— supérieur sur le cercle unité 137
— — sur lui-même 140
— — sur un rectangle 184
— — duquel on a retranché des segments sur le demi-plan supérieur 167
des domaines dont les frontières sont des courbes du second degré 169
de l'extérieur d'un arc de circonférence sur l'extérieur d'un cercle 149
de l'extérieur du cercle unité duquel on a retranché des segments sur l'extérieur du cercle unité 165
— d'une croix sur l'extérieur du cercle unité 165
du plan duquel on a retranché des segments sur le plan duquel on a retranché des segments de l'axe réel 169
— — — des rayons sur une bande 145
des polygones 159
problème fondamental 111
propriété de conservation des angles 108
Transformée de Laplace 497
Tube de courant 239

Variation
d'une dérivée frontière 388
locale 387
d'une transformation 387
Vecteur flux de chaleur 251
Voisinage 16
d'un point à l'infini 90

Zéro d'une fonction 72, 73

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Norte adresse: Editions Mir,
2 Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

Table des matières

Préface à l'édition française 5
Préface à la première édition russe 6

Chapitre I

NOTIONS FONDAMENTALES

§ 1. Nombres complexes 10
1. Nombres complexes 10
2. Interprétation géométrique 12
§ 2. Fonctions d'une variable complexe 16
3. Notions géométriques 16
4. Fonctions d'une variable complexe 17
5. Différentiabilité et analyticité 19
§ 3. Fonctions élémentaires 23
6. Fonctions $w=z^n$ et $w=\sqrt[n]{z}$ 24
7. Fonction de Joukovski 28
8. Fonctions exponentielle et logarithmique 31
9. Fonctions trigonométriques et hyperboliques 36
10. Fonction puissance générale $w=z^a$ 41
§ 4. Intégration des fonctions d'une variable complexe 42
11. Intégrale d'une fonction d'une variable complexe 42
12. Théorème de Cauchy 44
13. Extension aux domaines multiplement connexes 50
14. Formule de Cauchy et théorème de la moyenne 54
15. Principe du maximum et lemme de Schwarz 55
16. Convergence uniforme 58
17. Dérivées d'ordres supérieurs 62
§ 5. Représentation des fonctions analytiques par des séries 65
18. Séries de Taylor 65
19. Séries entières 68
20. Théorème d'unicité 73
21. Séries de Laurent 73
22. Points singuliers 78
23. Théorème des résidus. Principe de l'argument 83
24. Point à l'infini 89
25. Prolongement analytique. Généralisation de la notion de fonction analytique 92
26. Surfaces de Riemann 99
Bibliographie 103

Chapitre II

TRANSFORMATIONS CONFORMES

§ 1. Notions générales. Exemples 104
27. Notion de représentation conforme 105
28. Problème fondamental 111
29. Correspondance des frontières 114
30. Exemples 121
§ 2. Représentations conformes simples 127
31. Transformations homographiques 128
32. Cas particuliers 134
33. Exemples 140
34. Transformations des lunules circulaires 149
§ 3. Principe de symétrie et transformation des polygones 159
35. Principe de symétrie 159

36. Exemples 165
37. Transformation des polygones 171
38. Remarques complémentaires 177
39. Exemples 184
40. Arrondissement des angles 193
Bibliographie 199

Chapitre III

PROBLÈMES AUX LIMITES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ET LEURS APPLICATIONS

§ 1. Fonctions harmoniques 201
41. Propriétés des fonctions harmoniques 202
42. Propriétés des fonctions harmoniques (suite) 210
43. Problème de Dirichlet 216
44. Exemples. Compléments 224
45. Méthode des réseaux 233
§ 2. Rerpésentations physiques. Position des problèmes aux limites . . . 237
46. Champ plan et potentiel complexe 237
47. Représentations physiques 248
48. Problèmes aux limites 257
49. Exemples. Applications 263
50. Problème plan de la théorie de l'élasticité 275
51. Problèmes aux limites de la théorie de l'élasticité 282
§ 3. Intégrale du type Cauchy et problèmes aux limites 289
52. Intégrale du type Cauchy. Formules de Sokhotski 289
53. Problème aux limites d'Hilbert-Privalov 299
54. Formule de Keldych-Sédov 306
55. Autres problèmes aux limites 312
§ 4. Applications 317
56. Equations aux dérivées partielles 317
57. Problèmes d'hydrodynamique et de dynamique des gaz . . . 332
58. Théorie des charges creuses 342
59. Problèmes de la théorie de l'élasticité 352
Bibliographie 359

Chapitre IV

PRINCIPES VARIATIONNELS DES REPRÉSENTATIONS CONFORMES

§ 1. Principes variationnels fondamentaux 361
60. Principe variationnel fondamental 361
61. Extension du principe 368
62. Dérivées frontières 373
§ 2. Transformations des domaines voisins 378
63. Domaines voisins du cercle 378
64. Domaines voisins d'un domaine donné 385
65. Extension de résultats 388
§ 3. Applications 396
66. Calcul de la portance 396
67. Ondes dans un liquide pesant 401
68. Ecoulement avec décollement 407
69. Mouvement des eaux souterraines 410
Bibliographie 417

Chapitre V

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS À L'ANALYSE

§ 1. **Développement en série et produits infinis** 418
70. Séries de Taylor et de Laurent 418
71. Décomposition des fonctions méromorphes en éléments simples 427
72. Développement des fonctions entières en produits infinis . . 434
§ 2. **Applications de la théorie des résidus** 441
73. Calcul des intégrales 441
74. Calcul des intégrales (suite) 450
75. Calcul du nombre des zéros. Questions de stabilité 457
§ 3. **Méthodes des estimations asymptotiques** 473
76. Développements asymptotiques 473
77. Méthode du col 479
78. Méthode des fonctions génératrices 489
Bibliographie 493

Chapitre VI

LE CALCUL SYMBOLIQUE ET SES APPLICATIONS

§ 1. **Notions fondamentales et méthodes** 496
79. Transformation de Laplace 496
80. Propriétés de la transformation de Laplace 505
81. Théorèmes de multiplication 510
82. Théorèmes de développement 516
83. Exemples. Compléments 521
§ 2. **Applications** 537
84. Équations et systèmes d'équations différentielles ordinaires 537
85. Calcul des circuits électriques 544
86. Équations aux dérivées partielles 553
87. Calcul de longues lignes de transport de l'énergie électrique 564
88. Autres transformations intégrales 571
Bibliographie 583

Chapitre VII

FONCTIONS SPÉCIALES

§ 1. **Fonction gamma d'Euler** 584
89. Définition et propriétés fondamentales 584
90. Exemples. Compléments 594
§ 2. **Polynômes orthogonaux** 600
91. Systèmes de fonctions orthogonaux 600
92. Polynômes orthogonaux 606
93. Expression au moyen du poids. Fonctions génératrices . . . 612
94. Exemples. Applications 620
§ 3. **Fonctions cylindriques** 632
95. Fonctions cylindriques de première espèce 633
96. Autres fonctions cylindriques 644
97. Expressions asymptotiques des fonctions cylindriques 653
98. Graphes des fonctions cylindriques. Distribution des zéros 661
99. Exemples. Applications 666
§ 4. **Fonctions elliptiques** 678
100. Fonctions périodiques 678
101. Propriétés générales des fonctions elliptiques 684
102. Intégrales elliptiques et fonctions de Jacobi 690
103. Fonctions de Weierstrass. Fonctions thêta 700
104. Exemples. Applications 712
Bibliographie 720
Index 721